

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ ОБЛАСТЕЙ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Національний університет цивільного захисту України

Дану роботу присвячено розробці методу геометричного моделювання максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. Задачі оптимального покриття є складовою частиною класу задач оптимізаційного геометричного проектування, до якого у своїх постановках може бути зведеною велика кількість важливих практичних задач з різних галузей діяльності людини. Незважаючи на розвиток методів оптимального покриття, існують актуальні задачі, які до теперішнього часу є не розв'язаними. Саме до таких відноситься задача максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. При цьому обмеження спеціального виду є різними для відповідних галузей діяльності людини. Наприклад, для сфери цивільного захисту це можуть бути обмеження, що пов'язані з: часом реагування оперативно-рятувальних підрозділів на пожежі; наявними ресурсами на створення підрозділів; необхідністю реалізації заданого номеру виклику підрозділів; ризиком для людини загинути внаслідок пожежі в одиницю часу, який має не перевищувати значення, що має бути обґрунтованим, виходячи з існуючих соціально-економічних умов.

Перш за все, було сформульовано постановку задачі та розроблено модель максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. Досліджено характеристики моделі максимального покриття, до яких відносяться наступні: цільова функція є алгоритмічною, тобто обчислюється в процесі розв'язання задачі; обмеження задачі складаються з нелінійних, дискретних та кусково-лінійних виразів. Виходячи з моделі максимального покриття було зроблено висновок, що дана задача відноситься до класу задач комбінаторної оптимізації. У зв'язку з цим, для її розв'язання було розроблено метод геометричного моделювання максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду, основою якого є метод направленої перебору припустимих місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття. Одержано оцінку складності розробленого методу. Подальші дослідження будуть направлені на здійснення комп'ютерної реалізації розробленого методу.

Ключові слова: метод геометричного моделювання; модель; максимальне покриття; обмеження спеціального виду.

Постановка проблеми. Задачі оптимального покриття множин виникають у різних сферах діяльності людини, наприклад, при проектуванні розміщення станцій стільникового зв'язку у випадку визначення мінімально припустимого радіусу дії станцій зв'язку при їхній фіксованій кількості; при розв'язанні задачі покриття області станціями стільникового зв'язку із заданим радіусом дії; при визначенні мінімально можливого радіусу розкиду води поливальною установкою з розміщенням заданої кількості цих установок на ділянці поливу; при створенні мережі штучних супутників землі, призначених для контролювання діапазону кругових орбіт; при розв'язанні задачі вибору оптимальної потужності рухомих установок малої тяги і т.д. У сфері цивільного захисту виникають задачі захисту населення та територій від пожеж (небезпечних подій, надзвичайних ситуацій), що можуть бути також зведеними до класу задач покриття. Разом з тим, у всіх перерахованих вище задачах необхідно врахувати низку обмежень спеціального виду, характерних для конкретної галузі. Наприклад, для сфери цивільного захисту це можуть бути обмеження, що пов'язані з: часом реагування оперативно-рятувальних підрозділів на пожежі; наявними ресурсами на створення підрозділів; необхідністю реалізації заданого номеру виклику підрозділів; ризиком для людини загинути внаслідок пожежі в одиницю часу, який має не перевищувати значення, що має бути обґрунтованим, виходячи з існуючих соціально-економічних умов.

У зв'язку з цим, виникає науково-прикладна проблема оптимального покриття заданих множин з урахуванням обмежень спеціального виду. Одним із шляхів, що сприятиме розв'язку даної проблеми, є розробка методу геометричного моделювання максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду.

Ціль статті. У даній роботі необхідно сформулювати постановку задачі, розробити модель та метод геометричного моделювання максимального покриття заданих множин з урахуванням обмежень спеціального виду.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Розробці моделей та методів розв'язання класу задач оптимізаційного геометричного проектування, до якого відноситься задача максимального покриття заданих множин, присвячено велику кількість наукових праць, серед яких [1-5]. Напряму наукових досліджень, пов'язаних із розробкою моделей та методів оптимального покриття геометричних об'єктів, було започатковано Стояном Ю.Г. та Яковлевим С.В. [6-12]. Для формалізації обмежень у задачах покриття використовується математичний апарат ω -функцій, які являють собою (при розв'язанні задачі у просторі R^2) площі перетину відповідних геометричних об'єктів [13, 14].

Що стосується врахування обмежень спеціального виду в задачах оптимального покриття, то в роботах [15-18] наведено оцінювання параметрів впливу на інтегральний пожежний ризик за допомогою

факторного аналізу, моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами, метод мінімізації інтегрального пожежного ризику за допомогою оптимізації покриття заданої області районами виїзду пожежних підрозділів, модель та метод оптимального покриття неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами.

Разом з тим, на теперішній час є актуальною задача максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду, яка потребує розробки відповідних моделей та методів.

Основна частина. Сформулюємо постановку даної задачі. Нехай у просторі R^2 задано область $S_0(m_0, u_0)$, яка являє собою у загальному випадку неопуклий багатокутник з координатами вершин $m_0 = \{x_{0,1}, y_{0,1}, \dots, x_{0,n_0}, y_{0,n_0}\}$ та зв'язана з глобальною (нерухомою) системою координат XOY (початок глобальної системи координат співпадає з однією з вершин багатокутника, а $u_0 = \{0, 0\}$). Слід відзначити, що m_0 – метричні характеристики, а u_0 – параметри розміщення $S_0(m_0, u_0)$.

Область $S_0(m_0, u_0)$ має підобласті $v_k(m_k, u_k) \in V$, $k = 1, \dots, N_k$, які належать множині V . Підобласті $v_k(m_k, u_k)$, $k = 1, \dots, N_k$, також являють собою неопуклі багатокутники, які задані координатами вершин $m_k = \{x_{k,1}, y_{k,1}, \dots, x_{k,n_k}, y_{k,n_k}\}$ у глобальній системі координат. Даним підобластям мають належати параметри розміщення локальних (рухомих) систем координат $X_{c,i}O_{c,i}Y_{c,i}$ об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$ відносно глобальної системи координат. Об'єкти покриття являють собою неопуклі багатокутники, які визначаються координатами вершин $m_{c,i} = \{x_{c,i,1}, y_{c,i,1}, \dots, x_{c,i,n_{c,i}}, y_{c,i,n_{c,i}}\}$ у локальних системах координат та параметрами розміщення даних систем координат $u_{c,i} = \{x_{c,i}, y_{c,i}\}$. Слід відзначити, що метричні характеристики $m_{c,i}$ та параметри розміщення локальних систем координат об'єктів покриття $u_{c,i}$ є змінними (на відміну від заданих області та підобластей, для яких метричні характеристики та параметри розміщення є постійними).

Необхідно здійснити покриття області $S_0(m_0, u_0)$ об'єктами $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$, таким чином, щоб їх кількість була мінімальною та виконувалися наступні обмеження (рис. 1):

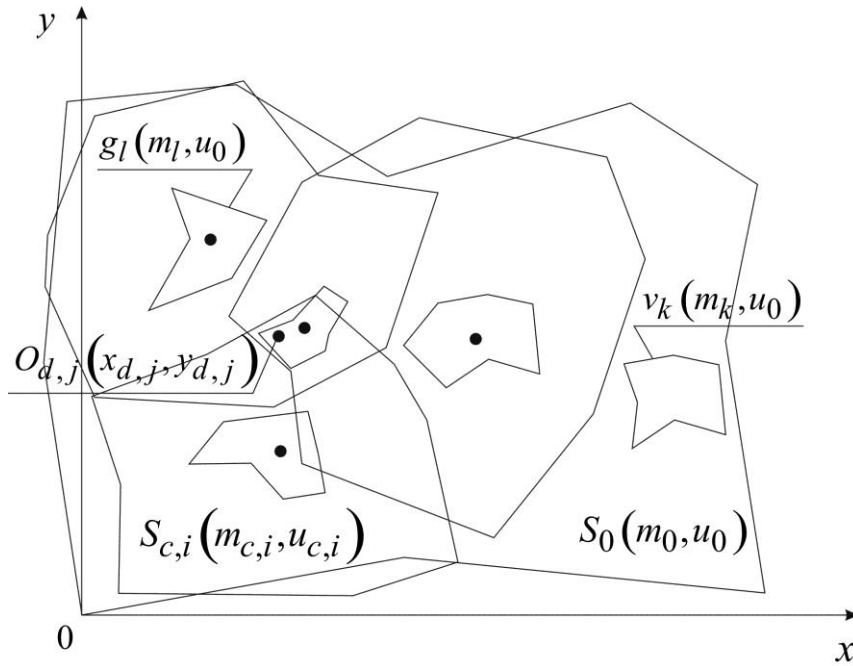


Рис. 1. Максимальне покриття підобластей $v_k(m_k, u_0)$, $k=1, \dots, N_k$ та повне покриття підобластей $g_l(m_l, u_0)$, $l=1, \dots, N_l$, і точок

$$O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j}), j=1, \dots, N_d$$

– мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$;

– мінімум площі перетину об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$, та $cS_0(m_{cS_0}, u_{cS_0})$ – доповнення області $S_0(m_0, u_0)$ до простору R^2 ;

– параметри розміщення локальних систем координат об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$, мають належати точкам $P_\xi(x_\xi, y_\xi)$, $\xi=1, \dots, N_\xi$, $N_\xi \geq N_k$, у підобластях $v_k(m_k, u_0)$, $k=1, \dots, N_k$, з урахуванням пріоритетної належності підобластям $g_l(m_l, u_0)$, $l=1, \dots, N_l$.

– максимальне покриття підобластей $v_k(m_k, u_0)$, $k=1, \dots, N_k$, об'єктами $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$;

– належність підобластей $g_l(m_l, u_0)$, $l=1, \dots, N_l$, об'єктам покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$;

– належність точок $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$, $j=1, \dots, N_d$, областям перетину заданої кількості M об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$;

– обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття $m_{c,i}$, $i=1,\dots,N$.

На підставі сформульованої постановки було розроблено модель максимального покриття заданих множин з урахуванням обмежень спеціального виду:

$$\min_W N(m_{c,1}, u_{c,1}, \dots, m_{c,N}, u_{c,N}); \quad (1)$$

де W :

$$\omega_\Omega(m_{c,i}, m_{c,h}, u_{c,i}, u_{c,h}) \rightarrow 0; \quad (2)$$

$$i=1, \dots, N-1; h=i+1, \dots, N;$$

$$\omega_\Omega(m_{c,i}, m_{cS_0}, u_{c,i}, u_{cS_0}) \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$i=1, \dots, N; S_0 \cup cS_0 = R^2;$$

$$u_{c,i} \in P_\xi(x_\xi, y_\xi); i=1, \dots, N; \quad (4)$$

$$\xi \in \{1, \dots, N_\xi\}; N_\xi \geq N_k;$$

$$\omega_\Omega \left(m_{\bigcup_{k=1}^{N_k} v_k}, m_{\bigcup_{i=1}^N S_{c,i}}, u_0, u_{\bigcup_{i=1}^N S_{c,i}} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow S \left(\bigcup_{k=1}^{N_k} v_k(m_k, u_0) \right) \quad (5)$$

$$\omega_\Omega \left(m_{\bigcup_{l=1}^{N_l} g_l}, m_{\bigcup_{i=1}^N S_{c,i}}, u_0, u_{\bigcup_{i=1}^N S_{c,i}} \right) =$$

$$= S \left(\bigcup_{l=1}^{N_l} g_l(m_l, u_0) \right) \quad (6)$$

$$O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j}) \in \bigcap_{\mu}^{M_j} S_{c,\mu}(m_{c,\mu}, u_{c,\mu}), \quad (7)$$

$$j = 1, \dots, N_d; \mu \in \{1, \dots, N\};$$

$$m_{c,i} = f(t); i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Слід відзначити, що для формалізації обмежень моделі було використано математичний апарат ω -функцій покриття [14].

Основними характеристиками моделі максимального покриття областей з урахуванням обмежень спеціального виду є наступні: цільова функція є алгоритмічною, тобто обчислюється в процесі розв'язання задачі; обмеження задачі складаються з нелінійних, дискретних та кусково-лінійних виразів.

Для розв'язання задачі (1)÷(8) було розроблено метод направленої перебору припустимих місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$.

У даному випадку, перш за все, здійснюється виконання обмежень (6) та (7). Виконання обмежень (7) забезпечується наступним чином:

а) початки локальних систем координат об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i \in \{1, \dots, N\}$ обов'язково розміщуються в підобластях $g_l(m_l, u_0)$, $l = 1, \dots, N_l$ та підобластях $v_k(m_k, u_0)$, $k \in \{1, \dots, N_k\}$, яким належать точки $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$, $j = 1, \dots, N_d$ (рис. 2);

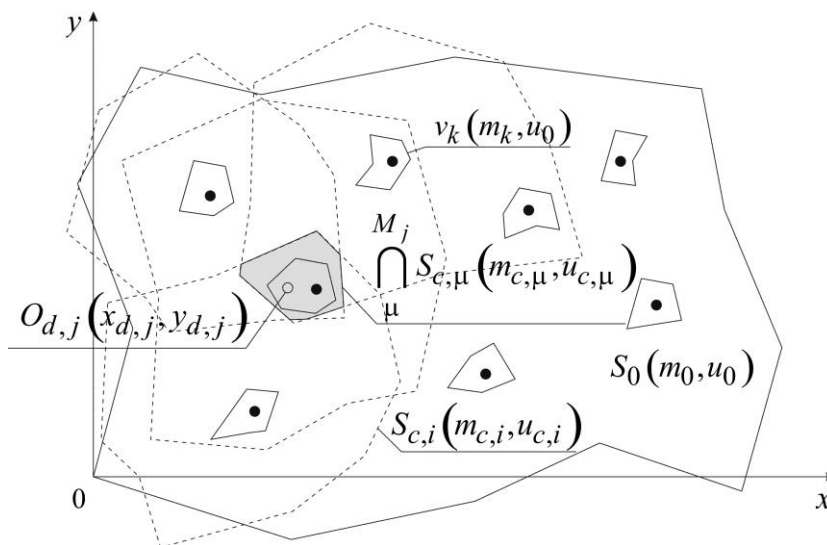


Рис. 2. Виконання умов (7) щодо належності точки $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$, $j \in \{1, \dots, N_d\}$, області перетину M_j об'єктів покриття

б) початки локальних систем координат об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i \in \{1, \dots, N\}$, розміщуються в областях $\bigcap_{d=1}^D P'_d$ (рис. 3).

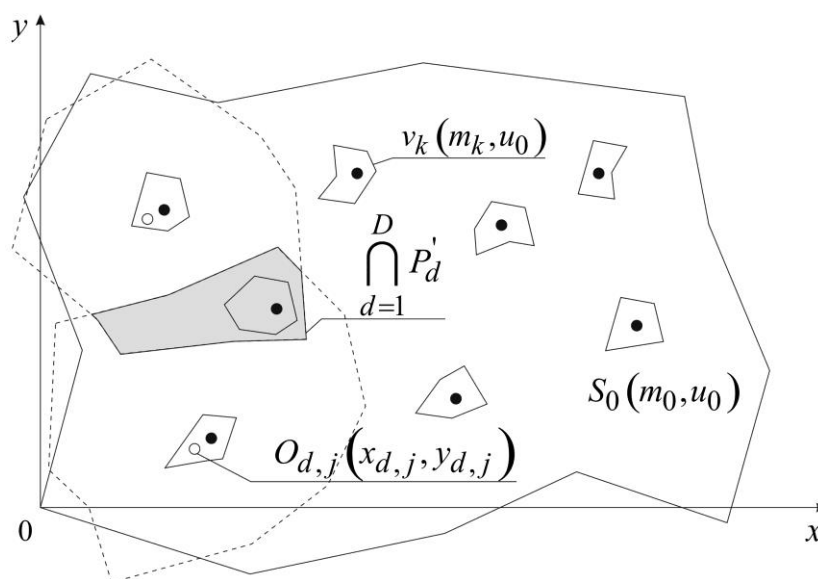


Рис. 3. Побудова області $\bigcap_{d=1}^D P'_d$

Виконання обмеження (б) забезпечується тим, що початки локальних систем координат об'єктів покриття мають належати підобластям $g_l(m_l, u_0) \in G$, $l = 1, \dots, N_l$, $G \subset V$, причому здійснюється побудова такого об'єкта покриття, якому належить найбільша кількість підобластей $g_l(m_l, u_0) \in G$, $l = 1, \dots, N_l$.

Вибір найкращого рішення здійснюється з урахуванням цільової функції та інших обмежень задачі.

Оцінка складності даного методу має наступний вигляд:

$$O_1 = \sum_{j=1}^{N_d} M_j \cdot N_{M_j} + \sum_{i=\sum_{j=1}^{N_d} M_j+1}^N N_l; \quad (9)$$

де N_{M_j} – кількість припустимих місць розташування початків локальних систем координат об'єктів покриття для виконання обмежень (7);

N_d – кількість точок $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$;

M_j – кількість об'єктів покриття, яким має належати точка

$O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$;

N_l – кількість припустимих місць розташування початків локальних систем координат об'єктів покриття, що належать підобластям $g_l(m_l, u_0) \in G, l = 1, \dots, N_l$.

Висновки та перспективи. У даній роботі сформульовано постановку задачі, розроблено модель максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду та досліджено її характеристики. На основі розробленої моделі було створено метод геометричного моделювання максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду, основою якого є метод направленої перебору припустимих місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття. Одержано оцінку складності розробленого методу. Подальші дослідження будуть направлені на здійснення комп'ютерної реалізації розробленого методу.

Література

1. Stoyan Y.G., Yakovlev Y.G. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. USA, 2018. Vol. 54, № 5, P. 716–726.
2. Yakovlev S., Kartashov O., Korobchynskyi K. The informational analytical technologies of synthesis of optimal spatial configuration. *Computer Sciences and Information Technologies* : IEEE 13th Intern. Scientific and Technical Conf. c. Lviv, LPNU, September 11–14 2018, Lviv. P. 140–143.
3. Andronov V.A., Komyak V.M., Sobol A.N., Komyak V.V., Popova A.V. Problem of geometric design: placement, coverage, partition and defining optimal routes. *Годишник на техническия университет във Варна*. Варна, 2013. Т. 3. С. 9–13.
4. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: монографія. Киев: наук. думка, 2005. – 564 с.
5. Komyak V., Sobol O., Kartashov O., Yakovleva I., Komyak V., Danilin A., Lyashevskaya O. Computer simulation of the partitioning by mutually orthogonal lines. *Experience of Designing and Application of CAD Systems* : IEEE 15th International Conference, v. Polyana, LPTU, February 26 – March 2 2019, Polyana, P. 16–19.
6. Stoyan Yu., Romanova T., Scheithauer G., Krivulya A. Covering a polygonal region by rectangles. *Computational Optimization and Applications*. 2011. Vol. 48, № 3, P. 675–695. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10589-009-9258-1>.
7. Yakovlev S., Kartashov O., Komyak V., Shekhovtsov S., Sobol O., Yakovleva I. Modeling and Simulation of Coverage Problem in Geometric Design System. *Experience of Designing and Application of CAD Systems* : IEEE 15th

International Conference, v. Polyana, LPTU, February 26 – March 2 2019, Polyana, P. 20–23.

8. *Yakovlev S.V.* On a class of problems on covering of a bounded set. *Acta Mathematica Hungarica*. 1989. Vol. 53, № 3, P. 253–262. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01953365>.

9. *Kiseleva E.M., Lozovskaya L.I., Timoshenko E.V.* Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, № 3, P. 421–437. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-009-9113-5>.

10. *Stoyan Y.G., Patsuk V.M.* Covering a convex 3D polytope by a minimal number of congruent spheres. *International Journal of Computer Mathematics*. 2014. Vol. 91, № 9, P. 2010–2020. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.140722>.

11. *Yakovlev S., Kartashov O., Korobchynskyi K.* The informational analytical technologies of synthesis of optimal spatial configuration *Computer Sciences and Information Technologies* : IEEE 13th Intern. Scientific and Technical Conf. c. Lviv, LPNU, September 11–14 2018, Lviv. P. 374–377.

12. *Комяк В.М., Соболев О.М., Собина В.О., Лісняк А.А.* Оптимізація покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками: монографія. Харків: НУЦЗУ, 2013. – 124 с.

13. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев.: наук. думка, 1986. – 268 с.

14. *Соболев О.М., Собина В.О., Тур О.М.* Побудова ω -функцій в задачах покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: міжвідомчий науково-технічний збірник. Київ, 2010. Вип. 86 С. 118–122.

15. *Кравців С.Я., Соболев О.М., Тютюник В.В.* Оцінювання параметрів впливу на інтегральний пожежний ризик за допомогою факторного аналізу. Пожежна безпека. Технічні науки. Львів, 2017. № 30. С. 99–104.

16. *Комяк В. М., Соболев О. М., Кравців С. Я., Чуб І. А.* Моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами. *Вісник Херсонського національного технічного університету. Технічні науки*. Херсон, 2018. № 3 (66), Т. 2. С. 147–152.

17. *Кравців С.Я.* Метод мінімізації інтегрального пожежного ризику за допомогою оптимізації покриття пожежних депо. *Наукові вісті КПІ. Технічні науки*. Київ, 2018. № 4. С. 30–37.

18. *Комяк В.М., Соболев О.М., Кравців С.Я.* Модель та метод оптимального покриття неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними

элементами. *Науковий вісник Таврійського державного агротехнічного університету*. Мелітополь, 2018. Вип. 8, Т. 1. С. 11–22.

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.Н. Соболев, С.Я. Кравцов

Национальный университет гражданской защиты Украины

Данная работа посвящена разработке метода геометрического моделирования максимального покрытия заданных областей с учетом ограничений специального вида. Задачи оптимального покрытия являются составной частью класса задач оптимизационного геометрического проектирования, к которому в своих постановках может быть сведено большое количество важных практических задач из разных областей деятельности человека. Несмотря на развитие методов оптимального покрытия, существуют актуальные задачи, которые до настоящего времени являются нерешенными. Именно к таким относится задача максимального покрытия заданных областей с учетом ограничений специального вида. При этом ограничения специального вида различны для соответствующих отраслей деятельности человека. Например, для сферы гражданской защиты это могут быть ограничения для: времени реагирования оперативно-спасательных подразделений на пожар; имеющихся ресурсов на создание подразделений; необходимости реализации заданного номера вызова подразделений; риска для человека погибнуть в результате пожара в единицу времени, который не должен превышать значения, обоснованного исходя из существующих социально-экономических условий.

Прежде всего, была сформулирована постановка задачи и разработана модель максимального покрытия заданных областей с учетом ограничений специального вида. Исследованы характеристики модели максимального покрытия, к которым относятся следующие: целевая функция является алгоритмической, т.е. вычисляется в процессе решения задачи; ограничения задачи состоят из нелинейных, дискретных и кусочно-линейных выражений. Анализ модели максимального покрытия позволил сделать вывод, что данная задача относится к классу задач комбинаторной оптимизации. В связи с этим, для ее решения был разработан метод геометрического моделирования максимального покрытия заданных областей с учетом ограничений специального вида, основой которого является метод направленного перебора допустимых мест размещения начал локальных систем координат объектов покрытия. Получена оценка сложности разработанного метода. Дальнейшие исследования будут

направлены на осуществление компьютерной реализации разработанного метода.

Ключевые слова: метод геометрического моделирования, модель, максимальное покрытие, ограничения специального вида.

METHOD OF GEOMETRIC MODELING OF THE MAXIMUM COVERAGE GIVEN AREAS WITH SPECIAL TYPE RESTRICTIONS TAKEN INTO ACCOUNT

*O. Sobol, S. Kravtsiv
National University of Civil Defence of Ukraine*

This work is devoted to development the method of geometric modeling of the maximum coverage given areas with special type restrictions taken into account. Optimal coverage problems are an integral part of the class of optimization geometric design problems, to which a large number of important practical problems from different areas of human activity can be reduced in their formulations. Despite the development of optimal coverage methods, there are exist tasks that are still unsolved. These include the problem of maximum coverage given areas with special type restrictions taken into account. At the same time, special type restrictions are different for the corresponding areas of human activity. For example, for the sphere of civil defence, this may be a restriction for: the response time of operational and rescue units to a fire; available resources for the creation of units; to implement a given unit call number; risk for a person to die as a result of a fire per unit of time, which should not exceed a value justified on the basis of existing socio-economic conditions.

First of all, the statement of the problem was formulated and a model for the maximum coverage given areas with special type restrictions taken into account was developed. The characteristics of the maximum coverage model are studied, which include the following: the objective function is algorithmic, i.e. calculated in the process of solving the problem; task restrictions consist of nonlinear, discrete, and piecewise linear expressions. Analysis of the maximum coverage model allowed concluding that this problem belongs to the class of combinatorial optimization problems. In this regard, a method of geometric modeling of the maximum coverage given areas with special type restrictions taken into account was developed, the basis of which is a method of directed sorting of acceptable locations for the beginnings of local coordinate systems of coverage objects. An estimate of the complexity of the developed method is obtained. Further research will be aimed on a computer implementation of the developed method.

Key words: geometric modeling method; model; maximum coverage; special type restrictions.