Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 8

УДК 519.21 в раздел “КИБЕРНЕТИКА”

А.Е. Басманов, В.А. Дикарев

СТАБИЛИЗАЦИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В ОКРЕСТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАДАННОГО НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

В [1,2] установлено, что фокусировка в точке t_0 имеет место, если элементы $\lambda_{ij}(t)$ матрицы $\Lambda(t)$ (все или их часть) при $t\uparrow t_0$ быстро возрастают. Если, кроме того, выполнены некоторые условия [2,3], то при $t\uparrow t_0$ для точной фокусировки и σ-фокусировки соответственно

$$p_j(s_0,t)\to\pi_j \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{t\uparrow t_0}}\, p_j(s_0,t)\in[\pi_j-\sigma,\pi_j+\sigma],\quad \underline{\lim_{t\uparrow t_0}}\, p_j(s_0,t)\in[\pi_j-\sigma,\pi_j+\sigma]. \tag{2}$$

Здесь индексом j нумеруются состояния, $\pi_j\geq 0$, $\sum_{j=1}^{n}\pi_j=1$. Соотношения (1) и (2) должны выполнятся для всех состояний. Величина σ в (2) является нижней гранью по всем $\bar{\sigma}$, для которых условие (2) имеет место. В дальнейшем речь будет идти только о σ-фокусировке.

Быстрый рост (при $t\uparrow t_0$) элементов матрицы $\Lambda(t)$ обычно возникает из-за воздействия на процесс быстро изменяющихся факторов, локализованных на малых промежутках времени. На практике приходится иметь дело с такими факторами, которые, воздействуя на процесс на некотором промежутке времени $[\alpha,\beta]$, приводят к появлению на нем точек фокусировки, распределенных почти непрерывно.

Перейдем к решению задачи о стабилизации вероятностей состояний марковского процесса в окрестности заданного распределения. Пусть дана n-мерная кривая $\varphi(t)=(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)), t\in[\alpha,\beta]$:

$$\varphi_k(t) \geq 0, \quad k = 1,2,\ldots,n; \qquad \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = 1, \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{3}$$

Используя подход, изложенный в [1,2], можно проверить, что существует процесс с соответствующим образом подобранной на $[\alpha,\beta]$ плотностью точек фокусировки, для вероятностей всех состояний которого выполнены условия:

$$|p_j(\alpha,t)-\varphi_j(t)| \leq \sigma, \; t\in[\alpha+\delta,\beta], j = 1,2, ..., n. \tag{4}$$

Ниже, где это не приведет к недоразумениям, будем обозначать распределение вероятностей в момент времени t через $p(t)$, опуская зависимость от начального распределения.

Пусть задано начальное распределение $p(a)$ и функция времени $\varphi(t)$, в окрестности которой должно находится распределение вероятностей, т.е. $p(t)\in[\varphi(t)-\sigma(t),\varphi(t)+\sigma(t)]$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\sigma(t)$ - максимально допустимая погрешность. Полагаем, что в начальный момент времени это условие уже выполнено: $p(\alpha)\in[\varphi(\alpha)-\sigma(\alpha), \varphi(\alpha)+\sigma(\alpha)]$. Связь между инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$ и распределением вероятностей $p(t)$ задается системой дифференциальных уравнений Колмогорова.

Разобьем весь временной отрезок на малые отрезки $[t_k,t_{k+1}]$. На каждом из частичных отрезков уравнения Колмогорова заменим приближенным разностным матричным уравнением:

$$p^{T(k+1)} = \left(E - \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k+1)}\right)^{-1}\left(E + \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k)}\right)p^{T(k)}, \tag{5}$$

где $h_k = t_{k+1} - t_k$. Преобразовывая его, получим

$$\left(E - \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k+1)}\right)p^{T(k+1)} = \left(E + \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k)}\right)p^{T(k)},$$

$$p^{(k+1)}\Lambda^{(k+1)} = 2\frac{p^{(k+1)} - p^{(k)}}{h_k} + p^{(k)}\Lambda^{(k)}. \qquad (6)$$

Таким образом, на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ по заданному значению матрицы $\Lambda^{(k)}$ в начальной точке t_k мы можем найти значение $\Lambda^{(k+1)}$ в конечной точке t_{k+1} так, чтобы распределение вероятностей в ней приняло значение $p^{(k+1)}$. Однако уравнение (6) не определяет однозначно матрицу $\Lambda^{(k+1)}$. Поэтому целесообразно из множества матриц $\Lambda^{(k+1)}$ выбрать такую, которая бы минимально отклонялась от исходной невозмущенной матрицы.

Обозначим через $X^{(k)}$ искомое значение возмущенной матрицы в точке t_k и перепишем условие (6) в виде

$$p^{(k+1)}X^{(k+1)} = 2\frac{p^{(k+1)} - p^{(k)}}{h_k} + p^{(k)}X^{(k)}. \qquad (7)$$

Это приводит к задаче минимизации вида

$$a\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k+1)}\right)^2 + b\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)}\right)^2 \to \min_{x_{ij}^{(k+1)}} \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k+1)} x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} x_{ij}^{(k)} + \frac{2}{h_k}\left(p_j^{(k+1)} - p_j^{(k)}\right), \qquad j=1,2, \dots ,n \qquad (9)$$

$$x_{ii}^{(k+1)} = -\sum_{j \neq i} x_{ij}^{(k+1)}, \qquad i=1,2, \dots ,n \qquad (10)$$

$$x_{ij}^{(k+1)} \geq 0, \qquad i \neq j. \qquad (11)$$

Здесь $x_{ij}^{(k+1)}$ - элементы искомой матрицы $X(t)$ в точке t_k, $\lambda_{ij}^{(k+1)}$ - элементы невозмущенной матрицы $\Lambda(t)$ в той же точке. Ограничение (9) представляет собой аппроксимацию (7) уравнений Колмогорова. Ограничения (10)-(11) определяются свойствами инфинитезимальной матрицы.

Задача (8)-(11) является задачей квадратичного программирования с линейными ограничениями и квадратичной функцией цели. Такая задача всегда имеет единственное решение, которое может быть найдено численными методами. Таким образом, задача об удержании распределения вероятностей марковского процесса в окрестности некоторой функции распределения (3) сводится к разбиению временного интервала на частичные отрезки и решению задачи минимизации (8)-(11) на каждом из них. Если найденное решение $X^{(k+1)}$ после подстановки в уравнения Колмогорова дает

$$p(t_{k+1})\in[\varphi(t_{k+1})-\sigma(t_{k+1}),\varphi(t_{k+1})+\sigma(t_{k+1})],$$

то принимаем его как начальное значение на следующем отрезке $[t_{k+1},\ t_{k+2}]$. В противном случае уменьшаем шаг h_k на данном частичном отрезке и повторяем вычисления заново. Отметим, что указанный подход позволяет вычислить возмущенную инфинитезимальную матрицу процесса на любой системе точек из временного отрезка $[\alpha,\beta]$.

1. *Герасин С.Н., Дикарев В.А., Числин Н.И.* Существование предельных вероятностей для конечных процессов Маркова с убывающими к нулю временными промежутками переходов.
2. *Дикарев В.А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. - Харьков: ХТУРЭ, 1995. - 11 с. - Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95 № 526-Ук 95.
3. *Дикарев В.А*. Точки фокусировки и стабилизация неоднородных марковских процессов. - Харьков: ХТУРЭ, 1995. - 9 с. - Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95 №533-Ук95.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники.