Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 2

УДК 519.21 в раздел «Кибернетика»

А.Е. Басманов

СИНТЕЗ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

Рассмотрим марковский процесс в широком смысле, заданный в фазовом пространстве $\{X, \boldsymbol{B}\}$ с вероятностями перехода $P(s,x,t,B) = P\{\xi(t) \in B / \xi(s) = x\}$, $x \in X, B \in \boldsymbol{B}, s < t$, $\boldsymbol{B}$ – борелевская σ-алгебра [2]. В дальнейшем будем опускать зависимость от s, t и писать $P(x,B)$. Пусть $A, B \in \boldsymbol{B}$, обозначим $P^A(x,B)$ - вероятность перехода из x в B при условии, что процесс остается в A:

$$P^A(x,B) = P(x,B/\xi(t) \in A) = \frac{P(x,B \cap A)}{P(x,A)}, \qquad x \in A.$$

Случайный процесс в фазовом пространстве $\{A, \boldsymbol{A}\}$, описываемый переходной функцией $P^A(x,B)$, $B \in \boldsymbol{A}$, будем называть фрагментом исходного марковского процесса $P(x,B)$. Отметим, что полученный фрагмент не является марковским процессом, так как для него, вообще говоря, соотношение Чепмена-Колмогорова [2] может быть не выполнено. Изучим вопрос о том, в каком случае удается провести синтез всего процесса по его фрагментам, т.е. восстановить (полностью или частично) вероятности перехода $P(x,B)$ в фазовом пространстве $\{X, \boldsymbol{B}\}$. Приводимые ниже рассуждения опираются на [1], где были рассмотрены марковские процессы с конечным или счетным числом состояний.

Найдем стохастическое ядро $P(x,B)$, если известны стохастические ядра $P^{A_1}(x,B)$ и $P^{A_2}(x,B)$, где

$$A_1 \cup A_2 = X, \qquad A_1 \cap A_2 \neq \varnothing.$$

Введем следующие обозначения

$$S_1 = P(x,\ A_1 \setminus A_2) = \int\limits_{A_1 \setminus A_2} P(x, dy),$$

$$S_2 = P(x,\ A_2 \setminus A_1) = \int\limits_{A_2 \setminus A_1} P(x, dy),$$

$$S_1' = P^{A_1}(x,\ A_1 \setminus A_2) = \int\limits_{A_1 \setminus A_2} P^{A_1}(x, dy),$$

$$S_2' = P^{A_2}(x,\ A_2 \setminus A_1) = \int\limits_{A_2 \setminus A_1} P^{A_2}(x, dy), \qquad x \in A_1 \bigcap A_2 .$$

Тогда

$$P^{A_1}(x, B) = \frac{P(x, B \bigcap A_1)}{1 - P(x, A_2 \setminus A_1)} = \frac{P(x, B \bigcap A_1)}{1 - S_2}, \tag{1}$$

$$P^{A_2}(x, B) = \frac{P(x, B \bigcap A_2)}{1 - P(x, A_1 \setminus A_2)} = \frac{P(x, B \bigcap A_2)}{1 - S_1}. \tag{2}$$

Подставляя вместо множества B частичное множество dy, получим

$$P^{A_1}(x, dy) = \frac{P(x, dy)}{1 - S_2}, \qquad dy \in A_1$$

$$P^{A_2}(x, dy) = \frac{P(x, dy)}{1 - S_1}, \qquad dy \in A_2 .$$

Проинтегрируем первое равенство по $A_1 \setminus A_2$, а второе по $A_2 \setminus A_1$.

$$S_1' = \frac{S_1}{1 - S_2},$$

$$S_2' = \frac{S_2}{1 - S_1}.$$

Выражая отсюда S_1 и S_2 и подставляя в (1)-(2), находим переходные вероятности синтезируемого процесса:

$$P(x, dy) = P^{A_1}(x, dy) \frac{1 - S_2'}{1 - S_1' S_2'}, \qquad dy \in A_1,$$

$$P(x, dy) = P^{A_2}(x, dy) \frac{1 - S_1'}{1 - S_1' S_2'}, \qquad dy \in A_2,$$

$$
\begin{aligned}
&P(x,B)=P\left(x,B\bigcap A_1\right)+P\left(x,B\bigcap (A_2\setminus A_1)\right)=\\
&=\frac{P^{A_1}\left(x,B\bigcap A_1\right)\left(1-S_2'\right)+P^{A_2}\left(x,B\bigcap (A_2\setminus A_1)\right)\left(1-S_1'\right)}{1-S_1'S_2'},\quad x\in A_1\bigcap A_2 .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Таким образом, мы можем восстановить значения стохастического ядра для $x\in A_1\bigcap A_2$. Если $A_1\bigcup A_2\neq X$, то, проведя аналогичные рассуждения, мы найдем значения стохастического ядра $P^{A_1\bigcup A_2}(x,B)$.

Отметим, что фрагменты P^{A_1}, P^{A_2} не являются независимыми – для того чтобы синтезируемое стохастическое ядро было восстановлено однозначно, необходимо выполнение условия согласования

$$
P^{A_1}\left(x,B\right)\left(1-S_2'\right)=P^{A_2}\left(x,B\right)\left(1-S_1'\right),\; x\in A_1\bigcap A_2,\; B\subset A_1\bigcap A_2 . \tag{4}
$$

Далее, применимы все результаты и подходы, что и для цепей Маркова [1]. Пусть имеется конечная система множеств: $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \boldsymbol{B}$ такая, что $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = A_\Sigma$.

Введем множество

$$
V_x=\left\{i: x\in A_i,\, i=1,2,\ldots,m\right\}. \tag{5}
$$

В этом множестве содержаться номера фрагментов, содержащих точку x. Будем предполагать, что для любых двух точек x, y существует множество A_i, содержащее эти точки одновременно. Как было показано в [1], в этом случае множество V_x содержит не менее двух элементов. Пусть U_x – собственное подмножество множества V_x:

$$
U_x\subset V_x,\qquad U_x\neq V_x,\qquad U_x\neq\varnothing . \tag{6}
$$

При сделанных выше предположениях оно существует. Обозначим

$$
M_{U_x}=\left(\bigcup_{i\in U_x} A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{i\in V_x\setminus U_x} A_i\right).
$$

Из определения следует, что $y \in M_{U_x}$. Действительно, если выполнено (6), то каждое объединение состоит из множеств, содержащих, по крайней мере, точку x. Имеет место следующая теорема о необходимых и достаточных условиях синтеза по фрагментам марковского процесса в широком смысле.

Теорема. Для того чтобы по фрагментам $P^{A_1}, P^{A_2}, \dots, P^{A_m}$ можно было провести синтез процесса P^{A_Σ} необходимо и достаточно, чтобы

1) для любых двух пересекающихся фрагментов выполнялось условие согласования: (4);

2) для любых двух точек $x, y \in A_\Sigma$ существовало множество A_k из совокупности $A_1, A_2, \dots, A_m$, содержащее эти точки одновременно;

3) $\forall x \in A_\Sigma \ \forall U_x \subset V_x \quad \int\limits_{y \in M_{U_x}} P^{A_r}(x, dy) > 0$, $r \in V_x$, где U_x, V_x определены в (5)-(6).

Доказательство теоремы совпадает с доказательством для случая дискретного числа состояний, приведенного в [1], только теперь переходные вероятности процесса вычисляются с использованием формулы (3). При этом стохастическое ядро удается синтезировать за конечное число шагов.

Предположим, имеется счетная система фрагментов $P^{A_1}, P^{A_2}, \dots, P^{A_m}, \dots$ и $A_\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Если выполнены все условия теоремы о необходимых и достаточных условиях, то мы можем синтезировать процесс P^{A_Σ} (возможно за счетное число шагов). Последовательность элементов, стоящих на одном и том же месте «расширяющихся» фрагментов (последовательность $P^{A_1}(x, B), P^{A_1 \cup A_2}(x, B), \dots$ для любых фиксированных x, B) монотонно не возрастает в силу (3) и ограничена снизу (вероятность не отрицательна). Следовательно, существует предел

$$\lim_{m\to\infty} P^{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup \ldots}(x,B) = P^{\infty}(x,B).$$

Если

$$\int\limits_{y\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} P^{\infty}(x,dy) = 1, \qquad (7)$$

то вероятности перехода из точки x удается восстановить полностью. Если же значение интеграла (7) оказывается меньше единицы, то нарушается закон полной вероятности и это означает, что фрагменты $P^{A_1}, P^{A_2}, \ldots, P^{A_m}, \ldots$ не согласованы.

1. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Синтез стохастической матрицы по системе ее фрагментов. - Харьков: ХТУРЭ, 1997. - 8 с. - Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97 № 76-Уі 97.
2. *Гихман И. И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники.