Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 8

УДК 519.21 в раздел «Кибернетика»

М.Ф. Бондаренко, А.Е. Басманов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОЦЕССА БЛУЖДАНИЙ НА ГРАФЕ

При исследовании случайных процессов часто используют соответствующим образом выбранные процессы случайных блужданий на графе [2, 3]. Если известны лишь разрозненные данные о процессе, начальная задача состоит в том, чтобы по ним восстановить процесс. При переходе к процессу блужданий на графе задача заключается в восстановлении графа по его подграфам. Часто данных для ее решения недостаточно; вместе с тем по ним можно найти некоторые важные характеристики процесса блужданий, а, значит, и соответствующие им характеристики исходного процесса. В этой статье решена задача об отыскании вектора распределения финальных вероятностей процесса блужданий на графе по некоторой системе его подграфов.

Рассмотрим процесс случайных блужданий частицы на связном графе без циклов (дереве). Расположим граф таким образом, чтобы его корень был слева, а ветви шли слева направо. Будем предполагать, что смещение частицы происходит в дискретные моменты времени, которые, вообще говоря, могут иметь точки сгущения. На каждом шаге частица может смещаться лишь в те вершины графа, попасть в которые можно идя по ребрам только влево или только вправо; другими словами движение не может смениться на противоположное. Такие блуждания представляют собой неоднородный марковский процесс с дискретным временем и числом состояний n, равном количеству вершин рассматриваемого графа. Занумеруем вершины графа натуральными числами и под состоянием k будем понимать нахождение частицы в вершине с номером k.

Сначала рассмотрим случай, когда из корня дерева исходит только две ветви. Тогда матрица переходных вероятностей будет иметь структуру (1). Здесь предполагается, что состояние m соответствует корню дерева. Отметим, что если за один шаг частица при смещении влево не может пройти далее точки ветвления (корня ветви, на которой она находится), то левый верхний и правый нижний блоки матрицы (1) будут иметь ту же структуру, что и вся матрица.

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,m-1} & p_{1,m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m-1,1} & \cdots & p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,m-1} & p_{m,m} & p_{m,m+1} & \cdots & p_{m,n} \\ 0 & \cdots & 0 & p_{m+1,m} & p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n,m} & p_{n,m+1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Рассмотрим отдельно верхнее поддерево, соответствующее левому верхнему блоку матрицы P. Для этого поставим отражающие экраны в тех точках нижнего поддерева, в которые частица может попасть из корня дерева. Это означает, что вместо того, чтобы идти на нижнее поддерево, частица будет оставаться в корне дерева – состоянии m. Обозначим через I_1 множество, содержащее номера вершин, входящих в верхнее поддерево. Исследуем марковский процесс, протекающий на множестве состояний I_1 при наличии отражающих экранов. Пусть $P^{I_1} = \left\| p_{ij}^{I_1} \right\|$ – матрица переходных вероятностей, $i, j, m \in I_1$.

Очевидно, что

$$p_{ij}^{I_1} = p_{ij}, \qquad i, j \in I_1 \setminus \{m\},$$

$$p_{mm}^{I_1} = 1 - \sum_{i \in I_1 \setminus \{m\}} p_{im}^{I_1}.$$

Согласно теореме Перрона, матрицы P и P^{I_1} имеют максимальное собственное число равное 1 и соответствующие неотрицательные собственные векторы p^* и p^{*I_1}. Если пронормировать эти собственные векторы, то они будут представлять собой финальные распределения марковских процессов, отвечающих фрагментам I_1, I_2.

Лемма. Единичные собственные векторы фрагмента P^{I_1} и матрицы P связаны соотношением

$$p_j^{*I_1} = \alpha\, p_j^*, \quad j \in I_1, \qquad \alpha = 1 \Big/ \sum_{j \in I_1} p_j^*.$$

Доказательство. Покажем, что $p_j^{*I_1}$ есть единичный собственный вектор фрагмента P^{I_1}. При $k \neq m$:

$$\sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = \alpha \sum_{j \in I_1} p_j^* p_{jk}.$$

Поскольку $p_{jk} = 0$ при $j \notin I_1$, $k \in I_1 \setminus m$, то

$$\alpha \sum_{j\in I_1} p_j^* p_{jk} = \sum_{j=1}^{n} p_j^* p_{jk} = \alpha\, p_k^* = p_j^{*I_1}.$$

При $k = m$ имеем $p_{jm}^{I_1} = 1 - \sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} p_{jk}^{I_1}$. Тогда

$$\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jm}^{I_1} = \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1}\left(1 - \sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} p_{jk}^{I_1}\right) = \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} - \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} \sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} p_{jk}^{I_1} =$$

$$= 1 - \sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1}.$$

Как было показано выше при $k \in I_1 \setminus \{m\}$ имеет место равенство

$$\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = p_k^{I_1}.$$

Отсюда следует, что $\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jm}^{I_1} = 1 - \sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} p_k^{*I_1} = p_m^{*I_1}$.

Таким образом, $\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = p_k^{I_1}$, $k \in I_1$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть имеются два фрагмента P^{I_1} и P^{I_2}, $I_1 \bigcup I_2 = \{1, 2, \dots n\}$ с финальными распределениями p^{*I_1} и p^{*I_2} соответственно. Восстановим по ним стационарное распределение всего процесса P в целом.

$$p_i^* = x\, p_i^{*I_1}, \qquad i \in I_1, \tag{2}$$

$$p_i^* = y\, p_i^{*I_1}, \qquad i \in I_2. \tag{3}$$

Поскольку $I_1 \bigcap I_2 = \{m\}$, то

$$x\, p_m^{*I_1} = y\, p_m^{*I_2}.$$

С другой стороны,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^* = \sum_{i\in I_1} p_i^* + \sum_{i\in I_2} p_i^* - p_m^* = x \sum_{i\in I_1} p_i^{*I_1} + y \sum_{i\in I_2} p_i^{*I_2} - x p_m^{*I_1} = x + y - x p_m^{*I_1}.$$

Решая систему уравнений, находим

$$x = \frac{p_m^{*I_2}}{p_m^{*I_1} + p_m^{*I_2} - p_m^{*I_1} p_m^{*I_2}},$$

$$y = \frac{p_m^{*I_1}}{p_m^{*I_1} + p_m^{*I_2} - p_m^{*I_1} p_m^{*I_2}},$$

Отсюда по формулам (2)-(3) можем найти стационарное распределение p^*. Отметим, что для решения этой задачи нам достаточно лишь знания единичных собственных векторов, а не фрагментов полностью.

Если из корня дерева исходит k ребер, то мы можем разбить марковский процесс на k фрагментов $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots P^{I_k}$, $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k = \{1, 2, \ldots n\}$, $I_i \cap I_j = \{m\}$, $i \neq j$, где m – номер корневой вершины графа. Для каждого из фрагментов единичный собственный вектор p^{*I_i} будет иметь вид

$$p_j^{*I_i} = p_j^* \big/ \alpha_i \,, \qquad j \in I_i \,,$$

$$\alpha_i = \sum_{j \in I_i} p_j^* \,, \qquad i = 1, 2, \ldots k \,.$$

Обратно, имея единичные собственные векторы фрагментов $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots P^{I_k}$, можно восстановить единичный собственный вектор всего процесса P. Рассматривая сначала фрагменты P^{I_1} и P^{I_2}, находим единичный собственный вектор $p^{*I_1 \cup I_2}$, соответствующий объединению фрагментов $P^{I_1 \cup I_2}$. Затем из $p^{*I_1 \cup I_2}$ и p^{*I_3} находим собственный вектор $p^{*I_1 \cup I_2 \cup I_3}$ и т.д. Наконец, получим единичный собственный вектор p^* марковского процесса P, описывающего блуждание частицы по всему дереву.

Если в каждом из фрагментов имеется сходимость к финальному распределению за конечный или бесконечный промежуток времени, то и весь процесс будет характеризоваться сходимостью к финальному распределению вероятностей.

1. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Синтез стохастической матрицы по системе ее фрагментов. - Харьков: ХТУРЭ, 1997. - 8 с. - Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97 № 76-Уі 97.
2. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – 432 с.
3. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1985. – 320 с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники.