Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 7
УДК 519.21 в раздел “КИБЕРНЕТИКА”

А.Е. Басманов, В.А. Дикарев, А.А. Родзинский

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА ПО ЕЕ ФРАГМЕНТАМ

1. Построение задачи минимизации. Одним из распространенных способов моделирования физических и экономических систем являются марковские процессы. В работе [1] была решена задача о восстановлении дискретной цепи Маркова по заданной системе ее подматриц (фрагментов). Сформулированные необходимые и достаточные условия такого синтеза основываются на точных значениях переходных вероятностей содержащихся в фрагментах. Однако, в реальных задачах эти величины получены из опытных данных и могут содержать ошибки. Рассмотрим случай, когда условие 1 теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза [1] (условие согласования фрагментов) не выполняется, а условия 2, 3 выполнены. Это может быть, например, в том случае, когда данные фрагментов содержат ошибки, или когда измерения проводятся в различные моменты времени. В такой ситуации будем искать матрицу P, которая бы в некотором смысле минимально отклонялась от своих фрагментов.

Найдем k-ую строку матрицы P. В дальнейшем будем опускать индекс строки k и обозначать $x_j = p_{kj}$ - искомые элементы k-ой строки матрицы P; $p_j^{I_i} = p_{kj}^{I_i}$ - заданные элементы k-ой строки фрагмента P^{I_i}.

Введем множества $B_{kj} = \{i : k, j \in I_i, 1 \le i \le m\}$. Каждое из них содержит номера тех множеств I_i, которые включают в себя индексы k, j одновременно. Условие 2 теоремы из [1] эквивалентно тому, что $B_{kj} \ne \varnothing$ для любых $k , j \in I_\Sigma$.

Если бы условие согласования выполнялось, то элементы k-ой строки i-го фрагмента были бы пропорциональны соответствующим элементам k-ой строки исходной матрицы:

$$x_j = \beta_i p_j^{I_i}, \qquad i \in B_{kj}, \qquad j = 1, 2, \ldots n.$$

Будем искать такие x_j, сумма квадратов отклонений которых от величин $\beta_i p_j^{I_i}$ была бы минимальной. Это приводит к задаче минимизации:

$$y(x,\beta) = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i} \left(x_j - \beta_i p_j^{I_i} \right)^2 \to \min_{x,\beta} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in I_i} x_j = \beta_i, \qquad i \in B_{kj}, \qquad (3)$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots n. \qquad (4)$$

Целевая функция (1) при ограничениях (2)-(3) имеет единственный и притом глобальный минимум. Функция (1) неотрицательна при любом значении x_j. Очевидно, что в случае, когда условие согласования выполнено, решение задачи минимизации x* будет совпадать с решением x**, найденным по методу, приведенному в доказательстве теоремы. Действительно, x** обращает целевую функцию (8) в 0, являющийся, в силу свойств целевой функции, глобальным минимумом.

Для нахождения оптимального решения задачи квадратичного программирования будем применять дифференциальный алгоритм [2, 3].

Пусть x_q - зависимая переменная, а x_r - независимые (r = 1, 2, ... q-1, q+1, ... n). Тогда из (2) имеем $x_q = 1 - \sum_{r \neq q} x_r$.

Запишем частные производные от минимизируемой функции y(x,β) по независимым переменным x_r, рассматривая их как производные сложной функции y (x,

x_q (x), β (x)), где x = (x_1, ... x_{q-1}, x_{q+1}, ... x_n) - вектор независимых переменных.

$$\delta y / \delta x_r = \partial y / \partial x_r + \sum_{i=1}^{m} (\partial y / \partial \beta_i)(\partial \beta_i / \partial x_r) + (\partial y / \partial x_q)(\partial x_q / \partial x_r) =$$

$$= \partial y / \partial x_r + \sum_{i \in Bkr} \partial y / \partial \beta_i - \partial y / \partial x_q, \quad r \neq q \tag{5}$$

Аналогично, можно получить соотношение для второй производной:

$$\delta^2 y / \delta x_r^2 = 2|Bkr| - 2 \sum_{i \in Bkr} \left[2 p_r^{Ii} - \sum_{j \in I_i} \left(p_j^{Ii} \right)^2 \right] + 4 \sum_{i \in Bkr} p_q^{Ii} + 2|Bkq|, \qquad r \neq q. \tag{6}$$

В [2] показано, что необходимым условием минимума для задачи (1)-(4) является равенство нулю условных производных по положительным независимым переменным (5) и неотрицательность условных производных (6) по нулевым независимым переменным (условие Куна-Таккера). Кроме того, ввиду выпуклости целевой функции и области ограничений, для всякого допустимого решения необходимые условия будут также и достаточными. Это означает, что если выполнено условие Куна-Такера и $x_q \geq 0$, то полученное решение x является оптимальным. Полученная задача минимизации может быть решена методами квадрптичного программирования [2, 3].

2. Наблюдения фрагментов в различные моменты времени. Пусть имеются данные о наблюдениях за фрагментами, полученные в различные моменты времени:

$$P^{I_1}(t_1), P^{I_2}(t_2), \ldots, P^{I_m}(t_m).$$

Для нахождения синтезируемой матрицы в момент времени t, близкий к t_1, t_2, ..., t_m, можно воспользоваться решением задачи минимизации с целью устранения рассогласования данных о фрагментах. Сформулируем эту задачу так, чтобы вес каждого фрагмента был тем больше, чем ближе момент его измерения t_k к моменту прогнозирования t. Для этого в задачу минимизации введем коэффициент a(t-t_i):

$$y(x,\beta) = \sum_{i\in B_k}\sum_{j\in I_i}\left(x_j - a(t-t_i)\beta_i p_j^{I_i}\right)^2 \to \min_{x,\beta},$$

где $\sum\limits_{i\in B_k} a(t-t_i) = 1,$

a(s) - четная неотрицательная функция, достигающая максимума при s = 0, монотонно убывающая на интервале (0, ∞).

Описанный выше подход позволяет учесть и те ситуации, когда t совпадает с одним из моментов t_1, t_2, ... t_m. Таким образом, можно оценить синтезируемую матрицу на отрезке времени [t_{min}, t_{max}], где $t_{min} = \min\{t_1, \ldots t_m\}$, $t_{max} = \max\{t_1, \ldots t_m\}$. Указанный подход допускает наличие ошибок измерений и не требует на этот случай никакой модификации.

1. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Синтез стохастической матрицы по системе ее фрагментов. - Харьков: ХТУРЭ, 1997. - 8 с. - Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97 № 76-Уі 97.
2. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. - М.: Наука, 1975. - 272 с.
3. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Фёдоров В.В.* Курс методов оптимизации. - М.: Наука, 1986. - 382 с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники.