Сборник Автоматизированные системы управления. ХТУРЭ. – 1998. – № 107

УДК 519.21

# ПРИЛОЖЕНИЕ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССАМ

*БАСМАНОВ А.Е., ДИКАРЕВ В.А., РОДЗИНСКИЙ А.А.*
(*Системы и процессы управления*)

В работе исследуется разбиение неоднородного марковского процесса на фрагменты. Поставлена и решена задача о синтезе стохастической матрицы марковского процесса по стохастическим матрицам его фрагментов. Найдены необходимые и достаточные условия такого синтеза. Предложена вычислительная процедура, реализующая синтез процесса по его фрагментам.

## 1. Разбиение процесса на фрагменты

При исследовании физических и экономических процессов в качестве математической модели часто используются марковские процессы. При анализе такой модели возникает задача о разбиении всей системы на некоторые фрагменты. В ряде случаев это упрощает анализ. С математической точки зрения каждому фрагменту соответствует стохастическая матрица [3]. При этом переходные вероятности марковского процесса соответствуют параметрам, характеризующим рассматриваемую систему.

Пусть дана стохастическая матрица P (s, t), размерности $n \times n$ [3], соответствующая некоторому марковскому процессу. В дальнейшем будем опускать зависимость матрицы от времени и обозначать её P. Рассмотрим событие B, состоящее в том, что в момент времени t процесс будет находиться в классе состояний 1, 2, ... n-1:

$$B = (x(t) \in \{1...n-1\}).$$

Будем предполагать, что P (B) > 0. Это позволяет ввести на пространстве $<\Omega, F, P>$ условные вероятности $P_B(A) = P(A/B) \quad \forall\, A \in F$ и, тем самым, перейти к пространству $<\Omega, F, P_B>$ [2].

Введём следующие обозначения. Пусть I = {1, 2, ... n} - множество индексов. Под матрицей $P^{I_1}$ будем понимать стохастическую матрицу, полученную из исходной стохастической матрицы P путём выбрасывания тех строк и столбцов, индексы которых не содержатся в $I_1$, с последующим делением оставшихся элементов строки на их сумму. Это эквивалентно рассмотрению условных вероятностей того, что процесс остаётся во множестве состояний $I_1$.

Исследуем, возможно ли обратное - по заданной системе фрагментов восстановить исходную стохастическую матрицу P.

## 2. Необходимые и достаточные условия синтеза

Пусть даны множества состояний $I_1$, $I_2$, ... $I_m$. Обозначим $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$. Введём множество

$$B_k = \{i: k \in I_i,\ 1 \le i \le m\}. \qquad (1)$$

В это множество включены номера тех фрагментов, которые содержат состояние k.

В [1] показано, что если $\forall\, i, j \in I_\Sigma\ \exists\, k: i, j \in I_k$, $1 \le k \le m$ и, кроме того, $I_i \ne I_S$, i = 1, 2, ... m, то каждое из множеств $B_k$ содержит не менее двух элементов.

Пусть $A_k$ - собственное подмножество множества $B_k$:

$$A_k \subset B_k, \qquad A_k \ne B_k, \qquad A_k \ne \varnothing. \qquad (2)$$

При сделанных предположениях оно существует.

Обозначим
$$M_{A_k} = \left( \bigcup_{i \in A_k} I_i \right) \cap \left( \bigcup_{i \in A_k \setminus B_k} I_i \right). \qquad (3)$$

Если выполнено (2), то в каждом из объединений имеются множества, содержащие, по крайней мере, индекс k. Значит, $k \in M_{A_k}$.

Найдём необходимые и достаточные условия того, что по фрагментам $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$, возможен синтез матрицы $P^{I_\Sigma}$, где $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$.

Будем предполагать, что $I_i \ne I_\Sigma$, i = 1, 2, ... m, в противном случае задача окажется уже решённой.

Теорема. Пусть $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$. Для того, чтобы по фрагментам $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$ можно было произвести синтез матрицы $P^{I_\Sigma}$, необходимо и достаточно, чтобы

1) для любых двух пересекающихся фрагментов выполнялось условие согласования;

2) для любой пары индексов $i, j \in I_\Sigma$ существовало множество $I_k$ из совокупности $I_1$, $I_2$, ... $I_m$, содержащее эти индексы одновременно, т.е. $\forall\, i, j \in I_\Sigma\ \exists\, k: i, j \in I_k$, $1 \le k \le m$;

3) $\forall\, k \in I_\Sigma \quad \forall\, A_k \subset B_k \quad \exists\, j \in M_{A_k} \quad p_{kj}^{I_r} > 0,\ r \in B_k$, где $A_k$, $B_k$ определены в (1)-(2).

Доказательство.

Необходимость.

1) Необходимость первого условия очевидна [1].

2) Условие 2 докажем от противного.

Предположим, что $\exists\, r, s \in I_\Sigma \quad \forall\, I_k \quad r \notin I_k \vee s \notin I_k$.

Обозначим $I_0 = \{r, s\}$. Введём произвольную стохастическую матрицу
$$P^{I_0} = \begin{pmatrix} p_{rr}^{I_0} & p_{rs}^{I_0} \\ p_{sr}^{I_0} & p_{ss}^{I_0} \end{pmatrix}$$

Условие согласования выполнено для любого фрагмента $P^{I_0}$, т.к. пересечение $I_0$ с любым другим множеством из набора $I_1$, $I_2$, ... $I_m$ будет содержать не более одного элемента [1]. С другой стороны, фиксированной матрице $P^{I_\Sigma}$ соответствует единственная матрица $P^{I_0}$. Значит, предположение неверно, и условие 2 теоремы является необходимым.

3) Условие 3 также докажем от противного. Предположим, синтез произвести можно, но условие 3 не выполнено, т.е.

$$\exists\, k \in I_\Sigma \quad \exists\, A_k \subset B_k \quad \forall\, j \in M_{A_k} \qquad r \in B_k.$$

Обозначим $M = \bigcup\limits_{i \in A_k} I_i$, $N = \bigcup\limits_{i \in B_k \setminus A_k} I_i$, $M \cap N = M_{A_k}$.

Тогда элементы k-ой строки матрицы $P^{I_\Sigma}$ имеют вид:

$$p_{kj}^{I_\Sigma} = \alpha p_{kj}^{M}, \qquad j \in M,$$

$$p_{kj}^{I_\Sigma} = (1-\alpha) p_{kj}^{N}, \qquad j \in N,$$

где $\alpha$ - любое число из [0; 1]. Таким образом, однозначно определить k-ую строку матрицы $P^{I_\Sigma}$ не удаётся. Полученное противоречие доказывает необходимость 3-го условия.

Достаточность.

Найдём k-ую строку матрицы $P^{I_\Sigma}$. Множество $B_k$, ввиду условия 2 теоремы, содержит не менее двух элементов. Возьмём $r \in B_k$ и рассмотрим множество

$$M_1 = I_r \cap \left( \bigcup\limits_{i \in B_k \setminus \{r\}} I_i \right).$$

Согласно условию 3, существует $p_{kj}^{I_s} > 0$, $j \in M_1$, $s \in B_k \setminus \{r\}$. Поскольку $k \in I_r \cap I_s$, то мы можем определить k-ую строку матрицы $P^{I_r \cup I_s}$.

Если $I_r \cup I_s \neq I_\Sigma$, то {r, s} является собственным подмножеством множества $B_k$, так как $\exists\ j \in I_\Sigma \setminus (I_r \cup I_s)$ и, в силу условия 2, $\exists\ I_t$: $k, j \in I_t$. Тогда $t \in B_k$, $t \neq r$, $t \neq s$.

Рассмотрим множество

$$M_2 = (I_r \cup I_s) \cap \left( \bigcup\limits_{i \in B_k \setminus \{r\}} I_i \right).$$

Согласно условию 3, существует $p_{kj}^{I_q} > 0$, $j \in M_2$, $q \in B_k \setminus \{r, s\}$. Поскольку $k \in (I_r \cup I_s) \cap I_q$, то мы можем определить k-ую строку матрицы $P^{I_r \cap I_s \cap I_q}$.

Продолжаем эти действия до тех пор, пока не окажется, что $I_r \cup I_s \ldots = I_\Sigma$. Это будет означать, что мы полностью нашли k-ую строку матрицы $P^{I_\Sigma}$. Аналогичным образом найдём и другие строки.

**3. Процесс со счетным числом состояний**

Будем предполагать, что фрагменты могут содержать счетное число состояний, и что для каждой строки сумма ряда из ее элементов равна 1. Если выполнены все условия теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза, то мы можем провести синтез всей матрицы (возможно, за счетное число шагов), применяя алгоритм, описанный выше. При этом конечный фрагмент мы можем получить за конечное число шагов.

Последовательность элементов, стоящих на одном и том же месте "расширяющихся" фрагментов (последовательность $p_{ij}^{I_1}, p_{ij}^{I_1 \cup I_2}, \ldots$) всегда сходится к некоторому пределу $p_{ij}^{\infty}$, т.к. эта последовательность монотонно не возрастает (при синтезе элементы не возрастают) и ограничена снизу ($p_{ij} \geq 0$).

Если в i-ой строке существует конечное или бесконечное множество элементов, сходящихся к положительным пределам

$$p_{ij}^{I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m} \xrightarrow[m \to \infty]{} p_{ij}^{\infty}$$

$$\sum_{j:\, p_{ij}^{\infty} > 0} p_{ij}^{\infty} = 1,$$

то строка может быть восстановлена полностью. В противном случае, могут быть найдены только те элементы, пределы которых положительны. При этом утрачивается смысл стохастичности матрицы. Заметим, что если состояние i содержится лишь в конечном числе фрагментов, то i-я строка синтезируемой матрицы будет полностью восстановлена за конечное число шагов, а сумма ее элементов будет равна 1.

**Литература:** 1. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Синтез стохастической матрицы по системе её фрагментов. - Харьков: ХТУРЭ, 1997. - 8 с. - Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97 № 76-Уі 97. 2. *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1972. - 288 с. 3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 548 с.

Поступила в редколлегию 00.00.00

Сведения об авторах: **Басманов Алексей Евгеньевич**, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ, научная специальность - Вычислительная математика. **Дикарев Вадим Анатольевич**, д. ф.-м. н., профессор каф. ПМ ХТУРЭ. **Родзинский Анатолий Анатольевич**, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ, научная специальность - Математическое моделирование и вычислительные методы.

УДК 519.21

**Приложение условных вероятностей к марковским процессам** / А.Е. Басманов, В.А. Дикарев, А.А. Родзинский // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 00. С. 000-000.

Исследуется один из возможных подходов к разбиению марковского процесса на фрагменты, основанный на введении условных переходных вероятностей процесса. Поставлена и решена задача о восстановлении стохастической матрицы марковского процесса по стохастическим матрицам его фрагментов.

Библиогр.: 3 назв.

UDC 519.21

Application the conditional probabilities to the Markov's processes / A.E. Basmanov, V.A. Dikarev, A.A. Rodzinsky // Radioelectronica i informatika. 1998. № 00. P. 00-00.

There one of the methods of spliting the Markov's process is investigated. This approaching is based on conditional transitive probabilities. Problem of the sinthesis fragments' stohastic matrixes to the stohastic matrix of the Markov's process is solved and presented in the work.

Ref.: 3 items.