Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97. № 76-Уі97

СИНТЕЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ПО СИСТЕМЕ ЕЁ ФРАГМЕНТОВ

Басманов А.Е., Дикарев В.А.

В работе поставлена и решена задача о синтезе (восстановлении) стохастической матрицы по заданному набору её подматриц - фрагментов. Приведены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых указанный синтез возможен. Кроме того, описана вычислительная процедура, позволяющая произвести синтез стохастической матрицы по системе её фрагментов.

Пусть дана стохастическая матрица **P** (s, t), размерности $n \times n$ [2], соответствующая некоторому марковскому процессу. В дальнейшем будем опускать зависимость матрицы от времени и обозначать её **P**. Рассмотрим событие B, состоящее в том, что в момент времени t процесс будет находиться в классе состояний 1, 2, ... n-1: $B = (x(t) \in \{1...n-1\})$. Будем предполагать, что $P(B) > 0$. Это позволяет ввести на пространстве $<\Omega, F, P>$ условные вероятности $P_B(A) = P(A / B) \ \ \forall A \in F$ и, тем самым, перейти к пространству $<\Omega, F, P_B>$ [1].

Тогда условные переходные вероятности примут вид:

$$P_B(x(t) = j / x(t-1) = i) = P(x(t) = j / B, x(t-1) = i) =$$

$$= \frac{P(x(t) = j, B, x(t-1) = i)}{P(B, x(t-1) = i)} = \frac{P(x(t) = j, x(t-1) = i)}{P(x(t-1) = i)\, P(B / x(t-1) = i)} =$$

$$= \frac{P(x(t) = j / x(t-1) = x_i)}{P(B / x(t-1) = i)} = p_{ij} \Big/ \sum_{k=1}^{n-1} p_{ik}, \qquad i, j = 1, 2, \dots n-1.$$

Таким образом, мы можем построить стохастическую матрицу **P'**, размерности $(n-1)\times(n-1)$, которая получена из исходной выбрасыванием состояния n. Аналогично, можно выбрасывать любое состояние k, $1 \le k \le n$, или группу состояний.

Введём следующие обозначения. Пусть $I = \{1, 2, \dots n\}$ - множество индексов. Под матрицей $\mathbf{P}^{I_1}$ будем понимать стохастическую матрицу, полученную из исходной стохастической матрицы **P** путём выбрасывания тех строк и столбцов, индексы которых не содержатся в I_1, с последующим делением оставшихся элементов строки на их сумму.

Исследуем, возможно ли обратное - по заданной системе фрагментов восстановить исходную стохастическую матрицу **P**.

Для решения задачи о синтезе стохастической матрицы по её фрагментам, рассмоторим сначала объединение двух фрагментов, а затем обобщим полученные результаты и установим необходимые и достаточные условия указанного синтеза. Пусть даны два фрагмента $\mathbf{P}^{I_1}$ и $\mathbf{P}^{I_2}$, $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$. Предположим, что

$I_1 \cap I_2 = I_0 \neq \varnothing$,

$I_1 \cup I_2 = I$.

В таком случае мы можем вычислить элементы строк матрицы **P**, имеющие номера из множества I_0. Покажем, как это можно сделать.

Для каждой строки $i \in I_0$ обозначим

$$S_{1i} = \sum_{j \in I_1 \setminus I_0} p_{ij} ,$$

$$S_{2i} = \sum_{j \in I_2 \setminus I_0} p_{ij} ,$$

$$S'_{1i} = \sum_{j \in I_1 \setminus I_0} p^{I_1}_{ij} , \qquad (1)$$

$$S'_{2i} = \sum_{j \in I_2 \setminus I_0} p^{I_2}_{ij} . \qquad (2)$$

Поскольку $p^{I_1}_{ij} = p_{ij} / (1 - S_{2i}), \quad j \in I_1, \qquad (3)$

$p^{I_2}_{ij} = p_{ij} / (1 - S_{1i}), \quad j \in I_2, \qquad (4)$

то, просуммировав обе части равенств, в первом случае по $j \in I_1 \setminus I_0$, а во втором по $j \in I_2 \setminus I_0$, получим систему:

$S'_{1i} = S_{1i} / (1 - S_{2i})$,

$S'_{2i} = S_{2i} / (1 - S_{1i})$.

Решив её, найдём

$$S_{1i} = S'_{1i} \frac{1 - S'_{2i}}{1 - S'_{1i} S'_{2i}},$$

$$S_{2i} = S'_{2i} \frac{1 - S'_{1i}}{1 - S'_{1i} S'_{2i}},$$

Тогда из (3) - (4) находим

$$p_{ij} = p^{I_1}{}_{ij} \frac{1 - S'_{2i}}{1 - S'_{1i} S'_{2i}}, \qquad i \in I_0, j \in I_1, \tag{5}$$

$$p_{ij} = p^{I_2}{}_{ij} \frac{1 - S'_{1i}}{1 - S'_{1i} S'_{2i}}, \qquad i \in I_0, j \in I_2, \tag{6}$$

где S'_{1i}, S'_{2i} определены в (1) - (2).

Таким образом, по формулам (5) - (6) можно вычислить элементы строк I_0 матрицы **P**.

Замечание 1. Для элементов p_{ij}, $i \in I_0$, $j \in I_0$, формулы (5)-(6) должны давать одинаковый результат, т.е. матрицы $\mathbf{P}^{I_1}$ и $\mathbf{P}^{I_2}$ не являются независимыми:

$$p^{I_1}{}_{ij} (1 - S'_{2i}) = p^{I_2}{}_{ij} (1 - S'_{1i}), \qquad i \in I_0, j \in I_0. \tag{7}$$

Это означает, что ij-й элемент достаточно задать только в одной из фрагментов $\mathbf{P}^{I_1}$, $\mathbf{P}^{I_2}$, $i \in I_0$, $j \in I_0$ (блоки $I_0 \times I_0$ матриц $\mathbf{P}^{I_1}$ и $\mathbf{P}^{I_2}$ могут быть известны не полностью). Фрагменты $\mathbf{P}^{I_1}$ и $\mathbf{P}^{I_2}$ будут независимы тогда и только тогда, когда множество $I_0 = I_1 \cap I_2$ содержит всего один элемент. В этом случае условие согласования (7) будет всегда выполнено.

Замечание 2. В определении элементов строк I_0 матрицы **P** участвовали только элементы строк I_0 фрагментов $\mathbf{P}^{I_1}$ и $\mathbf{P}^{I_2}$, причём для нахождения i-ой строки матрицы **P** используются элементы той же строки матриц $\mathbf{P}^{I_1}$ и $\mathbf{P}^{I_2}$.

Замечание 3. Кроме того, если $I_1 \cup I_2 = I_3 \neq I$, то, проведя аналогичные рассуждения, по формулам (5)-(6) найдём элементы строк I_0 матрицы $\mathbf{P}^{I_3}$.

Очевидно, что если $I_2 \subset I_1$, то по матрице $\mathbf{P}^{I_1}$ можно найти $\mathbf{P}^{I_2}$.

Пусть даны множества состояний I_1, I_2, ... I_m. Обозначим $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_m$.

Введём множество

$$B_k = \{i: k \in I_i,\ 1 \le i \le m\}. \qquad (8)$$

В этом множестве содержатся номера i тех множеств I_i, которые включают в себя индекс k (то есть номера тех фрагментов, которые содержат состояние k).

Лемма. Если $\forall\ i, j \in I_\Sigma\ \exists\ k: i, j \in I_k$, $1 \le k \le m$ и, кроме того, $I_i \ne I_S$, $i = 1, 2, \dots m$, то каждое из множеств B_k содержит не менее двух элементов.

Доказательство.

B_k содержит по-крайней мере 1 элемент $r\ \exists\ k \in I_r$. Так как $I_r \ne I_\Sigma$, то

$\exists\ j \in I_\Sigma \setminus I_r\ \ \exists\ s : j, k \in I_S$.

Значит, множество B_k содержит ещё и элемент s. Лемма доказана.

Пусть A_k - собственное подмножество множества B_k:

$$A_k \subset B_k, \qquad A_k \ne B_k, \qquad A_k \ne \varnothing. \qquad (9)$$

При сделанных в лемме предположениях оно существует. Обозначим

$$M_{Ak} = \Big(\bigcup_{i \in A_k} I_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{i \in B_k \setminus A_k} I_i\Big). \qquad (10)$$

Из определения следует, что $k \in M_{Ak}$. Действительно, если выполнено (2.9), то в каждом из объединений содержаться множества, содержащие, по крайней мере, индекс k.

Найдём необходимые и достаточные условия того, что по фрагментам $\mathbf{P}^{I_1}$, $\mathbf{P}^{I_2}$, ... $\mathbf{P}^{I_m}$, можно произвести синтез матрицы $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$, где

$$I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m.$$

Будем предполагать, что $I_i \ne I_\Sigma$, $i = 1, 2, \dots m$, в противном случае задача окажется уже решённой.

Теорема. Пусть $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m = I_\Sigma$. Для того, чтобы по фрагментам $\mathbf{P}^{I_1}$, $\mathbf{P}^{I_2}$, ... $\mathbf{P}^{I_m}$, можно произвести синтез матрицы $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$, необходимо и достаточно, чтобы

1) для любых двух пересекающихся фрагментов выполнялось условие согласования (7);

2) для любой пары индексов $i, j \in I_\Sigma$ существовало множество I_k из совокупности I_1, I_2, ... I_m, содержащее эти индексы одновременно, т.е. $\forall\ i, j \in I_\Sigma\ \exists\ k: i, j \in I_k$, $1 \le k \le m$;

3) $\forall\ k \in I_\Sigma\ \ \forall\ A_k \subset B_k\ \ \exists\ j \in M_{A_k}\ \ p^{I_r}{}_{kj} > 0,\ r \in B_k$, где A_k, B_k определены в (8)-(10).

Доказательство.

Необходимость.

1) Необходимость первого условия очевидна.

2) Условие 2 докажем от противного. Предположим, что $\exists\ r, s \in I_\Sigma\ \ \forall\ I_k\ \ r \notin I_k \vee s \notin I_k$. Обозначим $I_0 = \{r, s\}$.

Введём произвольную стохастическую матрицу

$$\mathbf{P}^{I_o} = \begin{vmatrix} p^{I_o}{}_{rr} & p^{I_o}{}_{rr} \\ & \\ p^{I_o}{}_{rr} & p^{I_o}{}_{rr} \end{vmatrix}$$

Условие согласования выполнено для любого фрагмента $\mathbf{P}^{I_o}$, т.к. пересечение I_o с любым другим множеством из набора I_1, I_2, ... I_m будет содержать не более одного элемента. С другой стороны, фиксированной матрице $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$ соответствует единственная матрица $\mathbf{P}^{I_o}$. Значит, предположение неверно, и условие 2 теоремы является необходимым.

3) Условие 3 докажем от противного. Предположим, синтез произвести можно, но условие 3 не выполнено, т.е.

$$\exists\ k \in I_\Sigma\ \ \exists\ A_k \subset B_k\ \ \forall\ j \in M_{A_k}\ \ p^{I_r}{}_{kj} = 0,\ r \in B_k .$$

Обозначим $M = \bigcup\limits_{i \in A_k} I_i$, $N = \bigcup\limits_{i \in B_k \setminus A_k} I_i$, $M \cap N = M_{A_k}$.

Тогда элементы k-ой строки матрицы $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$ имеют вид:

$$p^{I_\Sigma}{}_{kj} = \alpha\, p^{M}{}_{kj} , \qquad j \in M,$$

$$p^{I_\Sigma}{}_{kj} = (1-\alpha)\, p^{N}{}_{kj} , \qquad j \in N,$$

где α - любое число из [0; 1]. Таким образом, однозначно определить k-ую строку матрицы $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$ не удаётся. Полученное противоречие доказывает необходимость 3-го условия.

Достаточность.

Найдём k-ую строку матрицы $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$. Множество B_k, ввиду условия 2 теоремы и леммы, содержит не менее двух элементов. Возьмём $r \in B_k$ и рассмотрим множество

$$M_1 = I_r \cap \Big(\bigcup\limits_{i \in B_k \setminus \{ r \}} I_i\Big) .$$

Согласно условию 3, существует $p^{I_s}_{kj} > 0$, $j \in M_1$, $s \in B_k \setminus \{ r \}$.

Поскольку $k \in I_r \cap I_s$, то мы можем определить k-ую строку матрицы $\mathbf{P}^{I_r \cup I_s}$ по формулам (5)-(6).

Если $I_r \cup I_s \neq I_\Sigma$, то $\{r, s\}$ является собственным подмножеством множества B_k, так как $\exists\ j \in I_\Sigma \setminus (I_r \cup I_s)$ и, в силу условия 2, $\exists\ I_t$: $k, j \in I_t$. Тогда $t \in B_k$, $t \neq r$, $t \neq s$.

Рассмотрим множество

$$M_2 = (I_r \cup I_s) \cap \Big(\bigcup_{i \in B_k \setminus \{r\,,\, s\}} I_i \Big) .$$

Согласно условию 3, существует $p^{I_q}_{kj} > 0$, $j \in M_2$, $q \in B_k \setminus \{r, s\}$.

Поскольку $k \in (I_r \cup I_s) \cap I_q$, то мы можем определить k-ую строку матрицы $\mathbf{P}^{I_r \cup I_s \cup I_q}$ по формулам (5)-(6).

Продолжаем эти действия до тех пор, пока не окажется, что $I_r \cup I_s \cup \ldots = I_\Sigma$. Это будет означать, что мы полностью нашли k-ую строку матрицы $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$. Аналогичным образом найдём и другие строки.

Условие 2 теоремы говорит о том, что каждый ij-й элемент должен присутствовать хотя бы в одном из фрагментов $\mathbf{P}^{I_1}$, $\mathbf{P}^{I_2}$, ... $\mathbf{P}^{I_m}$. Условие 3 теоремы связано с тем, что при пересечении фрагментов не все элементы из пересечения будут равны нулю.

Доказательство достаточности даёт метод синтеза матрицы $\mathbf{P}^{I_\Sigma}$ по её фрагментам.

Следствие. Для того, чтобы по фрагментам $\mathbf{P}^{I_1}$, $\mathbf{P}^{I_2}$, ... $\mathbf{P}^{I_m}$ можно было произвести синтез матрицы **P**, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись все условия доказанной выше теоремы и $I_\Sigma = \{1, 2, \ldots n\}$.

Литература

1. Боровков А.А. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1972. - 288 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 548 с.

3. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: Учебник для вузов. - М.: Наука, 1985. - 320 с.