ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Басманов Олексій Євгенович

УДК 519.21

Методи синтезу марковських процесів та їх застосування

Спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2001

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Харківському державному технічному університеті радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України.

Науковий керівник	доктор фізико-математичних наук, професор Дікарєв Вадим Анатолійович, Харківський державний технічний університет радіоелектроніки, професор кафедри прикладної математики.
Офіційні опоненти:	доктор технічних наук, професор Кривуля Геннадій Федорович, Харківський державний технічний університет радіоелектроніки, завідувач кафедри автоматизації проектування обчислювальної техніки;
	доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Новожилова Марина Володимирівна, Харківський державний технічний університет будівництва та архітектури, професор кафедри економічної кібернетики й інформатики.
Провідна установа	Національний технічний університет України "КПІ", м. Київ.

Захист відбудеться "____" _______________ 2001 р. о   годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 у Харківському державному технічному університеті радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Леніна, 14.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці університету за адресою: 61166, м. Харків, пр. Леніна, 14.

Автореферат розіслано "____" _______________ 2001 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради   Безкоровайний В.В.

Підписано до друку 7.03.2001 р.

Формат 60x84 1/16.

Умов. друк. арк. 1,2. Облік. вид. арк. 1,1.

Зам. № ________ Тираж 100 прим.

Надруковано в ТОВ "Яна".

61166, м. Харків, пр. Леніна, 38.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Чимало процесів, що розглядаються у різних областях науки і техніки, належить до числа марковських. У зв'язку з цим вивчення такого типу процесів і, зокрема, розробка методів синтезу марковських процесів за їх окремими частинами (фрагментами) є важливою задачею з точки зору застосувань. Це стосується і технологічних процесів із марковськими властивостями, у тому числі і дифузійних процесів, що досліджуються в роботі. Загальна теорія марковських процесів була розроблена в працях А.А. Маркова, А.М. Колмогорова, Є.Б. Динкіна, А.В. Скорохода, В. Феллера та ін. Важливі результати з теорії неоднорідних марковських процесів були отримані В.В. Анісімовим, К.Г. Валеєвим, Р.Л. Добрушиним, С.Б. Кузнецовим, А.І. Зейфманом, І.М. Соніним, Д.В. Сенченко.

У дисертаційній роботі розглядаються питання, пов'язані з повним або частковим відновленням неоднорідного марковського процесу за його окремими фрагментами. Актуальним напрямком теорії неоднорідних марковських процесів є визначення умов, за яких здійснюється стабілізація процесу. Один із способів стабілізації – надання сильних спрямованих впливів на окремі фрагменти процесу. Умови, за виконанням яких має місце така стабілізація, докладно розглянуті в працях В.А. Дікарєва.

Одним із найважливіших методів хімічної технології є екстракція (або витяжка) – дифузійний процес, що є процесом поділу суміші твердих або рідких речовин за допомогою розчинників із високою вибірковістю. Фізичною сутністю екстракції є перехід потрібної компоненти з рідкої або твердої фази у рідку фазу екстрагенту при їх взаємному контакті. Прикладом екстракції може слугувати настоювання лікарських трав, коли лікарські речовини з твердої фази переходять у розчин. У цукровій промисловості, впливаючи на суміш води і дрібно нарізаної стружки цукрового буряку, домагаються переходу цукрового соку зі стружки у воду. Екстракційні процеси також знаходять своє застосування в харчовій та хімічній промисловостях. На частку екстракції припадає близько 20% усіх витрат хімічної промисловості.

У зв'язку з задачами інтенсифікації, оптимізації й автоматизації виробничих процесів виникає гостра необхідність у розробці методів розрахунку екстракційних процесів, встановлення фізичної сутності й основних закономірностей їх протікання. Теоретичні основи процесу екстракції були закладені П.М. Сіліним, П.В. Головіним, А.А. Кіровим, С.Ф. Дроновим, С.Ф. Жигаловим.

Подальший розвиток теорії потребує вивчення кінетики процесу, розробки методів розрахунку, що дають можливість оптимізувати процес, ставити і розв'язувати задачу його інтенсифікації. У зв'язку з цим на перший план висуваються питання математичного описання екстракційного процесу, створення математичних моделей, достатньо точно відтворюючих його фізичну картину, усю складність взаємозв'язків між його параметрами.

Виходячи із згаданого вище, тему дисертаційної роботи можна вважати актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась згідно з планом науково-технічних робіт Харківського державного технічного університету радіоелектроніки в рамках держбюджетних тем: 443-1 "Синтез алгоритмів керування процесами стабілізації в економічних і технічних системах без післядії" (№ ДР 0196U011360) та 511(320) "Розробка математичних методів аналізу швидкоплинних електродинамічних процесів з метою ідентифікації їх характеристик" (№ ДР 0197U014162). Здобувач приймав участь у роботі як виконавець.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розробка методів синтезу марковських процесів, що дозволяють моделювати системи марковського типу у випадку, коли доступною є лише інформація про окремі частини системи (фрагменти марківського процесу).

Досягнення цієї мети потребує вирішення таких задач:

1) розробка методів відновлення (повного або часткового) перехідних імовірностей марковського процесу за перехідними ймовірностями його окремих фрагментів;

2) розробка технології оцінювання стохастичної матриці марковського процесу у випадку, коли фрагменти містять деякі випадкові помилки;

3) побудова алгоритмів стабілізації розподілу ймовірностей неоднорідного марковського процесу в околі заданої функції часу;

4) розробка методів апроксимації дифузійних процесів за допомогою марковських процесів із неперервним часом і кінцевою множиною станів.

Об'єктом дослідження є марковські й, зокрема, дифузійні процеси.

Предметом дослідження є методи синтезу і фокусування розподілів імовірностей неоднорідних марковських процесів.

Методи дослідження. У роботі сполучаються аналітичні, статистичні і чисельні методи досліджень. Методи квадратичного програмування використовуються для розв'язання задачі мінімізації з квадратичною функцією мети і лінійними обмеженнями, що виникають при побудові оцінки матриці перехідних імовірностей марковського процесу. Критерій χ^2 був застосований для перевірки гіпотези про достовірність синтезованої перехідної матриці при наявності випадкових помилок у фрагментах. Для знаходження розподілу ймовірностей неоднорідного марковського процесу із системи диференціальних рівнянь Колмогорова був використаний неявний метод трапецій і неявний метод прямокутників. Метод сіток застосовано для чисельного рішення диференціального рівняння дифузії.

Наукова новизна одержаних результатів. Вперше запропоновано метод синтезу марковського процесу зі скінченою або рахованою множиною станів за його фрагментами. Уточнено один із результатів, що стосується неоднорідних марковських систем, яким притаманні властивості фокусування і σ-фокусування – запропонована оцінка σ-околу при фокусуванні фінальних імовірностей на заданий розподіл. Удосконалено метод локалізації ймовірностей станів марковського процесу у смузі будь-якої малої ширини – запропоновано підхід, що дозволяє розв'язати цю задачу за допомогою процесу, інфінітезимальна матриця якого мінімально відхиляється від інфінітезимальної матриці вихідного процесу. Подальший розвиток одержав метод апроксимації дифузійних процесів за допомогою марковських процесів із кінцевою множиною станів і неперервним часом. Побудовано марковський процес, що апроксимує вихідний дифузійний процес та володіє тими ж граничними властивостями.

Практичне значення одержаних результатів. Усі розроблені в дисертації методи і алгоритми реалізовано у вигляді програмних продуктів у середовищі Delphi із зручним інтерфейсом. Отримані результати можуть бути використані для моделювання та аналізу складних систем, що мають марковські властивості, в хімії, медицині, харчовій промисловості. Зокрема, побудовано модель екстракційних процесів, що протікають у промислових екстракторах, призначених для вилучення цукру з цукрового буряку. Її використання корисно на етапі проектування екстракційних апаратів у таких випадках: для аналізу процесу екстракції до його виходу на стаціонарний режим і оцінки необхідного для цього часу; для визначення виходу готового продукту (цукру) після досягнення стаціонарного режиму.

Розроблені методи і програми були використані в дослідженнях по створенню лікарських форм та при контролі технологічних процесів одержання ряду лікарських форм у Державному науковому центрі лікарських препаратів Держкоммедбіопрому і НАН України, що підтверджено відповідним актом впровадження.

Прикладні програми моделювання марковських процесів та розрахунку їх характеристик використовуються в навчальному процесі Харківського державного технічного університету радіоелектроніки при викладанні дисциплін "Теорія ймовірностей і математична статистика" та "Випадкові процеси".

Особистий вклад здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи були отримані здобувачем самостійно. Особистий внесок здобувача в працях, написаних у співавторстві, полягає в наступному. В праці [3,] сформульовано і доведено теорему про необхідні і достатні умови синтезу стохастичної матриці по її фрагментах. У [8] запропоновано методику побудови умовного ймовірнісного простору, пов'язаного з марковським процесом. У [7] автором досліджено можливість стабілізації розподілу марковського процесу з континуальною множиною станів. У праці [2] запропоновано алгоритм впливу на інфінітезимальну матрицю процесу, що забезпечує утримання розподілу ймовірностей у будь-якому малому околі заданої функції часу. У [4] автором запропоновані методи синтезу марковського процесу, що описує випадкові блукання частки на графі. У [9] автором запропоновано модель, якій притаманна марковська властивість і яка описує розподіл між віковими групами в рамках деякої популяції. У [10] досліджено умови, при яких загальна чисельність популяції збільшується з часом або зменшується. У [11] автором запропоновано метод моделювання і прогнозування чисельності населення.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися на 1-й Міжнародній конференції “Радіоелектроніка та молодь у XXI сторіччі” (Харків, 1997 р.), 2-й Міжнародній конференції “Радіоелектроніка та молодь у XXI сторіччі” (Харків, 1998 р.), XXIV Гагарінських читаннях (Москва, 1998 р.), 3-му Сибірському конгресі з прикладної і індустріальної математики (Новосибірськ, 1998 р.), 3-му Українсько-скандинавському конгресі з теорії ймовірностей і математичної статистики (Київ, 1999 р.).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків та шістьох додатків на 28 сторінках. Повний обсяг дисертаційної роботи – 167 сторінок. Дисертація містить 11 ілюстрацій, 3 таблиці, список використаних літературних джерел із 113 найменувань на 9-и сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

Перший розділ присвячено аналітичному огляду наукових досліджень за проблемами неоднорідних марковських систем, сформульовано мету і задачі досліджень.

У другому розділі розглядається можливість відновлення (синтезу) стохастичної матриці марковського процесу за стохастичними матрицями його фрагментів.

При дослідженні фізичних і економічних процесів як математична модель досить часто використовуються марковські процеси. У такому разі перехідні ймовірності марковського процесу відповідають параметрам, що характеризують систему, що розглядається. При аналізі такої моделі виникає задача про розбиття всієї системи на деякі фрагменти. У ряді випадків це спрощує аналіз. Із математичної точки зору це означає введення умовних ймовірностей і перехід до нового ймовірнісного простору. При цьому кожному фрагменту системи буде відповідати своя стохастична матриця.

При розгляді системи фрагментів виникає така задача: чи визначає задана система фрагментів деякий марковський процес, чи ні. Кожен з фрагментів P^{I_k} визначає ймовірності переходів між станами i, j, що належать до множини I_k. Розглянемо два фрагменти P^{I_1} і P^{I_2}, що відповідають множині станів I_1, I_2. Для двох фрагментів, що перетинаються (рис 1), можна обчислити елементи рядків матриці P^I, що мають номери з множини $I_0 = I_1 \bigcap I_2$.

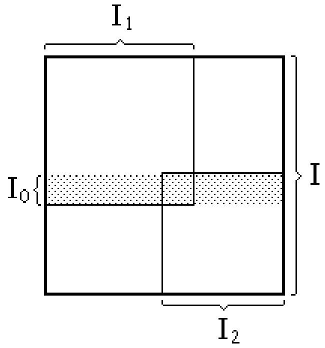

Рис. 1. Синтез двох фрагментів, що перетинаються непустою множиною станів

При цьому в загальному випадку фрагменти не є незалежними, тобто для успішного виконання процедури синтезу необхідна узгодженість фрагментів P^{I_1} і P^{I_2} .

Для того, щоб по фрагментах $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$, можна було провести синтез матриці P^{I_Σ}, де $I_\Sigma = I_1 \bigcup I_2 \bigcup \ldots \bigcup I_m$, необхідно і достатньо виконання таких умов:

1) будь-які фрагменти, що перетинаються непустою множиною станів (у тому числі ті, які виникають протягом синтезу), повинні бути узгоджені;

2) для будь-якої пари індексів $i, j \in I_\Sigma$ повинна існувати множина I_k із сукупності $I_1, I_2, \ldots I_m$, що містить ці індекси одночасно;

3) в кожному перетині повинен існувати принаймні один ненульовий елемент.

На практиці умова узгодженості фрагментів може не виконуватися внаслідок наявності похибок спостережень. У цьому випадку можна побудувати оцінку перехідної матриці P усього процесу. Якби умова узгодження виконувалася, то елементи $p_{kj}^{I_i}$ k-ого рядка i-го фрагмента були б пропорційні відповідним елементам p_{kj} k-ого рядка вихідної матриці P:

$$x_j = \beta_i p_j^{I_i}, \; i \in B_{kj}, j = 1, 2, \ldots n,$$

де $\beta_i = \sum\limits_{j \in I_i} x_j$, $i \in B_k$,

x_j – оцінка елемента p_{kj} вихідної матриці;

B_k – множина індексів i тих I_i, які містять в собі стан k, $B_{kj} = B_k \bigcap B_j$.

Будемо шукати такі x_j, сума квадратів відхилень яких від величин $\beta_i p_j^{I_i}$ була б мінімальною. Це призводить до такої задачі мінімізації:

$$y(x,\beta) = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i} \left(x_j - \beta_i p_j^{I_i}\right)^2 \to \min_{x,\beta};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1;$$

$$\sum_{j \in I_i} x_j = \beta_i,\ i \in B_k;$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Це задача квадратичного програмування. Вона має єдине розв'язання, що завжди можна знайти. Цільова функція при вказаних обмеженнях має єдиний і притому глобальний мінімум. Функція $y(x,\beta)$ невід'ємна при будь-якому значенні x_j. Очевидно, що у випадку, коли умови узгодження фрагментів виконані, розв'язання задачі мінімізації x^* буде звертати цільову функцію в 0, який, в силу властивостей цільової функції, є глобальним мінімумом.

Після того, як розв'язання x_j, $j = 1, 2, \dots, n$ знайдене, виникає питання про те, наскільки істотним є відмінність від нуля цільової функції, іншими словами, чи є насправді стохастичні матриці $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ фрагментами певного марковського процесу або ж ні. Адже рішення задачі може бути знайдене для будь-яких вихідних даних $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$, що не обов'язково є фрагментами якогось марковського процесу. Припустимо, що значення $p_j^{I_i}$, які підставляються в задачу мінімізації, являють собою реалізації нормально розподілених випадкових величин $\xi_j^{I_i}$ із невідомим математичним очікуванням $a_j^{I_i} = M\xi_j^{I_i}$ і відомою дисперсією $\sigma_j^{2I_i}$. Будемо припускати також, що спостереження незміщені: величини $a_j^{I_i}$ збігаються зі справжніми значеннями відповідних елементів стохастичних матриць фрагментів. Тоді сума

$$\eta = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i \setminus \{r_i\}} \zeta_{ij}^2,$$

де $\zeta_{ij} = \left(\frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right) \Big/ \sigma_j^{I_i}$, є сумою незалежних нормально розподілених випадкових величин із нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією. У цьому випадку побудована випадкова величина η має χ^2 розподіл із $N-1$ ступенями свободи, де N – кількість доданків у сумі. Таким чином, знайшовши критичне значення χ_{kp}^2, що відповідає розподілу χ^2 із $N-1$ ступенями свободи й обраній довірчій імовірності p_0, та, співставивши його зі значенням η, обчисленим за наведеною формулою, можна перевірити гіпотезу про те, чи є величини, що спостерігаються, фрагментами певного марковського процесу. Якщо $\eta < \chi_{kp}^2$, то висунута гіпотеза приймається. Якщо ж $\eta \geq \chi_{kp}^2$, те гіпотеза відхиляється. Відхилення гіпотези свідчить про те, що або величини, що спостерігаються, не є елементами фрагментів певного марковського процесу, або похибки спостережень занадто великі.

У третьому розділі досліджено стабілізацію та фокусування розподілів неоднорідних марковських процесів. Під фокусуванням розуміється така еволюція марковської системи на часовому напівінтервалі $[a, b)$, коли розподіл імовірностей збігається до певного граничного розподілу незалежно від розподілу $\{p_i^0\}$ у початковий момент часу в точці a:

$$p_i(t) \to p_i^*, \ i = 1,2,...,n, \text{ при } t \to b.$$

Для однорідних марковських процесів при виконанні певних умов таке збігання існує, але для цього, крім деяких випадків марковських ланцюгів із виродженою стохастичною матрицею, потрібний необмежено великий проміжок часу. Відомо, що при деяких умовах, що накладаються на інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t)$ процесу (існування стовпчика, що містить неінтегровані особливості в точці b, та існування граничного значення нульового власного вектора матриці $\Lambda(t)$). Якщо ж такий стовпчик відсутній, то фінальні ймовірності лежать у деякій σ -околі:

$$\overline{\lim_{t \to b}} p_i(t) \leq p_i^* + \sigma;$$

$$\underline{\lim_{t \to b}} \ p_i(t) \geq p_i^* - \sigma$$

і таке явище зветься σ -фокусування. У зв'язку з цим становить інтерес побудова оцінки для параметра σ і розробка методів, що дозволяють домогтися збігання до заданого розподілу ймовірностей p^* шляхом якомога меншого цілеспрямованого впливу на інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t) = \left\| \lambda_{ij}(t) \right\|$.

Нехай в початковий момент часу s задано розподіл імовірностей $p_i(s)$, $1 \le i \le n$, де n – кількість станів системи. Визначимо $p_j(s,t)$ як імовірність того, що в момент часу $t > s$ система знаходиться в стані j при умові, що було задано початковий розподіл у точці s. У загальному випадку $p_j(s,t)$ залежить від розподілу $p_i(s)$. Але протягом часу траєкторії, що відповідають різним початковим розподілам, наближаються одна до одної. Зокрема, має місце така оцінка збігання:

$$\sup_{p_i(s)} p_j(s,t) - \inf_{p_i(s)} p_j(s,t) \le \exp\left\{ -\int_s^t \min_{i \ne j} \lambda_{ij}(\tau) d\tau \right\},$$

де інфінум і супремум беруться по всіх можливих початкових розподілах у початковий момент часу s. Слід відзначити, що ці траєкторії завжди будуть зближатися протягом часу, але збігання до граничного значення не завжди буде існувати. Таке може статися, наприклад, у випадку, осциляцій нульового власного вектора інфінітезимальної матриці $\Lambda(t)$.

Таким чином, якщо $\int_{t_0}^t \min_{i \ne j_0} \lambda_{ij_0}(\tau) d\tau > -\ln \sigma$, то буде мати місце σ-фокусування. У тому ж випадку, коли розбігається інтеграл

$$\int_{t_0}^t \min_{i \ne j} \lambda_{ij}(\tau) d\tau = \infty,$$

у граничній точці t буде спостерігатися точне фокусування.

На практиці доводиться мати справу з такими чинниками, які, впливаючи на процес на деякому проміжку часу $[a,b]$, призводять до появи на ньому точок фокусування, розподілених майже неперервно. У зв'язку з цим виникає задача про стабілізацію ймовірностей станів марковського процесу в околі заданого розподілу шляхом цілеспрямованого впливу на його інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t)$.

Нехай дана n-мірна крива $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$:

$$\varphi_k(t) \ge 0,\ k = 1, 2, ..., n;\ \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) = 1,\ t \in [a,b].$$

У початковій точці a задано розподіл імовірностей $p(a)$. Необхідно, щоб у наступні моменти часу $t \in [a,b]$ розподіл імовірностей $p(t)$ знаходився в околі зазначеної кривої $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) - \sigma(t) \le p(t) \le \varphi(t) + \sigma(t)\,,\ t \in [a, b]\,, \tag{1}$$

де $\sigma(t)$ - максимально припустима похибка. При цьому вважається, що в початковий момент часу $t = a$ ця умова уже виконана:

$$\varphi(a) - \sigma(a) \le p(a) \le \varphi(a) + \sigma(a)\,.$$

Задача полягає в тому, щоб при заданому початковому розподілі $p(a)$ вибрати інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t)$ таким чином, щоб виконувалася умова (1). Функція $\sigma(t)$ і інфінітезимальна матриця $\Lambda(t)$ при цьому повинні залишатися неперервними на відрізку часу $[a, b]$, $\sigma(t) \ge 0$.

Зв'язок між інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t) = \|\lambda_{ij}(t)\|$ і розподілом імовірностей $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ задається прямою системою диференціальних рівнянь Колмогорова

$$\frac{dp^T}{dt} = \Lambda^T p^T\,. \tag{2}$$

Розіб'ємо відрізок часу $[a, b]$ на малі відрізки $[t_k, t_{k+1}]$, $t_0 = a$, $t_m = b$. Завдяки неперервності інфінітезимальної матриці $\Lambda(t)$, а, отже, і розв'язання $p(t)$, на кожному з часткових відрізків замінимо рівняння Колмогорова наближеним різницевим матричним рівнянням. Визначимо $h_k = t_{k+1} - t_k$ (рис. 2).

Значення в проміжній точці $t_k + \frac{h_k}{2}$ може бути подане у вигляді

$$p^{T(k+1/2)} = \left(E + \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k)}\right)p^{T(k)} + \overline{o}(h_k)$$

і, з іншої сторони,

$$p^{T(k+1/2)} = \left(E - \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k+1)}\right)p^{T(k+1)} + \overline{o}(h_k)\,,$$

де E - одинична матриця. Зпівставляючи співвідношення, одержимо апроксимацію системи рівнянь Колмогорова матричним рівнянням

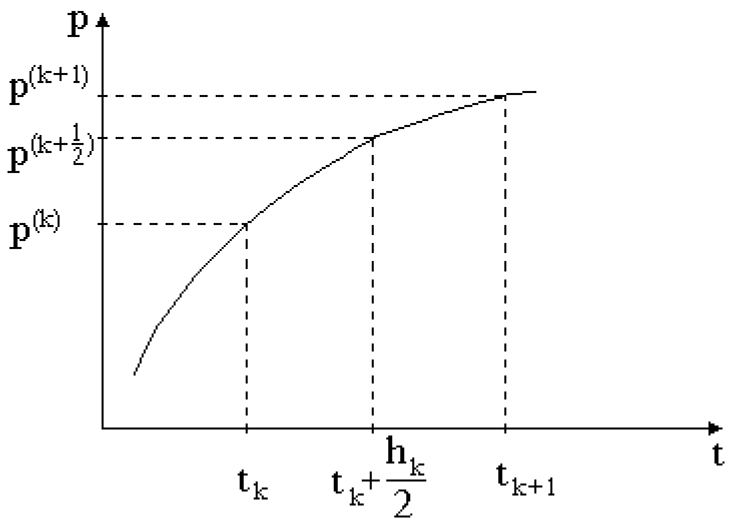

Рис. 2. Апроксимація рівнянь Колмогорова

$$p^{T(k+1)} = \left(E - \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k+1)}\right)^{-1}\left(E + \frac{h_k}{2}\Lambda^{T(k)}\right)p^{T(k)}, \tag{3}$$

де символ $^{(k)}$ є значенням відповідного параметра в точці t_k,. Зменшуючи крок h_k, можемо домогтися будь-якої малої різниці між точним розв'язанням системи диференціальних рівнянь і наближеного розв'язання різницевої системи. В загальному випадку існує нескінченна множина матриць Λ, які задовольняють рівнянню (3). Тому варто вибрати таку матрицю Λ, яка б в деякому сенсі мінімально відхилялася від вихідної незбуреної інфінітезимальної матриці. Якщо мірою відхилення обрати суму квадратів відхилень, то отримаємо таку задачу мінімізації.

$$\alpha\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k+1)}\right)^2 + \beta\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)}\right)^2 \to \min_{x_{ij}^{(k+1)}}; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k+1)} x_{ij}^{(k+1)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} x_{ij}^{(k)} + \frac{2}{h_k}\left(p_j^{(k+1)} - p_j^{(k)}\right), \; j = 1, 2, \ldots, n; \tag{5}$$

$$x_{ii}^{(k+1)} = -\sum_{j \neq i} x_{ij}^{(k+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{6}$$

$$x_{ij}^{(k+1)} \geq 0, \; i \neq j; \tag{7}$$

де $x_{ij}^{(k+1)}$ - елементи шуканої матриці $X(t)$ в точці t_k, $\lambda_{ij}^{(k+1)}$ - елементи незбуреної матриці $\Lambda(t)$ у тій же точці. Обмеження (5) є апроксимацією рівнянь Колмогорова (2). Обмеження (6)-(7)

визначаються властивостями інфінітезимальної матриці. Перший доданок у функції мети означає прагнення до мінімального відхилення від вихідної незбуреної матриці Λ, другий - введено для запобігання різких осциляцій збуреної матриці. Додатні коефіцієнти α і β регулюють внески цих складових.

Якщо ж початковий розподіл невідомий, то необхідно так обрати інфінітезимальну матрицю $X(t)$, щоб при будь-якому початковому розподілі, заданому в точці a, розподіл імовірностей залишався б у смузі

$$\varphi_1(t) \le p(t) \le \varphi_2(t)\,,\ t \in [a, b], \tag{8}$$

де $\varphi_1(t) = (\varphi_{11}(t), \varphi_{12}(t), \dots, \varphi_{1n}(t))$, $\varphi_2(t) = (\varphi_{21}(t), \varphi_{22}(t), \dots, \varphi_{2n}(t))$ – вектори-функції, неперервні на $[a, b]$ і такі, що $\varphi_1(t) \le \varphi_2(t)$, $t \in [a,b]$, $\varphi_1(a) = 0$, $\varphi_2(a) = 1$ (рис. 3).

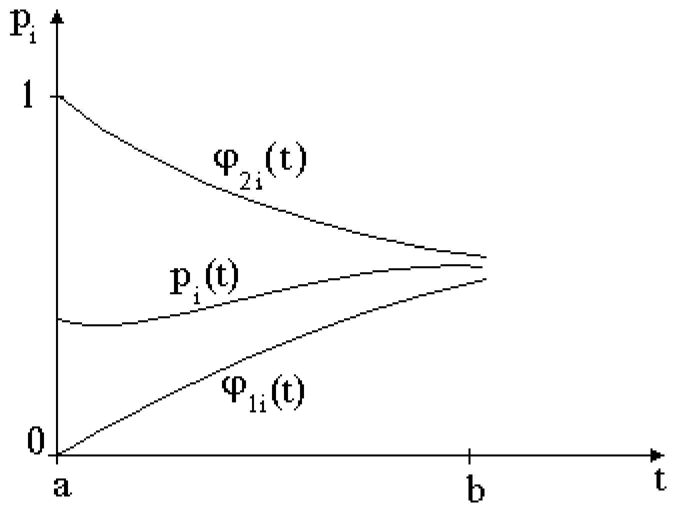

Рис. 3. Утримання вектора розподілу в заданій смузі

Набір векторів $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ будемо називати додатним базисом множини розподілів $\{p(t)\}$, якщо будь-який вектор з цієї множини може бути представлений у вигляді невід'ємної лінійної комбінації базисних векторів: $p(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_n e_n(t)$, де $\alpha_i \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Якщо початкові розподіли $e_1(a), e_2(a), \dots, e_n(a)$ утворюють додатній базис і $e_i(t) \ge \varphi_1(t)$, $t \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$, то для будь-якого початкового розподілу $p(a)$ буде виконана така ж сама нерівність $p(t) \ge \varphi_1(t)$, $t \in [a, b]$. Таким чином, необхідною і достатньою умовою стабілізації розподілу ймовірностей в околиці заданої функції часу є виконання умови (8) для кожного з базисних векторів.

Відзначимо, що в тому разі, коли $\varphi_2(t)-\varphi_1(t)=0$ в деякій точці $t_0\in[a,b]$, то інфінітезимальна матриця $\Lambda(t)$ може мати розрив типу полюс у точці t_0. Якщо ж $\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$ не обертається в нуль у жодній із точок відрізку $[a,b]$, то матриця $\Lambda(t)$ буде неперервна скрізь на $[a,b]$. Як і в попередньому випадку, з усієї множини інфінітезимальних матриць, що задовольняють нерівності (8), варто вибрати ту, яка б в деякому сенсі мінімально відхилялася від вихідної незбуреної матриці. Це призводить до задачі мінімізації, аналогічної (4)-(7)

$$\alpha\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)}-\lambda_{ij}^{(k+1)}\right)^2+\beta\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)}-x_{ij}^{(k)}\right)^2\to\min_{x_{ij}^{(k+1)}}; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{mi}^{(k+1)}x_{ij}^{(k+1)}\geq\frac{2}{h_k}\left(\varphi_{1j}^{(k+1)}-e_{mj}^{(k)}\right)-\sum_{i=1}^{n}e_{mi}^{(k)}x_{ij}^{(k)}; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{mi}^{(k+1)}x_{ij}^{(k+1)}\geq\frac{2}{h_k}\left(\varphi_{2j}^{(k+1)}-e_{mj}^{(k)}\right)-\sum_{i=1}^{n}e_{mi}^{(k)}x_{ij}^{(k)},\ j=1,2,...,n,\ m=1,2,...,n, \tag{11}$$

де

$$a_{mi}^{(k)}=e_{mi}^{(k)}+\frac{h_k}{2}\sum_{j=1}^{n}e_{mi}^{(k)}x_{ji}^{(k)},\ m=1,2,\ \dots\ ,n;$$

$$x_{ii}^{(k+1)}=-\sum_{j\neq i}x_{ij}^{(k+1)},\ i=1,2,...,n; \tag{12}$$

$$x_{ij}^{(k+1)}\geq 0,\ i\neq j. \tag{13}$$

Тут, як і раніше, $x_{ij}^{(k+1)}$ – елементи матриці $X(t)$, що необхідно знайти, в точці t_{k+1}, $\lambda_{ij}^{(k+1)}$ – елементи незбуреної матриці $\Lambda(t)$ в тій же точці. Задачі (4)-(7) і (9)-(13) подібні, за винятком того, що при переході до розгляду випадку з довільним початковим розподілом, умова (5) типу рівності заміняється умовами типу нерівностей вигляду (10)-(11).

У четвертому розділі розглянуто питання встановлення відповідності між дифузійними процесами і марковськими процесами з неперервним часом і скінченою множиною станів. Показано, що будь-який дифузійний процес може бути скільки завгодно точно наближений марковським, який би мав ті ж самі граничні властивості – стаціонарний розподіл та швидкість збігання до нього.

При дослідженні дифузійних процесів у рідині та газі часто виникає задача про існування стаціонарного розподілу дифузанта і швидкості збігу до цього розподілу. Її аналіз спрощується при заміні неперервного процесу дискретним. Точність такого наближення можна підвищувати, збільшуючи число станів процесу. Тоді як модель дифузії зручно обрати марковський процес зі скінченою множиною станів.

Розглянемо дифузійний процес, заданий на відрізку $[r_1, r_2]$, із щільністю $\varphi(x,t)$, де $x \in [r_1, r_2]$, $t \in [0, \infty)$. Тут r_1, r_2 можуть приймати і нескінчені значення. Будемо припускати, що щільність $\varphi(x,t)$ задовольняє прямим рівнянням Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\varphi(x,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)\right],$$

де $a(x,t)$ – коефіцієнт зносу; $\sigma^2(x,t)$ – коефіцієнт дифузії.

Нульовим власним розподілом дифузійного процесу будемо називати такий розподіл із щільністю $\varphi^*(x,t)$, що задовольняє рівнянню

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\varphi^*(x,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(x,t)\varphi^*(x,t)\right] = 0. \tag{14}$$

Загальне рішення рівняння (14) може бути представлено у вигляді:

$$\varphi^*(x,t) = \frac{2}{\sigma^2(x,t)}\frac{1}{R(x,t)}\left[c_1 + c_0\int_{r_1}^{x} R(v,t)dv\right].$$

Для однорідних дифузійних процесів відомі умови збігання до стаціонарного розподілу. У запропонованій праці досліджені умови збігання для неоднорідних дифузійних процесів. Розглянемо дифузійний процес у фазовому просторі $x \in [r_1, r_2]$, $t \in [0, t_0]$ із нульовим коефіцієнтом зносу та коефіцієнтом дифузії $\sigma(t,x) = M(t)\sigma_0(t,x)$, де $\int_0^{t_0} M(s)ds = \infty$; $\sigma_0(t,x) > 0$, обмежена і неперервна на $[0,t_0]\times[r_1,r_2]$ та при $t \to t_0$ рівномірно збігається до $\sigma^*(x) > 0$. Тоді для будь-якого початкового розподілу, заданого в точці $t = 0$, щільність розподілу ймовірностей процесу при $t \to t_0$ збігається до граничного розподілу

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t,x) = \varphi^*(x) = \frac{1}{\sigma^{*2}(x)} \Bigg/ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sigma^{*2}(z)}.$$

У п'ятому розділі розглянуто застосування отриманих результатів для дослідження екстракційних процесів, які сьогодні є одним із найважливіших методів хімічної технології.

Масообмінні процеси в промислових апаратах характеризуються зміною концентрації розподіленої речовини у фазах по довжині апарату. Оскільки коефіцієнт дифузії залежить від концентрації речовини, диференціальне рівняння дифузії має нелінійний характер. Співвідношення рівноважних концентрацій у фазах, як правило, не підкоряється лінійному закону. Крім того, при зміні фізичних властивостей середовища та гідродинамічних властивостей по довжині апарату змінюється коефіцієнт масовіддачі, що обумовлює нелінійність граничних умов дифузії. На коефіцієнти дифузії, масовіддачі і розподіл рівноважних концентрацій також впливає температурне поле. З викладеного вище випливає, що для промислових умов масообміну властиві нелінійні задачі дифузії. Однак у багатьох випадках нелінійна постановка задач дифузії пов'язана з надмірними складнощами в описі кінетики процесу, при цьому потрібна додаткова інформація про залежність кінетичних коефіцієнтів від параметрів процесу, що часто може бути відсутня.

Запропонована методика розрахунку екстракційних процесів грунтується на розбивці робочого об'єму екстрактора на області, у межах яких фізичні та хімічні умови середовища залишаються сталими, і побудові марковського процесу блукання частки по цих областях із використанням методів синтезу по фрагментах, описаних у 2-му розділі. Такий підхід не тільки спрощує розрахунки в порівнянні з методом послідовного рішення диференціальних рівнянь дифузії для кожної області, але й дає можливість дослідження процесу до його виходу на стаціонарний режим. Побудована модель може бути використана для досліджень динаміки процесів дифузії, що обумовлюють фізичні і хімічні зміни в лікарських препаратах. Як приклад проведено чисельне моделювання екстракції цукру з цукрового буряку, що має місце в промислових екстракторах.

Діаметр цукрової стружки є значно меншим у порівнянні з її довжиною, що дає змогу розглядати процеси тільки на її боковій поверхні і моделювати стружку за допомогою циліндрів із нескінченною довжиною. Кожний такий циліндр розбивається на зони впродовж довжини і на концентричні шари (рис. **4**).

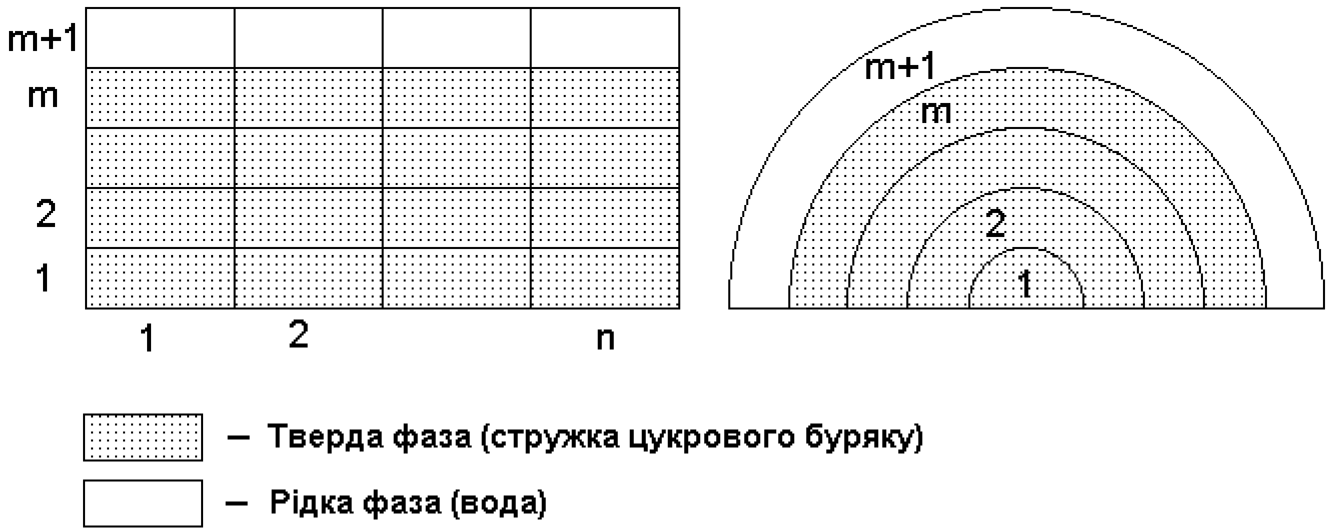

Рис. 4. Розподіл екстрактора на області з однаковими фізичними властивостями

Для кожної з областей на основі розв'язання відповідного лінійного диференціального рівняння дифузії, підраховуються ймовірності переходів у сусідню область. За допомогою методів синтезу будується матриця перехідних імовірностей, яка дає можливість віднайти розподіл концентрації цукру у стружці та рідині по всьому об'єму екстрактора. Проведена програмна реалізація запропонованих алгоритмів може бути використана на етапі проектування екстракційних апаратів для розрахунку як виходу готового продукту (цукру) після досягнення стаціонарного режиму, так і необхідного для цього часу. Отримані чисельні результати добре узгоджуються з даними експериментальних досліджень.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено методику відновлення перехідних імовірностей марковського процесу з кінцевою або рахуємою множиною станів за перехідними ймовірностями його фрагментів. Сформульовано і доведено теорему про необхідні і достатні умови такого синтезу. Розроблено алгоритм оцінювання стохастичної матриці марковського процесу для випадку, коли фрагменти містять випадкові помилки. Проведено програмну реалізацію запропонованих алгоритмів. Програми можуть бути використані як у науково-дослідних розробках для моделювання складних систем, яким притаманна марковська властивість, так і в навчальному процесі для освоєння дисциплін, що вивчають динамічні системи.

2. Для випадку нормально розподілених помилок у перехідних імовірностях фрагментів побудовано статистичний критерій, що дозволяє оцінити достовірність синтезованої матриці

процесу. Цей критерій використовується для перевірки гіпотези про те, чи дійсно вихідні дані є фрагментами деякого марковського процесу.

3. У роботі вдосконалено методи стабілізації розподілу ймовірностей неоднорідних марковських процесів в околі заданої функції часу, що відіграє роль розподілу ймовірностей як для фіксованого, так і для довільного початкового розподілу. Отримані результати використовуються для дослідження швидкості збігання до фінального розподілу й оцінки точності σ-фокусування. Вони також можуть бути використані для керування марковськими процесами шляхом цілеспрямованого впливу на інфінітезимальну матрицю процесу.

4. Подальший розвиток одержали методи апроксимації неперервного дифузійного процесу неоднорідним марковським процесом із кінцевим числом станів і неперервним часом, що грунтуються на побудові марковського процесу, який має такі ж граничні властивості, що і вихідний дифузійний процес. Отримані результати можуть бути використані для аналізу динаміки процесів дифузії, що обумовлюють фізичні і хімічні зміни в лікарських препаратах.

5. Знайдено достатні умови, при виконанні яких має місце збігання щільності розподілу імовірностей дифузійного процесу до граничної щільності за кінцевий проміжок часу. Отримані результати можуть бути використані для оцінки часу виходу процесу на сталий режим.

6. Запропоновано метод розрахунку екстракційних процесів по витягу цукру з цукрового буряку. Розроблена методика та її програмна реалізація можуть бути корисні на етапі проектування екстракційних апаратів у таких випадках: для аналізу процесу екстракції до його виходу на стаціонарний режим і оцінки необхідного для цього часу; для визначення виходу готового продукту (цукру) після досягнення стаціонарного режиму.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Басманов А.Е. Фокусировка распределений и синтез марковских процессов в широком смысле // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 2. – С. 64-67.
2. Басманов А.Е., Дикарев В.А. Стабилизация марковского процесса в окрестности распределения, заданного на конечном временном промежутке // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 8. – С. 69-71.
3. Басманов А.Е., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Восстановление дискретной цепи Маркова по ее фрагментам // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 7. – С. 93-95.
4. Бондаренко М.Ф., Басманов А.Е. Восстановление финального распределения вероятностей для процесса блуждания на графе // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 8. – С. 87-90.

5. Басманов А.Е. Исследование диффузии с помощью марковских процессов // Радиоэлектроника и информатика. - 1999. – № 2. – С. 53-54.
6. Басманов А.Е. Оценка марковского процесса по его фрагментам. // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 1. – С. 72-73.
7. Басманов А.Е., Герасин С.Н., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Фокусировка распределений марковских процессов в широком смысле // Радиоэлектроника и информатика. - 1998. № 3. – С. 15-16.
8. Басманов А.Е., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Приложение условных вероятностей к марковским процессам // Сб. Автоматизированные системы управления. ХТУРЭ. – 1998. – № 107. – С. 17-21.
9. Басманов Є.І., Басманов О.Є. Моделювання розміщення продуктивних сил // Сборник научных трудов Харьковского института социального прогресса. – 1999. – Выпуск 4. – С. 51-54.
10. Басманов Є.І., Басманов О.Є. Моделювання та прогнозування вікової структури населення // Захист довкілля від антропогенного навантаження. – 1999. – № 1. – С. 101-105.
11. Басманов Є.І., Басманов О.Є. Аналіз структури відтворення населення // Вісник Харківського національного університету. – 1999. – № 455. – С. 90-92.

АНОТАЦІЯ

Басманов О.Є. Методи синтезу марковських процесів та їх застосування. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський державний технічний університет радіоелектроніки, Харків, 2000.

У дисертаційній роботі розглянуто можливість відновлення інформації про стохастичну матрицю неоднорідного марковського процесу за стохастичними матрицями його фрагментів. Знайдено необхідні і достатні умови, при виконанні яких такий синтез є можливим. Для випадку нормально розподілених похибок у фрагментах побудовано статистичний критерій, що дозволяє перевірити достовірність синтезованої матриці процесу. Розроблено методи стабілізації розподілу імовірностей неоднорідних марковських процесів в околі заданої функції часу, яка відіграє роль розподілу імовірностей, як для фіксованого, так і для довільного початкового розподілу. Досліджено фактори, що обумовлюють швидкість збіжності до фінального розподілу і запропоновано оцінку точності σ-фокусування. Отримані результати використовуються для вивчення дифузійних процесів, що протікають у екстракторах промислового типу. Запропоновано методику розрахунку екстракційних процесів по витягу цукру з цукрового буряка, що спирається на поділ робочого об'єму апарату на області з приблизно однаковими фізичними та хімічними

умовами. Результати дисертації були використані для досліджень динаміки процесів дифузії, що обумовлюють фізичні і хімічні зміни в лікарських препаратах.

Ключові слова: марковський процес, стохастична матриця, дифузія, фінальний розподіл ймовірностей, фокусування, екстракція.

АННОТАЦИЯ

Басманов А.Е. Методы синтеза марковских процессов и их применения. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники, Харьков, 2000.

В диссертационной работе рассматриваются вопросы восстановления информациии о переходных вероятностях марковской системы по переходным вероятностям ее фрагментов. Каждый фрагмент представляет собой марковский процесс, протекающий на некотором подмножестве множества всех состояний системы. Исследованы условия сходимости плотности распределения вероятностей диффузионного процесса к финальной плотности.

В первом разделе проведен обзор литературы по вопросам неоднородных марковских процессов, сформулированы цель и задачи исследований

Во втором разделе исследована возможность полного или частичного восстановления стохастической матрицы неоднородного марковского процесса по стохастическим матрицам его фрагментов. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых такой синтез оказывается возможным. Полученные условия обобщены на марковские процессы со счетным числом состояний. Предложенные методы проиллюстрированы на ряде численных примеров. Подробно исследованы возможные случаи невыполнения условий синтеза. В частности, для случая нормально распределенных погрешностей во фрагментах построена оценка стохастической матрицы процесса и предложен статистический критерий, позволяющий проверить ее достоверность. Данный подход может быть применен для исследования экономических показателей системы по показателям ее отдельных регионов. Примером может служить расчет объема грузоперевозок внутри страны по выборочным наблюдениям за перевозками между ее отдельными регионами.

В третьем разделе разработаны методы стабилизации распределения вероятностей неоднородных марковских процессов в окрестности заданной функции времени, играющей роль распределения вероятностей, как для фиксированного, так и для произвольного начального распределения. Для неоднородных марковских процессов оказывается возможным добиться

стабилизации в окрестности заданного распределения за конечный промежуток времени. Исследованы факторы, которые обусловливают скорость сходимости к финальному распределению; предложена и реализована оценка величины σ в случае явления σ-фокусировки. Путем внесения сильных возмущений в инфинитезимальную матрицу процесса можно добиться сходимости к заданному распределению за сколь угодно малый промежуток времени.

В четвертом разделе исследуются неоднородные диффузионные процессы. Предложен алгоритм аппроксимации процесса диффузии марковским процессом с конечным числом состояний и непрерывным временем. Построенный процесс имеет то же самое предельное распределение и скорость сходимости к нему, что и исходный диффузионный. Найдены достаточные условия, при выполнении которых имеет место сходимость плотности распределения вероятностей диффузионного процесса к финальной плотности независимо от распределения в начальный момент времени. На численных примерах исследована эволюция системы, происходящая при невыполнении одного из условий сходимости.

В пятом разделе полученные результаты используются для изучения диффузионных процессов, которые протекают в экстракторах промышленного типа. Предложена методика расчета экстракционных процессов, основанная на разбиении рабочего объема экстрактора на области, в пределах которых физические и химические условия среды остаются постоянными, и построении марковского процесса блуждания частицы по этим областям с использованием методов синтеза по фрагментам, описанных в 2-м разделе. Такой подход не только упрощает расчеты по сравнению с методом последовательного решения дифференциальных уравнений диффузии для каждой области, но и дает возможность исследования процесса до его выхода на стационарный режим. Построенная модель может быть использована для исследований динамики процессов диффузии, которые обусловливают физические и химические изменения в лекарственных препаратах. В качестве примера проведено численное моделирование экстракции сахара из сахарной свеклы, имеющей место в промышленных экстракторах. Проведена программная реализация предложенных алгоритмов, которая может быть использована на этапе проектирования экстракционных аппаратов.

Все предложенные в диссертационной работе алгоритмы реализованы в виде пакетов прикладных программ и могут быть использованы как в научных исследованиях, так и в учебном процессе.

Ключевые слова: марковский процесс, стохастическая матрица, диффузия, финальное распределение вероятностей, фокусирование, экстракция.

ABSTRACT

Basmanov A.E. Methods of the synthesis of the Markov processes and their application. – Manuscript.

Thesis for the candidate degree of the technical sciences on the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computing methods. – Kharkov state technical university of radioelectronics, Kharkov, 2000.

The thesis is devoted to problem of reconstruction the stochastic matrix of inhomogeneous Markov process by stochastic matrices of its fragments. Conditions, which allow to do this synthesis was found. Statistical criteria which test reliability of the synthesized matrix was suggested for the normal distributed errors in the fragments. The methods of stabilization probability's distributions of the inhomogeneous Markov process in the neighborhood of the given time function which is probability's distribution is offered. Factors that influence on the speed of the convergence to the final distribution was researched. Estimation for the σ-focusing precision is offered. Results is used for the modeling diffusion processes which take place in the industrial extractors. Method of the computing the sugar's extraction from the sugar beet is based on decomposition operable volume into the subvolumes with approximately same physical and chemical conditions. The results of thesis were used for researching of diffusion process which determine physical and chemical changes in the medical preparations.

Keywords: Markov process, stochastic matrix, diffusion, final distribution of the probabilities, focusing, extraction.

Підписано до друку 7.03.2001 р.

Формат 60x84 1/16.

Умов. друк. арк. 1,2. Облік. вид. арк. 1,1.

Зам. № ________ Тираж 100 прим.

Надруковано в ТОВ "Яна".

61166, м. Харків, пр. Леніна, 38.