АВТОМАТИКА РАННЬОГО ВИЯВЛЕННЯ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ

Лекція 4

ПОНЯТТЯ СТІЙКОСТІ АС. МАТЕМАТИЧНІ ОЗНАКИ СТІЙКОСТІ АС. АЛГЕБРАЇЧНИЙ КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ ГУРВІЦА. ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖІ СТІЙКОСТІ

Зміст лекції:

Вступ

1 Поняття стійкості АС.

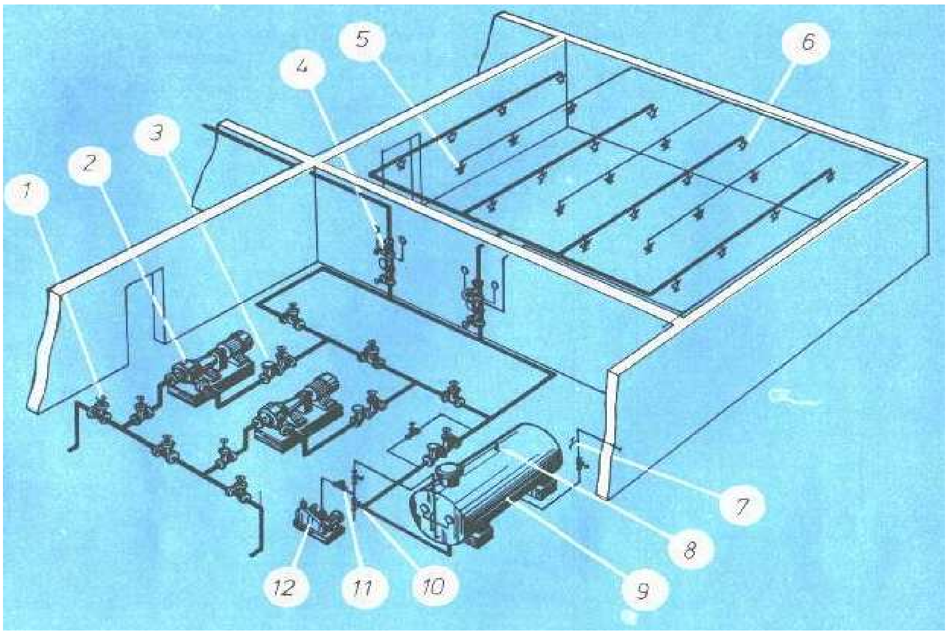
2 Математичні умови стійкості АС.

3 Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца.

4 Визначення границі стійкості за критерієм Гурвіца.

Вступ

В третій лекції, на прикладі АУВПГ, було показане математичне вираження складових елементів та пристроїв. Сьогодні розглянемо, як математично оцінити їх сумісну роботу у складі АУВПГ.



1 Поняття стійкості АС.

Система вважається **стійкою**, якщо будучи виведеної зі стану рівноваги вона знову повертається в цей стан після припинення дії збурювання, яке вивело систему з рівноваги.

Якщо після припинення дії збурювання система не повертається у вихідний стан, але і відхилення при цьому не збільшуються, то така система називається **нейтральною** (знаходиться на границі стійкості).

Якщо після припинення дії збурювання відхилення системи від рівноважного стану продовжує збільшуватися, то така система називається **хитливою**.

У ТАУ розглядаються тільки стійкі АС, що здатні вирішувати поставлені задачі з заданою точністю.

2 Математичні умови стійкості АС.

Щоб досліджувати стійкість математичної моделі АС необхідно покласти рівному нулю сигнал зовнішнього впливу $\overline{X}(t)=0$ й досліджувати поводження вихідного сигналу $\overline{y}(t)$ при t→∞.

Якщо $\overline{y}(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$, то це означає, що система стійка.

Якщо $\overline{y}(t)\xrightarrow{t\to\infty}const$, то це означає, що система нейтральна.

Якщо $\overline{y}(t)\xrightarrow{t\to\infty}\infty$, то це означає, що система нестійка.

Нехай динаміка АС описується ЛДУ загального виду:

$$a_0\overline{y}^{(n)}+a_1\overline{y}^{(n-1)}+\ldots+a_j\overline{y}^{(n-j)}+\ldots+a_{n-1}\dot{\overline{y}}+a_n\overline{y}=b\overline{x}.$$

Тоді поводження системи при нульовому зовнішньому впливі буде описуватися лінійним однорідним рівнянням:

$$a_0\overline{y}^{(n)}+a_1\overline{y}^{(n-1)}+\ldots+a_j\overline{y}^{(n-j)}+\ldots+a_{n-1}\dot{\overline{y}}+a_n\overline{y}=0$$

Загальне рішення однорідного рівняння має вигляд:

$$\overline{y}(t)=c_1e^{p_1t}+c_2e^{p_2t}+\ldots+c_ne^{p_nt}=\sum_{i=1}^{n}c_ie^{p_it},$$

де: n – порядок ЛДР; Pi – корінь характеристичного рівняння;

Ci – постійні інтегрування, обумовлені з початкових умов.

Із загального рішення однорідного рівняння видно, що

$$\overline{y}_i(t)=c_ie^{p_it}\xrightarrow{t\to\infty}0\text{, якщо } p_i\lhd 0.$$

У загальному випадку частина корінь характеристичного рівняння комплексно сполучені:

$$p_i=\alpha_i\pm i\omega_i.$$

Для кожної пари комплексно сполучених корінь рішення шукається у вигляді:

$$\overline{y}_i(t)=C_{1i}e^{(\alpha_i+i\omega_i)t}+C_{2i}e^{(\alpha_i-i\omega_i)t}$$

Дійсне рішення буде мати вигляд:

$$\overline{y}_i(t)=e^{\alpha_it}\cdot(A_iCos\ \omega_it+B_iSin\ \omega_it)$$

$$\text{або } \overline{y}_i(t)=C_ie^{\alpha_it}\cdot Cos\ (\omega_it+\varphi_i)$$

Видно, що $\overline{y}_i(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$, якщо $\alpha_i\lhd 0$.

<u>**Висновок:**</u> необхідною й достатньою умовою стійкості АС є заперечність речовинних частин всіх корінь характеристичного рівняння.

Якщо хоча б одне з речовинних корінь позитивний або позитивна дійсна частина мнимого кореня, то

$$\overline{y}_i(t) = c_i e^{p_i t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty,$$ що свідчить про нестійкість АС.

Граничному стану АС відповідає наявність одного нульового кореня. При цьому якщо нулю дорівнює дійсний корінь, то система перебуває на границі аперіодичної стійкості, а якщо нулю дорівнює дійсна частина уявного кореня, то система перебуває на границі коливальної стійкості.

Довідка. У випадку кратних корінь рішення ДУ шукається у вигляді:

$$\overline{y}_i(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots c_m t^{m-1})e^{p_i t},$$

де m-кратність i-го кореня. Якщо $p_i<0$, то $\overline{y}_i(t) = \xrightarrow{t\to\infty} 0$ й АС буде стійкою.

Для випадку кратного нульового кореня рішення ДУ варто шукати у вигляді:

$$\overline{y}_i(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots c_m t^{m-1}$$, де m-кратність нульового кореня.

Якщо m=1, то $\overline{y}_i(t) = \xrightarrow{t\to\infty} c_i$ й система є нейтральною.

Якщо m>1, то $\overline{y}_i(t) = \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ й система є нестійкою

Зауваження: реальні АС описуються нелінійними ДУ.

В 1892р. Ляпуновим було доведено:

1. Якщо лінійна модель АС стійкий, то стійко й вихідна нелінійна АС.
2. Якщо лінійна модель АС нестійкий, то нестійко й вихідна нелінійна АС.
3. Якщо лінійна модель АС нейтральний, то про стійкість вихідної нелінійної АС нічого сказати не можна. Потрібні додаткові дослідження.

3 Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца.

При дослідженні лінійних АС на стійкість найбільші труднощі представляє визначення корінь характеристичного рівняння. Для рівнянь вище 4-го порядку це завдання аналітично взагалі вирішене бути не може. Тому були розроблені критерії, що дозволяють побічно судити про знаки корінь характеристичного рівняння. Одним з найпоширеніших критеріїв є алгебраїчний критерій Гурвіца, який в 1895р. довів, що лінійна АС із характеристичним рівнянням загального виду:

$$a_0 p^n + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_j p^{(n-j)} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

стійка, якщо при $a_0>0$, позитивні всі визначники Гурвіца.

Визначники Гурвіца складаються за допомогою квадратної матриці n×n:

$$
\begin{array}{r}
\Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \\ \\ \Delta_{n-1} \\ \Delta_n
\end{array}
\left|
\begin{array}{cccccccc}
a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n
\end{array}
\right| = \Delta_n
$$

Нулями в матриці заповнюються вільні місця.

Довідка. Нехай є визначник Δ_n загального виду в якому i-номер рядка, k-номер стовпця.

1. Мінором M_{ik} визначника Δ_n називають визначник Δ_{n-1}, отриманий з Δ_n викреслюванням i-й рядка й k-го стовпця.
2. Під алгебраїчним доповненням A_{ik} елемента a_{ik} розуміють мінор M_{ik} помножений на $(-1)^{i+k}$

Теорема розкладання визначника Δ_n по елементах рядка або стовпця:

По елементах рядка $\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$; по елементах стовпця: $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$

А) Умови стійкості системи 1-го порядку.

Характеристичне рівняння: $a_0 p + a_1 = 0$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 = a_1 > 0$. Отже, достатньою умовою стійкості АС 1-го порядку є позитивність коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Б) Умови стійкості системи 2-го порядку.

Характеристичне рівняння:

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0$ і $\Delta_2 > 0$.

1. $\Delta_1 = a_1 > 0$.
2. $\Delta_2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot 0 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 > 0$.

Отже, достатньою умовою стійкості АС 2-го порядку є позитивність коефіцієнтів характеристичного рівняння.

В) Умови стійкості системи 3-го порядку.

Характеристичне рівняння:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Відповідно до критерію Гурвіца АС стійка, якщо при $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$.

1. $\Delta_1 = a_1 > 0$.

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$.

3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \Delta_2 \cdot a_3$.

З умови 3 треба, щоб $a_3 > 0$, тоді аналізуючи умову 2, неминуче дійдемо висновку, що $a_2>0$, і разом з тим $a_1a_2> a_0a_3$.

Отже: АС 3-го порядку є стійкою, якщо при позитивності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння добуток середніх коефіцієнтів більше добутку крайніх: $a_1 a_2 \rhd a_0 a_3$.

4 Визначення границі стійкості за критерієм Гурвіца.

Часто потрібно визначити область параметрів у який у який система стійка. Для цього необхідно знать границю стійкості. Система знаходиться на границі стійкості якщо серед коренів характеристичного рівняння мається один нульовий корінь (границя аперіодичної стійкості) чи один комплексно-сполучений корінь з нулевою дійсною частиною. Цій умові відповідає рівність нулю останнього визначника Гурвиця:

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} = 0 .$$

Якщо: $\Delta_{n-1} \rhd 0$, $a_n = 0$ – АС на границі **аперіодичної** стійкості.

Якщо: $\Delta_{n-1} = 0$, $a_n \rhd 0$ – АС на границі **коливальної** стійкості.

Алгебраїчний критерій стійкості Гурвиця дозволяє аналітично досліджувати стійкість АС будь-якого порядку. Однак з підвищенням порядку АС обчислення стають досить громіздкими, що вимагає застосування сучасних ЕОМ.

<u>Висновки</u>:

На лекціі було розглянуто поняття стійкості та критеріі по яким вона визначаеться.

<u>Завдання на самопідготовку:</u>

1. Абрамов Ю.А. Основы пожарной автоматики. стр. 122-158.

2. Методические указания к практическим и индивидуальным занятиям по дисциплине "Пожарная автоматика" стр. 122-137.