

УДК 514.18

Л. М. Куценко, д.т.н., професор, проф. каф. (ORCID 0000-0003-1554-8848)

С. В. Васильєв, к.т.н., доцент, доц. каф. (ORCID 0000-0002-6602-8765)

Б. І. Кривошей, к.т.н., доцент, доц. каф. (ORCID 0000-0002-2561-5568)

О. І. Сухарькова, викл. каф. (ORCID 0000-0003-1033-4728)

Національний університет цивільного захисту України, Харків, Україна

РОЗРАХУНОК РОБОЧИХ ОБ'ЄМІВ РОТОРНИХ МАШИН, УЗГОДЖЕНИХ З ЇХ ЗУБЧАТИМИ ПЕРЕДАЧАМИ

Наведено спосіб розрахунку роторно-планетарних машин системи Ванкеля. Особливість машини Ванкеля полягає у тому, що рух ротора відносно корпусу здійснюється за допомогою планетарного механізму, основу якого складає зубчата передача внутрішнього зчеплення. Запропонований спосіб дозволяє врахувати зв'язок параметрів геометричних форми двох пар взаємоспряжених кривих, характерних для машин системи Ванкеля. Першу пару кривих складають робочі профілі корпусу і ротора. Другу пару утворюють профілі зубів зубчатих коліс внутрішнього зчеплення. Врахування зазначеного зв'язку дозволило знайти опис функції зміни у часі робочих об'ємів, обмежених профілями корпусу і ротора (тобто визначити продуктивність машини). В результаті досліджень було встановлено, що продуктивність машини Ванкеля можливо знайти за умови врахування трьох особливостей цієї машини. Формування спряжених робочих профілів ротора і статора здійснюється за допомогою планетарного механізму, для розрахунку яких в роботі використано функції комплексних змінних. В якості прикладу наведено розрахунок профілів роторно-планетарної машини Ванкеля у тривіальному випадку (з параметрами в умовних величинах) мають такі значення: радіус більшого кола $R=3$, радіус меншого кола $r=2$. Функцію продуктивності машини визначає зміна у часі об'ємів простору, обмежених робочими профілями ротора і корпусу. Наближений опис функцій зміни у часі робочих об'ємів машини було здійснено за допомогою спеціально розроблених графічних побудов. Для погодження геометричних параметрів машини Ванкеля з параметрами профілів зубів зубчатої передачі внутрішнього зчеплення в роботі застосовано метод графічної обкатки. Одержані результати корисні тому, що схему розглянутої машини Ванкеля закладено в конструкцію однойменного двигуна внутрішнього згорання, а також, в конструкції різноманітних гідромашин, насосів, компресорів тощо.

Ключові слова: геометричне моделювання, роторно-планетарна машина, функції комплексної змінної, зубчата передача

1. Вступ

Виробничий потенціал України необхідно постійно забезпечувати сучасними виробами машинобудування. Серед них існують виробы, проектування яких передбачає, у першу чергу, геометричні розрахунки їх компонентів. Переконливий приклад важливості досліджень стосовно геометричних розрахунків представляють роторно-планетарні машини троххідного типу. Причина складності дослідження геометричних форм робочих профілів таких машин полягає у використанні планетарного механізму внутрішнього зчеплення для надання ротору обертового руху відносно корпусу.

В результаті чого профілі корпусу і ротора набувають вигляд спеціальних кривих – троххід та їх обвідних. Серед прикладів таких виробів слід назвати роторно-планетарні двигуни Ванкеля, які застосовуються в авіації, судно- і автомобілебудуванні [1, 2].

Роторно-планетарні механізми закладено в деякі схеми гідромашин – насосів, компресорів, маслостанцій тощо, які представляють інтерес для застосування у тому числі, і у аварійно-рятувальних службах. Слід зазначити, що інформація про роторно-планетарні механізми в меншій мірі поширена порівняно з інформацією про схеми інших гідравлічних машин.

Ознакою роторно-планетарної машини є наявність в її конструкції планетарного механізму, призначеного для переміщення ротора відносно корпусу машини (рис. 1). Роторно-планетарна машина (циліндричного типу) складається із корпусу, двох бокових поверхонь, які утворюють робочий простір, де рухається ротор трикутної форми (трикутник Релло).

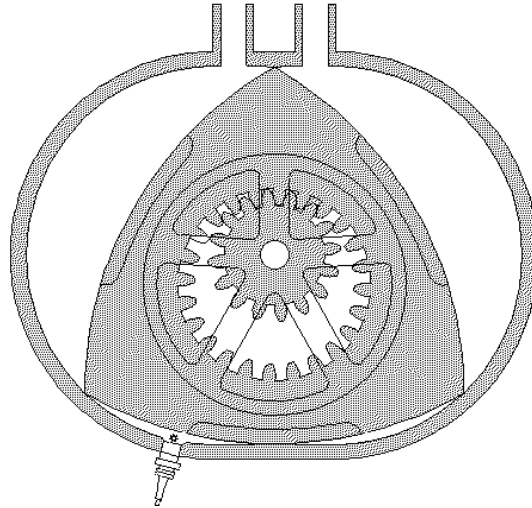


Рис. 1. Схема роторно-планетарної машини, де обкатка трикутного ротора здійснюється планетарним механізмом

Головною характеристикою роторно-планетарної машини є її продуктивність. Тобто який об'єм речовини вона може «перекачати» за один оберт трикутного ротора. Характеристику продуктивності машини доцільно пов'язати з обчисленням у часі об'ємів її робочих камер. У випадку циліндричного виконання ця задача зводиться до визначення функції зміни в часі площі фігур, які при обкатці розташовані між трикутником Релло і профілем корпусу. Тобто «на виході» розрахунків конструкції роторно-планетарної машини повинна бути функція її продуктивності.

Для коректного розрахунку роторно-планетарної машини необхідно погодити геометричні форми двох пар априорі взаємоспряжених кривих. Першу пару кривих складають робочі профілі корпусу і ротора. В процесі руху ротора необхідно забезпечити постійний точковий контакт зі стінками корпусу. Наявність планетарного механізму ускладнює закон їх взаємного переміщення. Другу пару кривих складають профілі зубів зубчатих коліс внутрішнього зчеплення. Для погодження цих пар кривих необхідно здійснити їх побудову з використанням одних і тих наперед обраних параметрів.

При цьому «побіжно» необхідно знайти цільову функцію – тобто опис продуктивності машини як функцію зміни у часі робочих об'ємів, обмежених профілями корпусу і ротора. Таким чином, «на вході» розрахунків повинні бути числові параметри, пов'язані з конструкцією роторно-планетарної машини, а «на виході» повинна бути шукана функція продуктивності роторно-планетарної машини.

Проведені в роботі дослідження виконано з позицій поєднання геометричних моделей трьох компонентів роторно-планетарної машини. При тому вказано можливі шляхи для розв'язання зазначених задач.

1. Врахування моделі формоутворення робочих профілів ротора і корпусу (статора), взаємне переміщення яких здійснюється за допомогою планетарного

механізму. Розрахунок робочих профілів роторно-планетарної машини доцільно здійснити з використанням функцій комплексних змінних.

2. Розроблення моделі опису об'ємів простору, обмежених робочими профілями ротора і статора, що визначаються функціями зміни у часі інтегральних характеристик машини. Одержання наближених функцій опису продуктивності машини доцільно здійснити за допомогою спеціальних графічних побудов.

3. Погодження параметрів машини Ванкеля з параметрами профілів зубів зубчастої передачі внутрішнього зчеплення, яка входить до конструкції роторно-планетарної машини. Погодження спряжень профілів ротора і корпусу машини з профілями зубів зубчастої передачі внутрішнього зачеплення планетарного механізму доцільно здійснити методом графічної обкатки.

Перераховане вказує на актуальність обраної проблеми для подальшого розвитку наукових основ розрахунку роторно-планетарних машин троххідного типу для застосування в підрозділах аварійно-рятувальних служб.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

В роботі [1] наведено історію створення та особливості розрахунків роторно-планетарної машини Ванкеля. У роботі [2] дається пояснення геометрії, конструкції та принципу роботи двигуна системи Ванкеля. Аналізується, як змінюється корисний об'єм камери машини в порівнянні з поршнеvim двигуном. Але розрахунки форми зубів зубчатих коліс планетарного механізму відсутні. У роботі [3] представлено метод розрахунку геометрії конструкції роторного двигуна, названий автором «функцією відхилення». Метод дозволяє проектувати роторно-планетарні двигуни з використанням спряжених профілів. Однак, цей метод не дозволяє враховувати інтегральні характеристики машини Ванкеля.

У роботі [4] показано можливість використання моделі вивчення робочих характеристик двотактного двигуна Ванкеля. Результати показують потенціал збільшення питомої потужності за рахунок застосування двотактного циклу двигуна Ванкеля. Але тут відсутні розрахунки форми зубів зубчатих коліс планетарного механізму. Робота [5] присвячена обчисленню еліптичного інтеграла для визначення робочого об'єму роторно-планетарного компресора. Показано, що похибка обчислення еліптичного інтеграла може становити до 20 % повного зсуву, залежно від співвідношення троххід і співвідношення розмірів параметрів. Зазначена невідомість впливає на реалізацію обчислень чисельним методом.

У роботі [6] наведено приклад програмного продукту, спеціально розробленого для моделювання двигуна Ванкеля та прогнозування його роботи. Проте розрахунок продуктивності робочих камер тут не передбачено. У роботі [7] аналізуються умови контакту між корпусом та ущільненням на трикутному роторі. Розглянуто конструкцію з різними коефіцієнтами ущільнення для різних профілів ротора з різним робочим навантаженням. Але похибки обчислень не показано.

У роботі [8] з використанням ANSYS 16.2 була розроблена модель гідродинаміки для унаочнення потоку для одно- та двоступінчастих розширювачів Ванкеля та для дослідження впливу на це геометричних параметрів конструкції. Але не досліджено зв'язок між робочими профілями ротора та корпусу та формою зубів зубчастого зачеплення планетарного механізму. У роботі [9] аналізується можливість використання програмних продуктів моделювання продуктивності поршневих двигунів для прогнозування роботи двигуна Ванкеля. Але посилання на програмний продукт відсутнє. У роботі [10] наведено варіанти описів робочих

профілів ротора та корпусу відповідно до побудови моделі двигунів Ванкеля. Але використання параметричних рівнянь приводить до необхідності аналізувати належність одержаних розв'язків до певних гілок контуру корпусу.

В роботі [11] наведено загальні відомості про розрахунки профілів корпусів і роторів роторно-планетарних машин. При цьому опис здійснюється з використанням параметричного представлення формул, а також з елементами функцій комплексних змінних. Методи визначення зміни у часі об'ємів їх робочих камер базуються на обчисленні еліптичних інтегралів. Але такі описи не є зручними для алгоритмів геометричного (і анімаційного) моделювання. Характерною ознакою роторно-планетарних машин трохойдного типу є те, що ротор здійснює свій обертовий рух в корпусі за допомогою планетарного механізму. При цьому профілями корпусу і ротора мають бути спеціальні криві – трохойди та їх обвідні [11]. Але на практиці, при проектуванні реальних виробів, із-за недосконалості методів профілювання фрагменти названих кривих, звичайно, замінялися дугами кіл, що не завжди відповідало дійсності. Результати такої заміни проявляються у тому, що деякі виготовлені вироби мають незначний ресурс експлуатації і невелику надійність. Знайти адекватний опис профілю корпусу і ротора можливо лише за допомогою геометричного моделювання різновидів обкатки планетарним механізмом. Крім того, важливим показником (інтегральною характеристикою) роторно-планетарних гідромашин трохойдного типу є їх витрати в часі (продуктивність), які бажано обчислювати з використанням геометричних моделей. Усунення недоліків опису деталей роторно-планетарних виробів дугами кіл та розробка інженерного методу визначення зміни у часі об'ємів їх робочих камер сприятиме розробці нових підходів до розрахунків профілів корпусів і роторів роторно-планетарних машин.

На розвиток цього напрямку досліджень сприяють роботи [12, 13], де започатковано дослідження з анімаційного моделювання результату обкатки планетарним механізмом. При цьому, ще не повністю дослідженими залишилися питання алгоритмічної реалізації взаємоспряжених кривих за допомогою функцій комплексного змінного та обчислення функцій зміни у часі інтегральних характеристик фігур, обмежених цими кривими. В роботі [14] запропоновано спосіб опису профілю корпусу з застосуванням двох основних параметрів – параметру розміру кривої та параметру ексцентриситету. Але автором не досліджено основні переваги цієї форми опису, особливо в разі її програмної реалізації. В роботі [15] наведено опис взаємоспряжених кривих профілів ротора і корпусу за допомогою функцій комплексного змінного. Проте, не дослідженими залишилися питання включення зазначених описів до програмної реалізації з врахуванням форми зубів зубчатої передачі планетарного механізму. В роботі [16] наведено спосіб опису трикутника Релло як елемента роторно-планетарної машини.

При цьому також не враховуються форми зубів зубчатої передачі планетарного механізму. В роботі [17] описано елементи геометричної обкатки для профілювання зубчатих коліс внутрішнього зчеплення. Однак, загальних формул для складання алгоритму не наведено. Одержані результати можна порівняти з результатами робіт [18, 19].

Однак, проведені дослідження не дозволяють створити інформаційне забезпечення геометричного моделювання різновидів формоутворення профілів ротора і корпусу в результаті операції обкатки, та визначення їх інтегральних характеристик. Зокрема це стосується проектування трохойдних машин роторно-

планетарного типу. Однією з причин цього була відсутність геометричних та математичних моделей, які б дозволили пояснити процес формоутворення та відсутність математичних процесорів, які б дозволили здійснювати дослідження на аналітичному та графічному рівнях.

Отже, в результаті огляду виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступний напрямок досліджень. Розробити спосіб розрахунку роторно-планетарної машини типу Ванкеля на основі геометричного моделювання робочих профілів і зміни робочих об'ємів в часі за умови погодження з параметрами зубчатих передач. Розрахунок робочих профілів роторно-планетарної машини необхідно виконати з використанням функцій комплексних змінних. Також не дослідженими залишається використання графічних побудов для одержання наближених функцій опису зміни у часі робочих об'ємів машини Ванкеля. Доцільним буде застосування методу графічної обкатки для погодження спряжень профілів ротора і статора машини з профілями зубів зубчатої передачі внутрішнього зачеплення планетарного механізму.

3. Мета і задачі дослідження

Метою дослідження є розробка способу розрахунку роторно-планетарної машини типу Ванкеля на основі геометричного моделювання робочих профілів і зміни робочих об'ємів в часі за умови погодження початкових даних з параметрами зубчатих передач.

Для досягнення мети необхідно вирішити наступні завдання:

- змоделювати робочі профілі статора і ротора планетарної машини;
- розробити спосіб визначення функції зміни в часі робочих об'ємів роторно-планетарної машини;
- розробити наближений спосіб графічної обкатки для визначення профілів зубчатих передач внутрішнього зчеплення.

4. Моделювання опису робочих профілів статора і ротора планетарної машини

Із застосуванням функцій комплексної змінної наведемо метод опису профілів роторів і корпусів роторно-планетарних епітрохейдних машин за умови їх взаємної спряженості. Розглянемо схему утворення на комплексній площині епітрохейд, рівняння яких:

$$E(t) = e^{iRt} + \frac{d}{R} e^{it}, \quad (1)$$

де $i = \sqrt{-1}$, e – основа натуральних логарифмів, R – радіус більшого ділильного кола, d – довжина утворюючого радіуса O_1A .

Тут і далі вважається, що величини умовні, і що радіус меншого кола за розміром на умовну одиницю менший від радіуса більшого кола R . На рис. 2 наведено схему утворення на комплексній площині епітрохейди при $R=3$.

Нагадаємо, що при утворенні епітрохейди у планетарному механізмі нерухомим є коло меншого радіуса, а рухоме коло більшого радіуса без проковзування котиться внутрішньою частиною по нерухомому колу. Далі у планетарному механізмі здійснимо «реверс» – тобто припустимо, що початкове рухоме коло буде нерухомим, а початкове нерухоме – рухомим. При цьому епітрохейда буде жорстко пов'язана з новоутвореним рухомим колом.

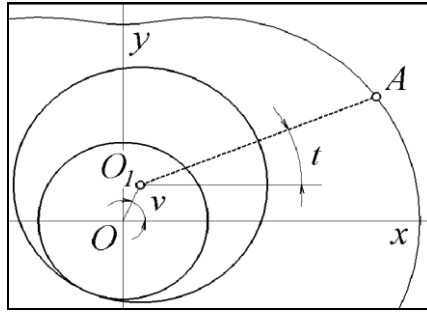


Рис. 2. Схема утворення епітрохіди при $R=3$

Для формалізації цієї дії позначимо через $\{a, b\}$ обкатку, яку здійснено планетарним механізмом, коли коло радіуса a є нерухомим, а радіуса b – рухомим. Тоді розглянута епітрохіда буде одержана в результаті планетарної обкатки в системі $\{R-1, R\}$. Оберемо її як єдине ціле з колом радіуса $R-1$, і здійснимо її обкатку в системі $\{R, R-1\}$.

Таким чином, в результаті обкатки епітрохідою одержимо дві обвідні – внутрішню і зовнішню. Логічним буде вважати, що коли профілю корпусу надати форму зовнішньої обвідної, то профілем ротора слід обрати початкову епітрохіду, а якщо профіль корпусу матиме форму початкової епітрохіди, то профіль ротору збігатиметься з внутрішньою обвідною.

При обкатці вважається, що епітрохіда становить одне ціле з колом радіуса $R-1$, яке котиться без ковзання всередині кола радіуса R . Для прикладу оберемо параметри епітрохіди $R=3$ і $d=18$. Тоді на комплексній площині рівняння «початкової» епітрохіди має вигляд:

$$G(t) = e^{i3t} + 6e^{it}. \quad (2)$$

На комплексній площині сім'ю епітрохід, одержаних в результаті обкатки планетарним механізмом, можна описати рівнянням:

$$W(t, v) = -e^{2iv} + (e^{3it} + 6e^{it})e^{-iv}. \quad (3)$$

Розглянемо задачу опису обвідних сім'ї цих епітрохід. Для одержимо вираз для якобіана у вигляді вигляд:

$$J = 12i[\sin 3(v-t) + 2\sin(3v-t) - 2\sin 2t]. \quad (4)$$

З рівняння $J = 0$ одержуємо значення параметра v , який характеризує взаємне положення кривих в процесі обкатки:

$$v = -\frac{i}{3} \left(it + \ln \left(\frac{10 - 10\cos 4t + 9\cos 2t + 6i \sin 4t - 15i \sin 2t}{8\cos 4t - 17} \right) \right). \quad (5)$$

Опис (одночасно) зовнішньої і внутрішньої обвідних одержуємо у вигляді:

$$U(t) = -e^{\frac{2it}{3}} \frac{9\cos 2t + 112 - 58\cos 4t + 6i \sin 4t - 15i \sin 2t + e^{2it}(17 - 8\cos 4t)}{(8\cos 4t - 17) \sqrt[3]{\frac{-9\cos 2t - 10 + 10\cos 4t + 6i \sin 4t - 15i \sin 2t}{8\cos 4t - 17}}} \quad (6)$$

На рис. 3 наведено зображення двох обвідних. Обвідні належать кривій, яка має точки само перетину, наведено пояснення того, в якому порядку рухається точка по кривій, коли значення параметра t змінюється в межах від 0 до 3π . А саме: трасування виконується в такому порядку: 1–2–3–4–5–3–6–1–4–6–2–5–1.

Зазначимо, що відрізки 4–5, 1–4 і 5–1 – це шляхи миттєвих стрибків точки на кривій. Внутрішня обвідна складається з трьох гілок кривої: 2–3, 3–6 і 6–2. Зовнішня обвідна складається з шести гілок кривої: 2–5, 5–3, 3–4, 4–6, 6–1 і 1–2. Складність опису окремо кожної обвідної полягає у визначенні значення параметра t , який відповідає цим точкам і залежить від d .

Визначати величину параметра t , яка відповідає точці 2, будемо з рівняння $\text{Im}(U(t)) = 0$, утвореного з уявної частини виразу (6). Обчислення показує, що при $d=21$ одержуємо $t=1,0067$. Це значення параметра відповідає прийнятному опису трикутника Релло, зображеному на рис. 4.

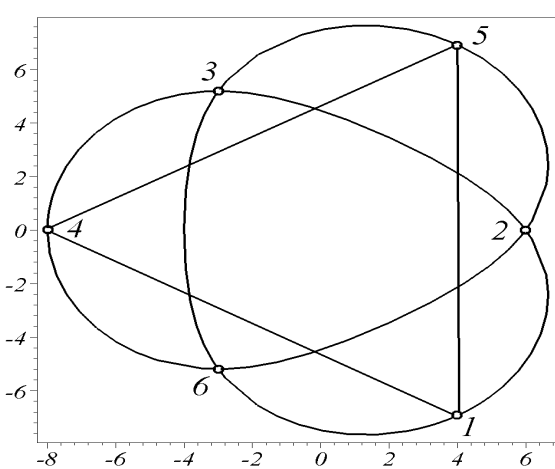


Рис. 3. Обвідні сім'ї епітрохід та пояснення до порядку трасування двох обвідних

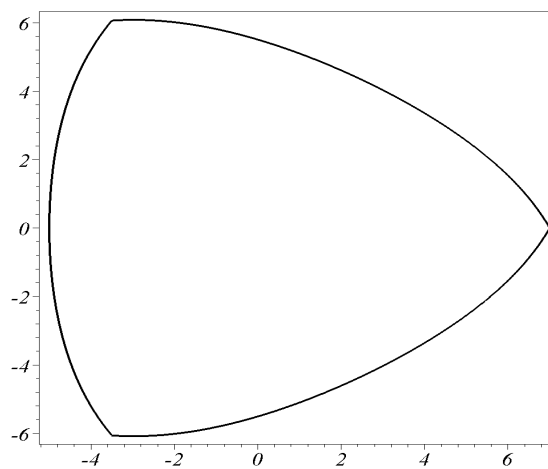


Рис. 4. Геометричний образ трикутника Релло, одержано з використанням функції $U(t)$ при $d=21$ і $t=1,0067$

На практиці іноді зручно використовувати спрощений опис профілю ротора Релло (при «нульовому» значенні параметра обкатки):

$$x(\varphi) = \frac{d \cos t}{\left| \cos \frac{3\varphi}{4} \right| + \left| \sin \frac{3\varphi}{4} \right|}; \quad y(\varphi) = \frac{d \sin \varphi}{\left| \cos \frac{3\varphi}{4} \right| + \left| \sin \frac{3\varphi}{4} \right|}, \quad (7)$$

а також опис профілю корпусу:

$$x = \cos \varphi + d \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right); \quad y = \sin \varphi + d \sin \left(\frac{\varphi}{3} \right), \quad (8)$$

де φ – параметр обкатки; d – параметр розміру профілів ротора і корпусу.

Отже, за допомогою формул (7) і (8) можна наближено описати профіль ротора і корпусу роторно-планетарної епітрохідної машини Ванкеля.

5. Розробка способу визначення функції зміни часу робочих об'ємів роторно-планетарної машини

Для геометричного моделювання робочих об'ємів роторно-планетарних машин пропонується наближений метод розрахунку за вузловими точками площі

між троходою та її обвідними. Для визначеності розглянемо роторно-планетарні машини у циліндричному виконанні. Тоді, робочі об'єми машин будуть пропорційні площам (плоских) фігур, які розташовані між обвідними параметричних сімей троход і миттєвими положеннями троходи в процесі її обкатки планетарним механізмом. Тобто у випадку циліндричного оформлення гідравлічної машини продуктивність визначатиметься площею фігури, яка розташована між контурами профілів ротора і корпусу. Метод полягає у тому, що спочатку вузлові точки синхронно «розставляються» на внутрішній та зовнішній обвідних. Далі ці точки сполучаються відрізками і визначаються точки перетину одержаних відрізків з миттєвими положеннями троходи в процесі її обкатки. В процесі обкатки планетарним механізмом троходи будуть змінюватися області площини, які розташовані між миттєвими положеннями цієї троходи та обвідними. При цьому області можуть бути і багатозв'язними. Це затрудняє обчислення площ за допомогою «прямого» інтегрування, адже при цьому необхідно розв'язати проблему автоматичного визначення меж інтегрування. Крім того, якщо ця проблемі і буде розв'язана, то для традиційних способів виникне нова проблема, пов'язана з обчисленням еліптичних інтегралів. Але точно еліптичні інтеграли не обчислюються, а алгоритми наближеного їх обчислення не є наочними. Тому доцільною буде розробка інженерного метода обчислення площ зазначених фігур.

Далі для прикладу розглянемо варіант розрахунку епітроходної схеми дії ротаційної машин із внутрішньою та зовнішньою обвідними при $R/(R-1)=3/2$. Спочатку визначимо значення параметра t , яке визначить самоперетин кривої.

Для цього на утворимо рівняння з уявної частини виразу:

$$\text{Im}(U(t)) = 0. \quad (9)$$

В результаті розв'язання рівняння (9) одержимо два корені $t_1=1,0069$ і $t_2=2,1347$. Перейдемо до параметричного завдання кривої $x=x(t)$ і $y=y(t)$. Для складання масивів вузлових точок, які будуть розташовані на обвідних, позначимо $t_i = \frac{i t_1}{N}$.

Масив значення абсцис $XX[i]$ і ординат $YY[i]$ для зовнішньої обвідної слід формувати за правилами:

$$\begin{aligned} XX[i] &= x(t_i); \quad YY[i] = y(t_i); \\ XX[i+N] &= x(t_i - t_1 + \pi); \quad YY[i+N] = y(t_i - t_1 + \pi); \\ XX[i+2N] &= x(t_i + \pi); \quad YY[i+2N] = y(t_i + \pi); \\ XX[i+3N] &= x(t_i - t_1 + 2\pi); \quad YY[i+3N] = y(t_i - t_1 + 2\pi); \\ XX[i+4N] &= x(t_i + 2\pi); \quad YY[i+4N] = y(t_i + 2\pi); \\ XX[i+5N] &= x(t_i - t_1); \quad YY[i+5N] = y(t_i - t_1); \end{aligned}$$

Позначимо $t_i = \frac{i \left(t_2 - \frac{\pi}{2} \right)}{N}$ для складання масивів вузлових значень абсцис $XX[i]$ і ординат $YY[i]$ точок для внутрішньої обвідної, які слід формувати за правилами:

$$\begin{aligned}
xx[i] &= x\left(t_i + \frac{\pi}{2}\right); \quad yy[i] = y\left(t_i + \frac{\pi}{2}\right); \\
xx[i+N] &= x(t_i - t_2 + \pi); \quad yy[i+N] = y(t_i - t_2 + \pi); \\
xx[i+2N] &= x\left(t_i + \frac{3\pi}{2}\right); \quad yy[i+2N] = y\left(t_i + \frac{3\pi}{2}\right); \\
xx[i+3N] &= x(t_i - t_2 + 2\pi); \quad yy[i+3N] = y(t_i - t_2 + 2\pi); \\
xx[i+4N] &= x\left(t_i + \frac{5\pi}{2}\right); \quad yy[i+4N] = y\left(t_i + \frac{5\pi}{2}\right); \\
xx[i+5N] &= x(t_i - t_2); \quad yy[i+5N] = y(t_i - t_2).
\end{aligned}$$

Такі правила формування масивів дозволяють розташувати вузлові точки підряд і синхронно на обох обвідних за умови їх проходження проти напрямку годинникової стрілки. В результаті цього можна скласти $6N$ рівнянь прямих, які проходять через пари точок:

$$x = xx[i] + p(XX[i] - xx[i]); \quad y = yy[i] + p(YY[i] - yy[i]). \quad (10)$$

Якщо рівняння епітрохоїди у системі координат OXY обрати у вигляді:

$$f(X, Y) \equiv \left(\sin\left(3 \arccos\left(\frac{A^2 + 9 - d}{6A}\right)\right) + \frac{d}{18} \sqrt{36 - \left(\frac{A^2 + 9 - d}{A}\right)^2} \right)^2 - Y^2 = 0, \quad (11)$$

де $A = \left(27|X| + \sqrt{729X^2 + d^3 - 27d^2 + 243d - 729}\right)^{\frac{1}{3}}$, то опис її миттєвих положень при переміщенні на кут ν при планетарному русі у глобальній системі координат матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
f\left((x - \cos \nu) \cos \frac{\nu}{R-1} - (y - \sin \nu) \sin \frac{\nu}{R-1}, \right. \\
\left. (x - \cos \nu) \sin \frac{\nu}{R-1} + (y - \sin \nu) \cos \frac{\nu}{R-1} \right) = 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

Далі наведемо ілюстративний приклад. Замість схеми «класичної» машини Ванкеля оберемо роторно-планетарну машину, схему якої зображено на рис. 5. Таку заміну зроблено з метою можливості зображати відрізки більшої довжини, які сполучають вузлові точки на профілі ротора і корпусу. У машині Ванкеля зазначені профілі щільніше припасаються, тому довжини відрізків будуть малими. Така заміна на сутність запропонованого способу не впливає. На рис. 5 при $N=15$ і $d=12$ наведено зображення двох обвідних, вузлові точки на яких сполучені відрізками, та миттєві положення епітрохоїди для трьох значень кута ν .

Для визначення точок перетину миттєвих положень епітрохоїди з відрізками необхідно розв'язати відносно параметра p систему рівнянь (10) і (12). Після обчислень одержимо масив значень абсцис $xr[i]$ і ординат $yr[i]$ точок, які дискретно представляють положення епітрохоїди. В результаті одержимо дві фігури між обвідними, які доцільно вважати об'єднанням множини чотирикутників.

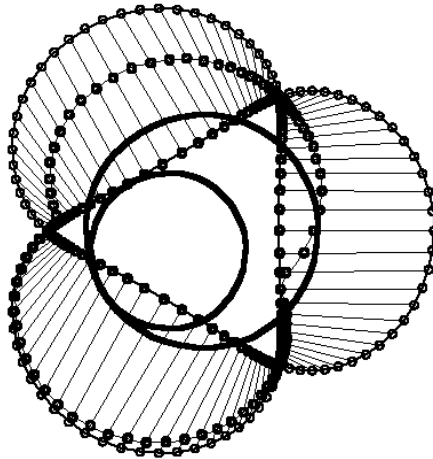


Рис. 5. Розташування вузлових точок на обвідних для одного з миттєвих положень епітрохоїди

Площі чотирикутників обчислюємо за формулою Герона після розбиття їх на два трикутники. Після підсумовування площ всіх прямокутників одержимо наближене значення двох площ між епітрохоїдою і кожною з обвідних. Змінюючи кут ν , одержуємо графік зміни площ в залежності від кута оберту епітрохоїди ν . У збіжності обчислювального процесу можна перекопатися шляхом подвоєння значення N . На рис. 6 наведено графік функції $S_{2_{vn}}$, який визначає зміну площі між епітрохоїдою і внутрішньою обвідною. Також можна визначити і графік функції $S_{2_{na}}$, який визначає зміну площі між епітрохоїдою і зовнішньою обвідною. Ці графіки будуть симетричними відносно горизонталі, розташовані на однакових відстанях від екстремальних значень функції $S_{2_{vn}}$.

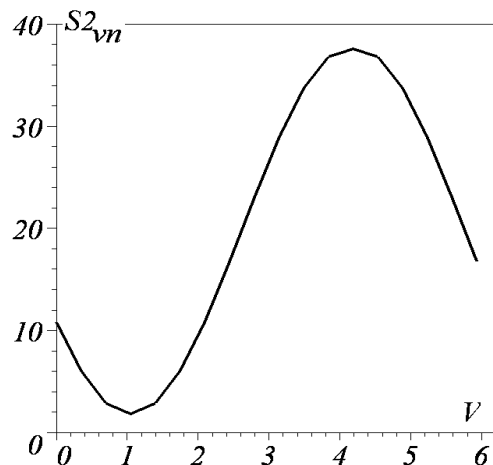


Рис. 6. Графік залежності площ між миттєвими положеннями епітрохоїди і внутрішньою обвідною

Одержані графіки можна використати при аналізі продуктивності епітрохоїдальних гідравлічних машин. При цьому графік функції $S_{2_{na}}$ слід використовувати тоді, коли профілем корпусу буде зовнішня обвідна, а профілем ротора – епітрохоїда, а графік функції $S_{2_{vn}}$ слід використовувати тоді, коли профілем корпусу буде епітрохоїда, а контур ротора матиме форму внутрішньої обвідної.

Отже, при конструюванні роторно-планетарних гідравлічних машин троходного типу доцільно використовувати метод визначення їх продуктивності шляхом обчислення об'ємів простору за вузловими точками.

6. Розробка способу визначення профілів зубчатих передач внутрішнього зчеплення роторно-планетарної машини

Наведемо геометричне моделювання профілів зубів внутрішнього зубчатого зчеплення як взаємоспряжених кривих. При цьому форма зубів нерухомого колеса з ділильним колом R_1 визначається в результаті комп'ютерної обкатки рухомого колеса з ділильним колом R_2 як обвідна миттєвих положень зубів за умови, що обкатка узгоджена відносно спряженості профілів ротора і корпуса роторно-планетарної машини трохідного типу.

Нехай зуб, що формується, пов'язаний з нерухомою системою координат Oxy , а вихідний зуб разом з рухомою системою координат OXY здійснює процес обкатки за схемою планетарного механізму. Тобто, коли ділильне коло більшого радіуса котиться без проковзування своєю внутрішньою частиною по нерухомому ділильному колу меншого радіуса (рис. 7).

Тоді, зв'язок між системами координат має вигляд:

$$\begin{aligned} X &= x \cos C + y \sin C - (R_2 - R_1) \cos 2C; \\ Y &= -x \sin C + y \cos C - (R_2 - R_1) \sin 2C. \end{aligned} \quad (13)$$

Опис спрощених профілів зубів рухомого зубчатого колеса мають вигляд:

$$x = Z(t) \cos \varphi; \quad y = Z(t) \sin \varphi, \quad (14)$$

де $Z=Z(t)$ – рівняння виробляючого контуру (не плутати з вихідним контуром).

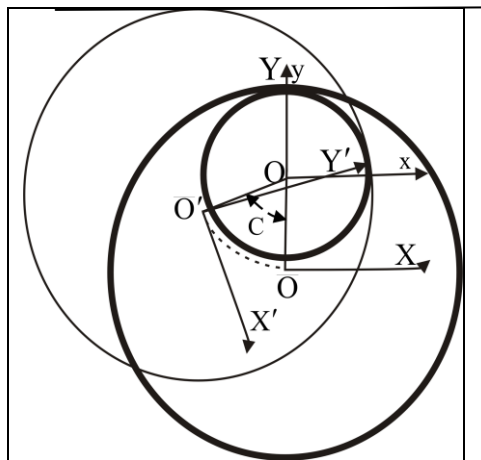


Рис. 7. Формули зв'язку між системами координат

Залежно від обраної функції $Z(t)$ можна одержати такі різновиди спрощених профілів зубів рухомого зубчатого колеса:

$$\text{а) синусоїдальний } Z = R_2 + H \sin\left(\frac{NR_2 t}{2R_1}\right); \quad (15)$$

$$\text{б) пилкоподібний } Z = R_2 + H \arcsin\left(\sin \frac{NR_2 t}{2R_1}\right); \quad (16)$$

$$\text{в) меандровий } Z = R_2 + H \operatorname{signum}\left(\sin \frac{NR_2 t}{2R_1}\right), \quad (17)$$

де φ – параметр обкатки; t – параметр форми зубів; H – висота зуба рухомого колеса; N – кількість зубів нерухомого (пасивного) колеса; $N_p = NR_2/R_1$ – кількість зубів рухомого (активного) колеса.

На рис. 8 в якості приклада зображено зубчате колесо меандрового типу для рухомого кола радіуса $R_2=30$, повної висоти зуба $H=3$ і $N_p=30$.

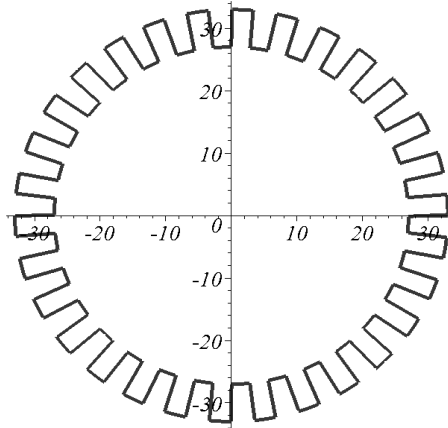


Рис. 8. Приклад зубчатого колеса меандрового типу

Обкатку рухомим зубчатим колесом опишемо за допомогою формул:

$$x = w_1 \cos \frac{C}{2} + w_2 \sin \frac{C}{2}; \quad y = w_2 \cos \frac{C}{2} - w_1 \sin \frac{C}{2}, \quad (18)$$

$$\text{де } w_1 = Z \left(\frac{NR_2 h_t}{2\pi R_1} \right) \cos t - \sin C; \quad w_2 = Z \left(\frac{NR_2 h_t}{2\pi R_1} \right) \sin t - \cos C.$$

На рис. 9 зображено геометричну модель роторно-планетарної машини Ванкеля. Наведено окрему фазу обкатки зубчатого колеса меандрового типу сумісно з робочими профілями корпусу і ротора.

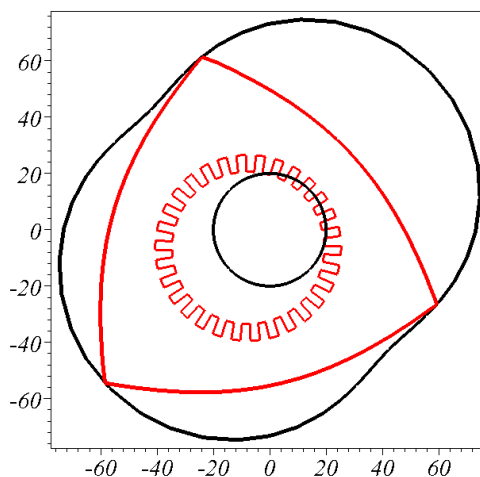


Рис. 9. Одна з миттєвих фаз обкатки зубчатим колесом меандрового типу

Результатом одержаної обкатки колеса меандрового типу буде обвідна спеціальної форми. На рис. 10 вона обмежує контур не зафарбованої площі. Зазначена обвідна співпадатиме з шуканим профілем зубів нерухомого зубчатого колеса. Її форма буде узгоджена з вхідними параметрами роторно-планетарної машини.

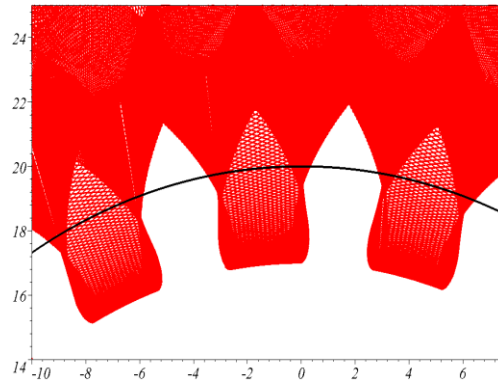


Рис. 10. Форми профілів зубів нерухомого зубчатого колеса для планетарного механізму

На завершення наведемо спосіб точного аналітичного опису зубців пасивного колеса шляхом визначення обвідної миттєвих положень зубців активного зубчастого колеса, наприклад, синусоїдальних, заданих у вигляді:

$$x = (R_2 + H \sin R_2 t) \cos t; \quad y = (R_2 + H \sin R_2 t) \sin t.$$

Рівняння сім'ї миттєвих положень активного зубчастого колеса має вигляд:

$$\begin{aligned} x &= R_2 \cos(t - C) + (R_1 - R_2) \sin 3C + \frac{H}{2} (\sin(R_2 t - C + t) + \sin(R_2 t + C - t)); \\ y &= R_2 \sin(t - C) + (R_1 - R_2) \cos 3C + \frac{H}{2} (\cos(R_2 t - C + t) + \cos(R_2 t + C - t)). \end{aligned} \quad (19)$$

Для визначення рівняння обвідної сім'ї миттєвих положень активного зубчастого колеса слід обчислити якобіан $J = \begin{vmatrix} x'_C & x'_t \\ y'_C & y'_t \end{vmatrix}$. Прирівнявши значення якобіана до нуля, одержимо рівняння:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} (R_1 R_2 H + R_1 H - R_2 H - R_2^2 H) \sin(t + 2C + R_2 t) + \\ &+ \frac{3}{2} (R_1 R_2 H - R_1 H + R_2 H - R_2^2 H) \sin(t + 2C - R_2 t) + \\ &\quad + R H_2^2 \cos R_2 t - 3 R_2^2 \cos(2C + t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} R_2 H^2 \sin(2R_2 t) + 3 R_1 R_2 \cos(2C + t) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

З рівняння (20) визначимо значення параметра C (вираз громіздкий, тому тут не наводиться), яке підставимо в вирази (19), в результаті чого одержуємо точний вираз для обвідної сім'ї миттєвих положень активного зубчастого колеса – тобто аналітичний опис профілю зубців пасивного зубчастого колеса (вираз громіздкий, тому тут також не наводиться). На рис. 11 наведено зображення профілю зубців пасивного колеса (тобто зубців на роторі), коли твірним контуром зубців активного колеса буде синусоїда. Параметри зчеплення такі: $R_1=20$; $R_2=30$; $H=3$; $N=8$ (кількість зубців нерухомого колеса); $N_p=12$ (кількість зубців рухомого колеса). В загальному випадку (для пилоподібного і меандрового твірних контурів) одержано наближений розв'язок у вигляді послідовності точок, належних контуру зубців пасивного колеса. Для визначення координат точок на контурі спрофільованого зубчатого колеса доцільно використати одну з основних властивостей зубчатої передачі, гідно якої точка контакту пари зубів знаходиться на дотичній до двох основних кіл коліс.

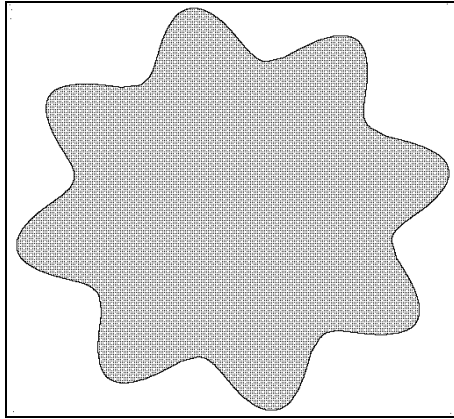


Рис. 11. Зубці пасивного колеса, коли твірним контуром зубців активного колеса є синусоїда

Розроблений спосіб дозволяє узгодити зубчасту передачу внутрішнього зачеплення з формами профілів ротора і корпусу машини, що дало змогу за допомогою одних і тих же параметрів описати взаємне переміщення двох пар спряжених кривих, а саме: профілів ротора і корпусу, а також профілів зубців пари зубчатих коліс.

7. Обговорення способу розрахунку роторно-планетарної машини типу Ванкеля і її компонентів

Конструкції роторно-планетарних машини типу Ванкеля в даний час переживають ренесанс у промисловості через простоту її конструкції. Це стосується і двигунів внутрішнього згоряння типу Ванкеля через високе значення відношення потужності до маси. Схему роторно-планетарної машини системи Ванкеля закладено в конструкції різноманітних гідромашин, насосів, компресорів тощо. Порівняно з іншими схемами вона ще всебічно не досліджена. Причина цього полягає в у тому, що рух ротора здійснюється за допомогою планетарного механізму, основу якого складає зубчаста передача внутрішнього зчеплення. Тобто, виникає проблема погодження геометричних форм ротора і корпусу з формами зубів планетарного механізму. Порівняно з іншими схемами гідромашин це викликає додаткові проблеми. Отримані результати пояснюються можливістю застосувати елементи геометричного моделювання до процесу розрахунку машини системи Ванкеля.

Особливості запропонованого методу і отриманих результатів в порівнянні з існуючими полягають у початковому спрямуванні досліджень на одержання функціональної залежності визначення продуктивності машини шляхом обчислення об'ємів простору між профілями ротора і корпусу (циліндричне виконання). Для цього було враховано вхідні параметри роторно-планетарної машини. А саме: радіуси більшого і меншого кіл, що характеризують зуби зубчастої передачі планетарного механізму. А також, параметр ексцентриситет, який вказує вид роторно-планетарної машини. Зазначимо, що машина Ванкеля є її видом, коли відношення зазначених радіусів буде $3/2$ (значення одиниць умовні).

Наведеним дослідженням притаманні певні обмеження. Вони проявляються у випадках переходу від умовних розмірів та фізичних параметрів до реальних величин. Для комплексного вивчення проблеми на рівні створення конструкції роторно-планетарної машини необхідні додаткові дослідження. При цьому слід приділити увагу обчисленню площі поверхні та об'єму камер, які повинні бути однаковими у всьому діапазоні обертання головного валу. Для цього слід

підготувати кінематичне моделювання для встановлення площі поверхні та об'єму робочої камери. Зазначені недоліки в перспективі можуть бути усунуті шляхом створення програмного забезпечення 1D-моделювання в реальних розмірах машини Ванкеля за умови забезпечення рівності площі поверхні та об'єму робочої камери. Подальші дослідження доцільно поєднати з розв'язанням оберненої задачі розрахунку роторно-планетарної машини. Тобто, при заданій функціональній залежності продуктивності машини необхідно визначити параметри роторно-планетарного механізму. Ця задача може виникнути при конструюванні роторно-планетарних гідромашин, які б задовольняли, наприклад, мінімальним пульсаціям при перекачуванні рідини. Крім того, перспективним є створення віртуальної роторно-планетарної машини. Тобто, розробки системи комп'ютерних програм для моделювання дії роторно-планетарної машини з врахуванням максимальної (за запитами замовника) кількості параметрів. Розвиток досліджень при цьому може зіткнутися з труднощами технологічного характеру, а саме: з питаннями надійності, міцності та довговічності, які слід закладати в деякі схеми гідромашин, насосів, компресорів, маслостанцій і т. ін. щодо застосування, у тому числі, і у підрозділах аварійно-рятувальних служб.

8. Висновки

1. Створено геометричні моделі робочих профілів статора і ротора планетарної машини з використанням функцій комплексної змінної. Це дозволило формалізувати процес формоутворення їх профілів. Для зручності розрахунку робочих профілів роторно-планетарної машини використано функції комплексних змінних. Показано, що в результаті обкатки епітрохоїдою одержуються дві обвідні – внутрішня і зовнішня. В якості прикладу наведено розрахунок профілів роторно-планетарної машини Ванкеля у тривіальному випадку (з параметрами в умовних величинах) мають такі значення: радіус більшого кола $R=3$, радіус меншого кола $r=2$.

2. Розроблено графічний спосіб визначення функції зміни в часі робочих об'ємів роторно-планетарної машини. Зазначену функцію визначає зміна у часі об'ємів простору, обмежених робочими профілями ротора і статора. Одержання наближених функцій опису зміни у часі робочих об'ємів машини було здійснено за допомогою спеціально розроблених графічних побудов.

3. Розроблено наближений спосіб графічної обкатки для визначення профілів зубчатих передач внутрішнього зчеплення за умови їх погодження з параметрами роторно-планетарної машини. Погодження параметрів машини Ванкеля виконано з врахуванням параметрів профілів зубів зубчатої передачі внутрішнього зчеплення, яка входить до конструкції роторно-планетарної машини. Розроблено метод графічної обкатки для погодження спряжень профілів ротора і статора машини з профілями зубів зубчатої передачі внутрішнього зачеплення планетарного механізму.

Література

1. Mc Farland & Company. Wankel rotary engine: a history by John B. Hege. Jefferson, North Carolina, and London. 2006. 247 p. URL: <https://www.worldcat.org/title/wankel-rotary-engine-a-history/oclc/123964823>

2. Espinosa L. F., Lappas P. Mathematical modelling comparison of a reciprocating, a Szorenyi rotary, and a Wankel rotary engine. *Nonlinear Engineering*. 2019. Vol. 8. P. 389–396. doi: 10.1515/nleng-2017-0082

3. Warren S. E. New rotary engine designs by deviation function method. Los Angeles. 2012. 138 p.
4. Kutlar O. A., Malkaz F. Two-stroke Wankel type rotary engine: a new approach for higher power density. *Energies*. 2019. Vol. 12. 4096. 22 p. doi:10.3390/en12214096
5. Beard J. E., Pennock G. R. Calculation of the displacement of a Wankel rotary compressor. International Compressor Engineering Conference School of Mechanical Engineering. 1992. 10 p. <https://core.ac.uk/outputs/4956490>
6. Reddy A. R., Narendra Babu G., Neelakanta J., Jangam Sumanth, Sreenivasulu M. Design and Thermal simulation of Wankel engine rotor using catia and MSC patran. 2019 JETIR. April 2019. Vol. 6. Issue 4. 6 p. <https://www.jetir.org/index?v=6&i=4&j=April%202019>
7. Chiu-Fan Hsieh, Hao-Yu Cheng. Effects of various geometric designs on the flow characteristics of a triangular rotary engine. *Mechanical Engineering Research*. 2015. Vol. 5. № 1. 11 p. doi: 10.5539/mer.v5n1p1
8. Sadiq G., Tozer G., Al-Dadah R. Mahmoud. CFD simulations of compressed air two stage rotary Wankel expander – parametric analysis. *Energy Conversion and Management*. 2017. Vol. 142. P. 42–52. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2017.03.040>
9. Tartakovsky L., Baibikov V., Gutman M., Veinblat M. Simulation of Wankel engine performance using commercial software for piston engines. October 2012. 15 p. URL: <https://www.researchgate.net/publication/285199690>
10. Drogosz P. Geometry of the Wankel rotary engine. *Journal of KONES Powertrain and Transport*. 2010. Vol. 17. No. 3. 6 p. URL: <https://docplayer.net/52157713-Geometry-of-the-wankel-rotary-engine.html>
11. Сухомлинов Р. М. Трохоидные роторные компрессоры. Харьков: ХГУ. Вища школа. 1975. 152 с. URL: <http://www.tsatu.edu.ua/pg/wp-content/uploads/sites/15/perelik-pidruchnykiv-ta-posibnyki-fsp.pdf>
12. Куценко Л. М., Бобов С. В., Росоха С. В. Методи геометричного моделювання в задачах пожежної безпеки. Харків: АЦЗУ. 2004. 175 с.
13. Куценко Л. М., Рева В. Г. Визначення об'ємних витрат роторно-планетарних трохойдних гідромашин. Сборник научных трудов Киевского национального университета технологий и дизайна. 2004. Спецвыпуск. С. 170–180.
14. Васильев О. Б. Профілювання корпусу двигуна Ванкеля в результаті обкатки трикутником Релло. Праці Таврійської державної агротехнічної академії. 2003. Т. 19. Вип. 4. С. 109–113.
15. Рева В. Г. Опис взаємоспряжених кривих за допомогою функцій комплексної змінної. Праці Таврійської державної агротехнічної академії. 2004. Т. 23. Вип. 4. С. 70–74.
16. Суліма В. В. Опис криволінійних трикутників, які при синхронному обертанні забезпечують точковий дотик. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2000. Вип. 67. С. 231–233.
17. Воронцова Д. В. Геометричний синтез роторно-планетарних машин з урахуванням їхньої динаміки. Геометричне та комп'ютерне моделювання. Збірник наукових праць Української асоціації з прикладної геометрії «ХДУХТ». 2007. Вип. 20. С. 107–112.
18. Нго Къеу Нъи, Ропота Е.П., Сухомлинов Р. М. Определение времясечения распределительных окон трохойдных роторно-поршневых машин. Вести Харьк.политехн. ин-та. 1973. Вип 83. С. 5–9.

19. Peden M., Turner, M, Turner, JWG Bailey. Comparison of 1-D Modelling Approaches for Wankel Engine Performance Simulation and Initial Study of the Direct Injection Limitations. SAE Technical Paper Series. № 2018-01-1452. P. 17. doi: 10.4271/2018-01-1452

L. Kutsenko, DSc, Professor, Professor of the Department

S. Vasyliiev, PhD, Associate Professor of the Department

B. Kryvoshei, PhD, Associate Professor of the Department

O. Sukharkova, Lecturer of the Department

National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

CALCULATION OF WORKING PROFILES OF ROTARY MACHINES, CONSISTENT WITH THEIR GEARS

A method for calculating a rotary planetary machine of the Wankel system is presented. A feature of the Wankel machine is that the movement of the rotor in relation to the body is carried out using a planetary mechanism, which is based on an internal gear. The proposed method makes it possible to take into account the connection between the parameters of the geometric shape of two pairs of mutually conjugate curves characteristic of the Wankel machine. The first pair of curves are the working profiles of the casing and the rotor. The second pair is formed by the tooth profiles of the internal gears. Accounting for this connection made it possible to find a description of the function of the change in time of working volumes limited by the profiles of the body and rotor (i.e., to determine the productivity of the machine). As a result of the research, it was found that the performance of the Wankel machine can be found by taking into account three features of this machine. The shaping of the conjugated working profiles of the rotor and stator is carried out using a planetary mechanism, for the calculation of which the functions of complex variables are used. The performance function of the machine is determined by the change in time of the volumes of space limited by the working profiles of the rotor and housing. An approximate description of the functions of changing the working volumes of the machine with time was carried out using specially developed graphic constructions. To match the geometrical parameters of the Wankel with the parameters of the tooth profiles of the gear train of the internal clutch, a method of graphic running has been developed. The results obtained are useful because the scheme of the considered Wankel machine is embedded in the design of the internal combustion engine of the same name, as well as in the design of various hydraulic machines, pumps, compressors, etc.

Keywords: geometric modeling, rotary planetary mechanism, Wankel machine, functions of a complex variable

References

1. Mc Farland & Company (2006). The Wankel rotary engine: a history by John B. Hege, 247. URL: <https://www.worldcat.org/title/wankel-rotary-engine-a-history/oclc/123964823>
2. Espinosa, L. F., Lappas, P. (2019). Mathematical Modelling Comparison of a Reciprocating, a Szorenyi Rotary, and a Wankel Rotary Engine. *Nonlinear Engineering*, 8, 389–396. doi: 10.1515/nleng-2017-0082
3. Warren, S. E. (2012). *New Rotary Engine Designs by Deviation Function Method*. Los Angeles, 138.
4. Kutlar, O. A., Malkaz, F. (2019). Two-stroke Wankel type rotary engine: a new approach for higher power density. *Energies*, 12, 4096, 22. doi: 10.3390/en12214096
5. Beard, J. E., Pennock, G. R. (1992). Calculation of the displacement of a Wankel rotary compressor. *International Compressor Engineering Conference School of Mechanical Engineering*, 10. URL: <https://core.ac.uk/outputs/4956490>
6. Reddy, A. R., Narendra Babu, G., Neelakanta, J., Jangam, Sumanth, Sreenivasulu, M. (2019). Design and Thermal simulation of Wankel engine rotor using catia and MSC patran. *JETIR*, 6 (4), 6. URL: <https://www.jetir.org/indexx?v=6&i=4&j=April%202019>

7. Chiu-Fan, Hsieh, Hao-Yu, Cheng. (2015). Effects of various geometric designs on the flow characteristics of a triangular rotary engine. *Mechanical Engineering Research*, 5, 1, 11. doi:10.5539/mer.v5n1p1
8. Sadiq, G., Tozer, G., Al-Dadah, R., Mahmoud. (2017). CFD simulations of compressed air two stage rotary Wankel expander – parametric analysis. *Energy Conversion and Management*, 142, 42–52. URL: doi: 10.1016/j.enconman.2017.03.040
9. Tartakovsky, L., Baibikov, V., Gutman, M., Veinblat, M. (2012). Simulation of Wankel engine performance using commercial software for piston engines, 15. URL: <https://www.researchgate.net/publication/285199690>
10. Drogosz, P. (2010). Geometry of the Wankel rotary engine. *Journal of KONES Powertrain and Transport*, 17, 3, 6. URL: <https://docplayer.net/52157713-Geometry-of-the-wankel-rotary-engine.html>
11. Sukhomlinov, R. M. (1975). Trokhoidnyye rotornyie kompressory. Khar'kov: KHGU Vishcha shkola, 152. URL: <http://www.tsatu.edu.ua/pg/wp-content/uploads/sites/15/perelik-pidruchnykiv-ta-posibnyki-fsp.pdf>
12. Kutsenko, L. M., Bobov, S. V., Rosokha, S. V. (2004). Metodi geometrichnogo modelyuvannya v zadachakh pozhvezhnoï bezpeki. Navchal'niy posibnik. Khar'kov: ATSZU, 175.
13. Kutsenko, L. M., Reva, V. G. (2004). Vznachennya ob'êmnikh vitrat rotorno-planetarnikh trokhoïdnykh gidromashin. Sbornik nauchnykh trudov Kiyevskogo natsional'nogo universiteta tekhnologiy i dizayna. Spetsvypusk. K.: Vipol, 170–180.
14. Vasil'êv, O. B. (2003). Profilyuvannya korpusu dviguna Vankelya v rezul'tati obkatki trikutnikom Rello. Pratsi Tavriys'koï derzhavnoï agrotekhnichnoï akademii. Melitopol': TDATA, 4(19), 109–113.
15. Reva, V.G. (2004). Opis vzaemospryazhenikh krivikh za dopomogoyu funktsiy kompleksnoï zmynnoï. Pratsi Tavriys'koï derzhavnoï agrotekhnichnoï akademii. Melitopol': TDATA, 4(23), 70–74.
16. Sulîma, V. V. (2000). Opis krivoliniynykh trikutnykiv, yakî pri sinkhronnomu obertanni zabezpechuyut' tochkoviy dotik. Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika. Kiïv: KNUBA, 67, 231–233.
17. Vorontsova, D. V. (2007). Geometrichniy sintez rotorno-planetarnikh mashin z urakhuvanniam ikhn'oï dinamiki. Geometrichne ta komp'yuterne modelyuvannya. Zbîrnik naukovykh prats' Ukraïns'koï asotsiatsii z prikladnoï geometrii «KHUKHT». Kharkiv, 20, 107–112.
18. Ngo, K'yeu N'i, Ropota, Ye.P, Sukhomlinov, R. M. (1973). Opredeleniye vremya-secheniya raspredelitel'nykh okon trokhoidnykh rotorno-porshnevnykh mashin. Vesti. Khar'k.politekhn, in-ta. Ser. Khimicheskoye mashinostroyeniye, 83, 5–9.
19. Peden, M., Turner, M., Turner, JWG, Bailey, N. (2018). Comparison of 1-D Modelling Approaches for Wankel Engine Performance Simulation and Initial Study of the Direct Injection Limitations. SAE Technical Paper Series, 2018-01-1452, 17. doi: 10.4271/2018-01-1452

Надійшла до редколегії: 22.04.2022

Прийнята до друку: 16.06.2022