УДК 620.171.3

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОТОУПРУГОСТИ.

Тесленко А.А.

В настоящей работе обсуждается новая модификация метода фотоупругости, предложенная в сообщении [1]. Необходимость новой модификации обусловлена большими измеренческими сложностями, сложностями числовой обработки и сложностью распространения возможностей метода фотоупругости на случай объемнонапряженных тел. Попытки преодоления этих сложностей производились, например, в работах [2-9]. В данной работе рассматривается предложение учитывать граничные условия и условия равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). С точки зрения МКЭ это новая модификация этого метода, в которой элементы обладают не только упругими, но и пьезооптическими свойствами. Непосредственно наработки МКЭ переносить в метод фотоупругости нецелесообразно, т.к. МКЭ в теории упругости твердого деформируемого тела развивался для задач с совместными деформациями (выполняются дифференциальные условия совместности деформаций [10]). Одним из достоинств метода фотоупругости является возможность его применения к определению остаточных напряжений, т. е. к случаю несовместных деформаций. Рассмотрим МКЭ для этого случая. Уравнения равновесия запишем в виде

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (1)$$

В (1) подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу. Для тела в целом и отдельной его области

$$\iiint\limits_V \sigma_{ij,j}\, dV = 0 \qquad (2)$$

Таким образом, соотношение (2) может быть записано для отдельного конечного элемента. Представим σ_{ij} в виде линейного разложения [11]

$$\sigma_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} N_\ell \sigma_{ij}^{\ell} \qquad (3)$$

где N_ℓ - функции формы элемента; σ_{ij}^{ℓ} - искомые величины напряжений в узлах конечных элементов, m - количество узлов в элементе, ℓ - номер узла в элементе. Соотношение (2) тогда будет записано в виде

$$\iiint\limits_V \sum_{j=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{m}\left(\sigma_{ij}^{\ell}\frac{\partial N_\ell}{\partial x_j}\right)dV=0 \qquad (4)$$

В плосконапряженном случае (например, случай тонкой пластины)

$$\iint\limits_S \sum_{\ell=1}^{m}\left(\sigma_{i1}^{\ell}\frac{\partial N_\ell}{\partial x}+\sigma_{i2}^{\ell}\frac{\partial N_\ell}{\partial y}\right)dS=0 \qquad (5)$$

Искомыми являются узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ}, которые могут определяться решением системы уравнений (5), записанных для всех элементов и уравнений фотоупругости

$$A_{ij}^{\vec n}\sigma_{ij}^{\ell}=\delta^{\vec n}\cos\left(2\varphi^{\vec n}\right), \qquad (6)$$

определенных для направления $\vec n$ в узле ℓ. Уравнения (6) представляют собой обычные уравнения, связывающие напряжения и измеряемые параметры описанные, например, в [6]. В формуле (6)

$\delta^{\vec n}$ - оптическая разность хода;

$\varphi^{\vec n}$ - оптический параметр угла изоклины;

$A_{ij}^{\vec n}$ - коэффициенты, являющиеся функцией пьезооптических коэффициентов, показателя преломления, толщины просвечиваемого слоя, ориентации направления просвечивания и ориентации системы координат, в которой определяются напряжения.

Формула (6) может быть записана для произвольной точки просвечивания, не связанного с узлом

$$A_{ij}^{\vec n}\sum_{\ell=1}^{m}N_\ell(x,y)\sigma_{ij}^{\ell}=\delta^{\vec n}\cos\left(2\varphi^{\vec n}\right) \qquad (7)$$

Решением систем линейных уравнений (5,6) или (5,7) можно получить искомые узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ}. Полученные таким образом значения σ_{ij}^{ℓ} устойчивы. Если сравнить σ_{ij}^{ℓ}, полученные решением системы уравнений (5,6) (метод МКЭ), с решением системы уравнений состоящей только из (6) (метод наклонного просвечивания), даже с избыточным числом измерений, то МКЭ обнаруживает значительно большую устойчивость. Чтобы показать преимущества МКЭ, обсудим следующий имитационный эксперимент. Сравним модельное распределение напряжений в квадратной пластине, найденное с использованием МКЭ (уравнения (5,6)), и найденное методом наклонного просвечивания (уравнения (6)). В качестве модели возьмем квадратную монокристаллическую пластину с остаточными напряжениями, распределенными по закону:

$$F = C\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{h}y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{h}y\right), \qquad (8)$$

где F - функция Эри, ℓ и h - размеры пластины (равные в обсуждаемом далее эксперименте 10, 10 см соответственно), С - константа, в предлагаемом эксперименте равная -17.66 с размерностью 1кГ. Напряжения определяются функцией Эри, взятием соответствующих производных. Толщина пластины считается равной 1 см. В качестве констант, определяющих свойства среды, возьмем константы, соответствующие кристаллу кубической симметрии $KC\ell$. Кристаллографические плоскости направим параллельно граням пластины. В уравнениях (6) в качестве $\delta^{\vec{n}}$ и $\varphi^{\vec{n}}$ используются модельные, полученные на основе (8), плюс случайная добавка. Случайная добавка распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и среднеквадратическими отклонениями 1° для $\varphi^{\vec{n}}$, 1нм для $\delta^{\vec{n}}$ (имея ввиду, что просвечивание производится монохроматическим светом с длиной волны 640нм). Представление о погрешности может дать только ее распределение по пластине. Распределение абсолютной погрешности по пластине не даст полного представления о неточности метода. Относительная погрешность дает очень большие значения при близких к нулю исследуемых величинах. В данной работе для оценки погрешности используется следующая модификация относительной погрешности $\zeta(x) = \left|\frac{x - x^T}{\max}\right|$, где x - исследуемое значение, x^T - точное значение, max - максимальное по модулю значение x. Результаты приводятся в виде теневых картин, где численные значения величин увеличиваются от темного к светлому.

Разбиение пластины производилось на прямоугольные четырехузловые изопараметрические элементы. Элементы, нарисованные сплошной линией (рис.1), имеют своими узловыми значениями независимые переменные σ_{ij}^{ℓ}. Узлы элементов, нарисованные пунктирной линией, не имеют собственных узловых значений. Они ссылаются на независимые переменные других узлов с учетом симметрии напряженного состояния. При разбиении, показанном на рис.1, МКЭ дает распределение $\zeta(\sigma_{11})$, показанное на рис.2. $\zeta(\sigma_{11})$ в этом случае несущественно $(\approx 10^{\circ})$ превышает погрешность связанную с интерполяцией σ_{11} методом МКЭ. Метод наклонного просвечивания даст приемлемую погрешность в данном эксперименте при угле наклона выше 30°. Так, если произвести перпендикулярное просвечивание и просвечивание с наклоном в 35° в кристаллографической плоскости (100), то напряжения определятся с погрешностью $\zeta(\sigma_{11})$, показанной на рис.3. Распределение σ_{11}, определенное на основе МКЭ, показано на рис.4. Как видно из рис.2,3, погрешность в МКЭ значительно меньше, чем в традиционном методе фотоупругости. При сравнении двух методов надо учитывать еще и тот факт, что наклонное просвечивание часто экспериментально затруднительно и, как правило, производится со значительно большей погрешностью по сравнению с погрешностью нормального просвечивания. Если новый метод сравнивать с применяемым методом разности касательных напряжений (МРКН), то МРКН имеет следующие очевидные недостатки:

1) результат МРКН зависит от выбора пути интегрирования;
2) МРКН не связывает воедино, в отличие от МКЭ, напряженное состояние во всех точках тела. Напряжения найденные на различных путях интегрирования независимы.

Все вышесказанное не показывает всех достоинств применения метода МКЭ, а лишь иллюстрирует их. Можно предположить, что МКЭ поможет решить проблемы применения метода фотоупругости в некоторых случаях объемнонапряженных тел.

Литература

1. Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В. / Функциональные материалы 2. 1995. №4. С.543.
2. Абен Х.К. / Изв. АН ЭССР. Сер. физико-математических и технических наук. 1960. Т. 9. №1. С. 33-45.
3. Абен Х.К.- В кн.: Интегральная фотоупругость.- Талин: Валгус, 1975.
4. Афанасьев И.И. / Оптика и спектроскопия. 1983. Вып. 55. №3.С.525-531.
5. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. / Проблемы материаловедения: сб.науч. тр.- Харьков, ВНИИ Монокристаллов. 1989. №25. С.97-100.
6. Тесленко А.А. / Проблемы материаловедения: сб.науч. тр.- Харьков: ВНИИ Монокристаллов. 1989. №25. С.101-104.
7. Тесленко А.А. Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.- Харьков. 1991.- 22с.
8. Тесленко А.А. / Оптический журнал. 1992. №10. С.23-25
9. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др. / Заводская лаборатория. 1993. Т.59. №2. С.64-66.
10. Васидзу К.- В кн.:Вариационные методы в теории упругости и пластичности.- М.: Мир, 1987. С.27.
11. Еременко С.Ю.- В кн.: Методы конечных элементов в механике деформируемых тел.- Харьков: Основа, 1991. С.9.

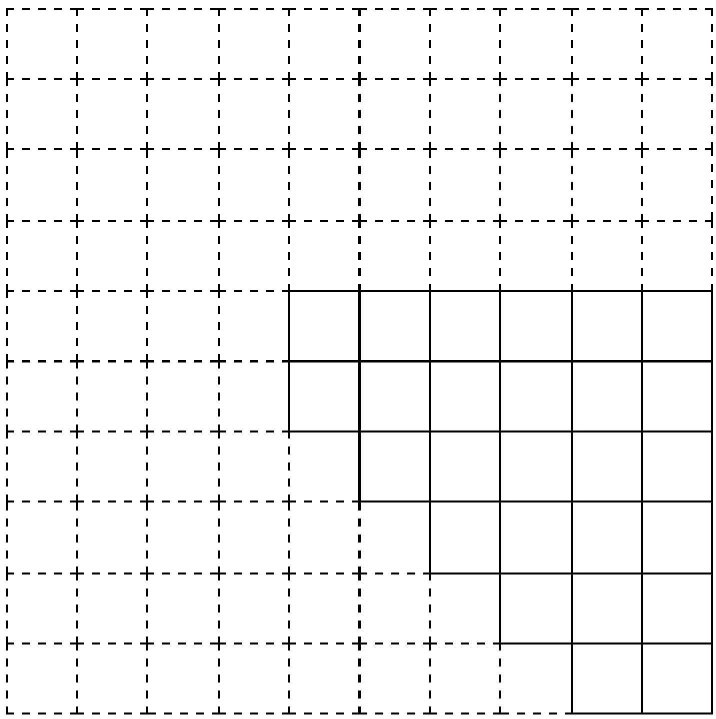

Рис. 1.

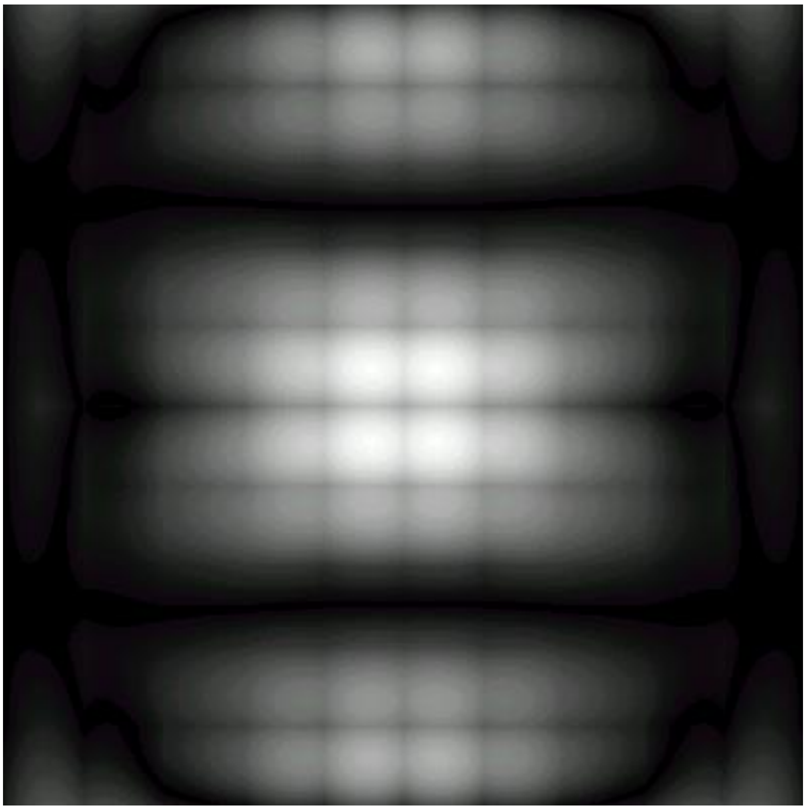

Рис.2.

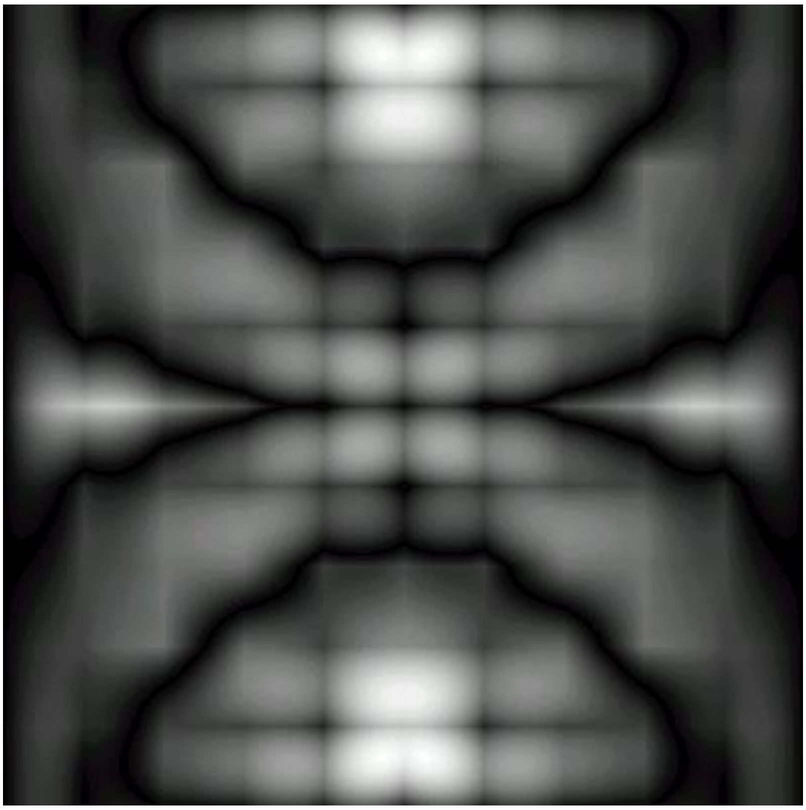

Рис.3.

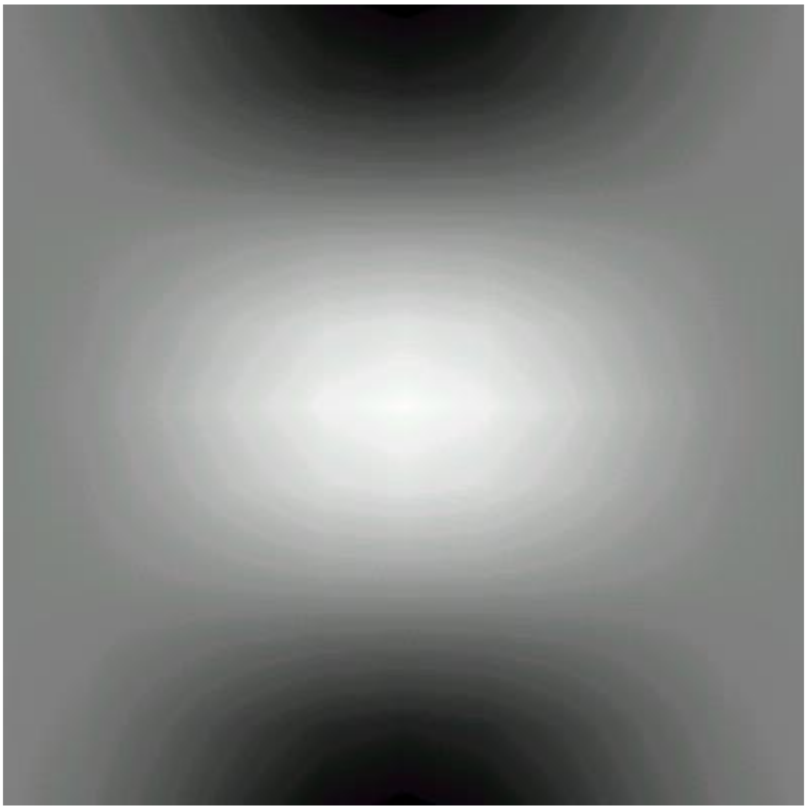

Рис. 4.

Подписи к рисункам.

Рис.1. Разбиение квадратной пластины на прямоугольные элементы.

Рис.2. Распределение $\zeta(\sigma_{11})$ полученное с помощью МКЭ. Значения лежат в промежутке [0,0.07] кГ/см^2.

Рис.3. Распределение $\zeta(\sigma_{11})$ полученное методом наклонного просвечивания. Значения лежат в промежутке [0,0.41] кГ/см^2.

Рис.4. Распределение σ_{11} полученное на основе МКЭ. Значения лежат в промежутке [-39,39] кГ/см^2.

Реферат

В работе изложены основы новой модификации метода фотоупругости. Суть новой модификации состоит в сочетании возможностей традиционного метода фотоупругости и метода конечных элементов. Произведены первые оценки точности нового варианта метода фотоупругости.