УДК 514.753

ЗАДАЧА ПОКРЫТИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ КРУГАМИ ЗАДАННОГО РАДИУСА

АНТОШКИН А.А., ПАНКРАТОВ А.В., ПАЦУК В.Н., РОМАНОВА Т.Е., ШЕХОВЦОВ С.Б.

Рассматривается математическая модель оптимизационной задачи покрытия прямоугольной области минимальным числом кругов заданного радиуса с учетом минимально и максимально допустимых расстояний между центрами кругов и границей области покрытия. Приводится алгоритм решения задачи, основанный на методе оптимизации по группам переменных.

Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в следующей постановке. Необходимо прямоугольную область T_0 покрыть кругами заданного радиуса из набора $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ таким образом, чтобы количество кругов было минимальным и выполнялись условия на минимально и максимально допустимые расстояния между центрами кругов и границей области покрытия. Предполагается, что n заведомо превышает число кругов, которыми можно покрыть область T_0.

Пусть множества T_0, T_i, $i \in I_n = \{1,2,...,n\}$ индуцируются кортежами геометрической информации [1]:

$$g_0 = (S_0, M_0, P_0) = ((s_0, d), (a,b), (x_0, y_0, 0)),$$
$$g_i = (S_i, M_i, P_i) = ((s_i, d), (R), (x_i, y_i)),$$

где $s_0 = s^2$, $s_i = s^1$, s^1 — окружность; s^2 — прямоугольник; d — признак порядка связности множества, $d = 1$, если множество имеет гомотопический тип точки, и $d = 2$, если множество имеет гомотопический тип окружности. Очевидно, что в данном случае $d = 1$, поскольку T_0, T_i — односвязные множества. В дальнейшем будем полагать, что $x_0 = y_0 = 0$.

Представим математическую модель поставленной задачи в виде:

$$\min_{Z \in D \subset E^{2n}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (\omega_{ij}(Z_i, Z_j) + \omega_i^0(Z_0, Z_i)), \quad (1)$$

здесь $\omega_{ij}(Z_i, Z_j)$ — функция, определяющая площадь взаимного перекрытия кругов T_i, T_j, $i \neq j$, $i \in I_n$, $j \in I_n$; $\omega_i^0(Z_0, Z_i)$ — функция, определяющая площадь взаимного перекрытия круга T_i $i \in I_n$ и области $cl(R^2 / T_0)$; $D = D_1 \cup D_2$ — область допустимых решений; D_1 — множество, описывающее условие покрытия области T_0 кругами T_i: $T_0 \cap (\bigcup_{i=1}^{n} T_i) = T_0$ следующим образом:

$$\max_{t=(t_x,t_y)\in T_0} \min_{i=1,2,...n} ((x_i - t_x)^2 + (y_i - t_y)^2 - R^2) \leq 0\ ;$$

D_2 — множество, описывающее условия на минимально и максимально допустимые расстояния между центрами кругов и границей области покрытия и заданное структурой в общем случае нелинейных неравенств [1, 2]:

$$((G'(F_1(Z), \Delta_1, k_1) \cup G''(F_2(Z), \Delta_2, k_2)) \cap$$
$$\cap (G^{\pm}(F_3(Z), \Delta_3, k_3) \cup G^{**}(F_4(Z), \Delta_4, k_4))) \cup \quad (2)$$
$$\cup G^{*}(F_5(Z), \Delta_5, k_5),$$

где

$$G'(F_1(Z), \Delta_1, k_1) = \bigcap_{i=1}^{m'} G_i'(F_{1i}(Z_i), \Delta_{1i}, k_{1i})\ ; \quad (3)$$

$$G''(F_2(Z), \Delta_2, k_2) = \bigcap_{i=1}^{m''} G_i''(F_{2i}(Z_i), \Delta_{2i}, k_{2i})\ ; \quad (4)$$

$$G^{\pm}(F_3(Z), \Delta_3, k_3) = \bigcap_{(i,j)\in A_n} G_{ij}^{\pm}(F_{3ij}(Z_i), \Delta_{3ij}, k_{3ij})\ ; \quad (5)$$

$$G^{**}(F_4(Z), \Delta_4, k_4) =$$
$$= \bigcap_{(i,j)\in B_n} G_{ij}^{**}(F_{4ij}(Z_i), \Delta_{4ij}, k_{4ij})\ ; \quad (6)$$

$$G^{*}(F_5(Z), \Delta_5, k_5) = \bigcap_{i=1}^{m*} G_i^{*}(F_{5i}(Z_i), \Delta_{5i}, k_{5i})\ ; \quad (7)$$

$m' + m'' + m^* = n$, $m' + m'' \geq 2$. Здесь $F_l(Z), \Delta_l, k_l, l = \{1,2,...,5\}$ — элементы соответствующей структуры неравенств; $F_l(Z)$ — упорядоченный набор неравенств; Δ_l — матрица связи неравенств из набора $F_l(Z)$; k_l — число неравенств, входящих в набор $F_l(Z)$; $A_n \cup B_n = K_n$ — множество пар индексов (i_k, j_k), $i_k \in I_n$, $j_k \in I_n$, $i_k \neq j_k$, $k = 1,2,..., C_n^2$, при этом полагаем, что $A_n \cap B_n = \varnothing$.

Структуры (3)—(7) описывают некоторые множества D', D'', $D^{\pm}$, D^{**}, D^{*} соответственно.

Множество $D' \subset E^{2n}$ определяет условие принадлежности центров кругов T_i, $i \in I_n$ области T', индуцируемой геометрической информацией:

$$g' = (S', M', P'),\ S' = (s'_1, s'_2),\ s'_1 = (s^2, d_1),$$
$$s'_2 = (s^2, d_2),\ d_1 = 1,\ d_2 = 2,$$
$$M' = ((m'_1, p'_1), (m'_2, p'_2)) =$$
$$= ((a - 2r^-, b - 2r^-, r^-, r^-, 0), (a - 2r_0^+, b - 2r_0^+, r_0^+, r_0^+, 0)),$$
$$P' = (x'_0, y'_0, 0) = (r^-, r^-, 0).$$

Множество $D' \subset E^{2n}$ задается структурой неравенств (3). Набор $F_{1i}(Z_i)$ неравенств имеет вид:

$$F_{1i}(Z_i) = F_{1i}(x_i, y_i) =$$
$$= \{-f_1(x_i, y_i) \le 0, f_2(x_i, y_i) \le 0,$$
$$f_3(x_i, y_i) \le 0, -f_4(x_i, y_i) \le 0, f_5(x_i, y_i) \le 0, \qquad (8)$$
$$-f_6(x_i, y_i) \le 0, -f_7(x_i, y_i) \le 0, f_8(x_i, y_i) \le 0\},$$

где

$$f_1(x_i, y_i) = y_i - r^-, f_2(x_i, y_i) = x_i - a + r^-,$$
$$f_3(x_i, y_i) = y_i - b + r^-, f_4(x_i, y_i) = x_i - r^-,$$
$$f_5(x_i, y_i) = y_i - r_0^+, f_6(x_i, y_i) =$$
$$= x_i - (a - r_0^+), f_7(x_i, y_i) = y_i - (b + r_0^+), f_8(x_i, y_i) =$$
$$= x_i + r_0^+.$$

При этом ориентация равенств такова, что справедливы следующие неравенства:

$$-f_1(0,0) \le 0, \quad f_2(0,0) \le 0, \quad f_3(0,0) \le 0, \quad -f_4(0,0) \le 0,$$
$$f_5(0,0) \le 0, \quad -f_6(0,0) \le 0, \quad -f_7(0,0) \le 0, \quad f_8(0,0) \le 0.$$

Определим матрицу $\Delta_{1i} = \|\sigma_{ij}\|$, $j = 1,2,..,8$, i=1,2,...,8 следующим образом:

$$\sigma_{ij} = 1, \ \forall j, \forall i, i < 5, j < 5; i > 4, j < 5;$$
$$i < 5, j > 4; i = j, i > 4, j > 4;$$

σ_{ij} =0 в противном случае. Заметим, что $k_1 = 8m'$.

Множество $D'' \subset E^{2n}$ описывает условие принадлежности центров кругов $T_i, i \in I_n$ области $T'' \subset E^2$, индуцируемой геометрической информацией:

$$g'' = (S'', M'', P''), \ S'' = (s^2, d) = (s^2, 1),$$
$$M'' = (a - 2R, b - 2R), \ P'' = (R, R, 0).$$

Множество $D'' \subset E^{2n}$ задается структурой неравенств (4). Набор $F_{2i}(Z_i)$ неравенств имеет вид:

$$F_{2i}(Z_i) = F_{2i}(x_i, y_i) = \{-f_1(x_i, y_i) \le 0,$$
$$f_2(x_i, y_i) \le 0, f_3(x_i, y_i) \le 0, -f_4(x_i, y_i) \le 0\}, \qquad (9)$$

где

$$f_1(x_i, y_i) = y_i - R, f_2(x_i, y_i) = x_i - a + R,$$
$$f_3(x_i, y_i) = y_i - b + R, f_4(x_i, y_i) = x_i - R.$$

причем ориентация равенств такова, что

$$-f_1(0,0) \le 0, \quad f_2(0,0) \le 0, \quad f_3(0,0) \le 0, \quad -f_4(0,0) \le 0.$$

Матрица Δ_{2i} – единичная, т.е. $\Delta_{2i} = \|\sigma_{ij}\|$, где σ_{ij} =1, $\forall j, \forall i, i = j = 1,2,..,4$.

Заметим, что $k_2 = 4m''$.

Множество $D^{\pm} \subset E^{2n}$ описывает ограничение на минимально $2r^-$ и максимально r^+ допустимые расстояния между центрами кругов T_i, T_j $i \ne j$, $i \in I_n$, $j \in I_n$, для которых выполняется следующее условие: $\operatorname{int} T_i \cap \operatorname{int} T_j \ne \varnothing$.

Множество $D^{\pm} \subset E^{2n}$ задается структурой неравенств (5). Набор неравенств $F_{3i}(Z_i)$ имеет вид

$$F_{3i}(Z_i, Z_j) = F_{3i}((x_i, y_i), (x_j, y_j)) =$$
$$= \{f_1(x_i, y_i, x_j, y_j) \le 0, \ -f_2(x_i, y_i, x_j, y_j) \le 0\}, \qquad (10)$$

где

$$f_1(x_i, y_i, x_j, y_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - {r^+}^2,$$
$$f_2(x_i, y_i, x_j, y_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - {r^-}^2,$$

причем ориентация равенств такова, что

$$f_1(0,0,0,0) \le 0, \ -f_2(0,0,0,0) \le 0.$$

Матрица $\Delta_{3i} = \|\sigma_{ij}\|$ – единичная, т.е. σ_{ij} =1, $\forall j, \forall i, i = j = 1,2$.

Заметим, что $k_3 = 2card(A_n)$.

Множество $D^{**} \subset E^{2n}$ задается структурой неравенств (6). Набор неравенств $F_{4i}(Z_{ij})$ имеет вид:

$$F_{4i}(Z_{ij}) = F_{4i}(x_i, y_i, x_j, y_j) =$$
$$= \{-f_1(x_i, y_i, x_j, y_j) \le 0\}, \qquad (11)$$

здесь $f_1(x_i, y_i, x_j, y_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - {r^+}^2$, причем ориентация равенств такова, что

$$-f_1(0,0,0,0) \le 0.$$

Очевидно, $\Delta_{4i} = \|\sigma_{11}\| = 1$. Тогда $k_4 = card(B_n)$.

Множество $D^* \subset E^{2n}$ описывает условие принадлежности центров кругов $T_i \subset E^2$, $i \in I_n$ области $T^* \subset E^2$, индуцируемой геометрической информацией

$$g^* = (S^*, M^*, P^*),$$

где $S^* = (s^2, d_2)$, $M^* = (a, b)$, $P^* = (x_0, y_0, 0)$.

Множество $D^* \subset E^{2n}$ задается структурой неравенств (7). Набор неравенств $F_{5i}(Z_i)$ имеет вид:

$$F_{5i}(Z_i) = F_{5i}(x_i, y_i) = \{f_1(x_i, y_i) \le 0,$$
$$-f_2(x_i, y_i) \le 0, -f_3(x_i, y_i) \le 0, f_4(x_i, y_i) \le 0\}, \qquad (12)$$

где

$$f_1(x_i, y_i) = y_i, f_2(x_i, y_i) = x_i - a,$$
$$f_3(x_i, y_i) = y_i - b, f_4(x_i, y_i) = x_i.$$

Заметим, что ориентация неравенств имеет вид

$$f_1(0,0) \le 0, \qquad -f_3(0,0) \le 0,$$
$$-f_2(0,0) \le 0, \qquad f_4(0,0) \le 0.$$

Определим матрицу

$$\Delta_{1i} = \|\sigma_{ij}\|, \ j = 1,2,..,4, \ i=1, 2, ..., 4$$

следующим образом: σ_{ij} =1, $\forall j, \forall i, i = j$; σ_{ij} =0 в противном случае.

Заметим, что $k_5 = 4m^*$.

Введем некоторые обозначения и представим в аналитическом виде некоторые дополнительные функции, участвующие в формировании функции цели поставленной задачи.

Пусть $I_k = \{1,2,...,k\}$ – индексное множество; i, j – номера кругов, $i, j \in I_n$; W – значение функции цели; p_{il} – l-я точка пересечения границы i-го круга с границей непокрытой области, т.е. $p_{il} \in frT_i \cap fr\left(T_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} T_k\right)$; K_i^* – множество точек p_{il} пересечения границы i-го круга с границей непокрытой области, $L_i^* = cardK_i^*$; K_i – множество точек p_{il} из множества K_i^*, удовлетворяющих ограничениям задачи (1), в дальнейшем – "опорных" точек; $L_i = cardK_i$, $L_i \le L_i^*$, ω_j^{l0} – значение ω-функции T_0 и T_j для l-й точки круга T_j; ω_{kj}^l – значение ω-функции T_k и T_j для l-й точки круга T_j; χ_j^l – значение функции цели для l-й точки круга T_j, $\chi_j^l = \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{kj}^l + \omega_k^{l0}$; Z_j – множество, элементы χ_j^l которого ранжированы по возрастанию.

Рассмотрим случай определения площади взаимного пересечения круга T_i с областью $cl(R^2 / T_0)$ по оси OX или OY (рис. 1,а):

$$\omega_j^0(x_p, y_p, x_j, y_j) = \begin{cases} \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha), \text{если} \quad 0 < \rho_{ij} < R; \\ 0, \quad \text{если} \quad \rho_{ij} \ge R. ; \end{cases} \tag{13}$$

$$\alpha = \arccos\frac{\rho_{pj}}{R}, \quad \rho_{pj} = \sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2},$$

$i = 1,...,m$, ρ_{pj} – расстояние между центром круга T_j и границей области T_0.

В случае, если круг T_i пересекается с областью $cl(R^2 / T_0)$ по оси OX и OY одновременно, например, как показано на рис. 1,б, следует использовать формулу вида

$$\omega_j^0 = \omega_j^{0\alpha_1} + \omega_j^{0\alpha_2} - (\omega_j^{0\varphi} - \frac{1}{2}|(x_b - x_a| \cdot |y_c - y_a|).$$

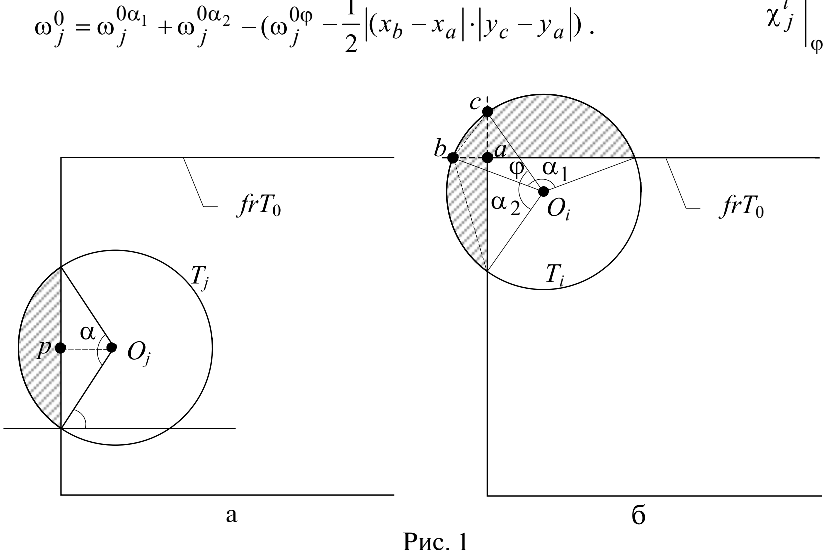

Рис. 1

Рассмотрим случай определения площади пересечения кругов T_i и T_j (рис. 2):

$$\omega_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) = \begin{cases} R^2 (2\varphi - \sin 2\varphi), \quad \text{если} \quad 0 \le \rho_{ij} < 2R; \\ 0, \quad \text{если} \quad \rho_{ij} \ge 2R. \end{cases}$$

Здесь $\rho_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$, $\varphi = \arccos\frac{\rho_{ij}}{2R}$, ρ_{ij} – расстояние между центрами кругов T_i и T_j.

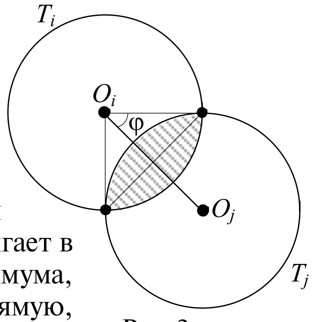

Рис. 2

Пусть $p_{il} \in frT_i \cap frT_0$. Для нахождения точки постановки центра O_j следующего круга T_j, такой что функция цели достигает в этой точке своего минимума, необходимо провести прямую, проходящую через точку p_{il} и образующую угол φ с прямой, параллельной оси OX (рис. 3).

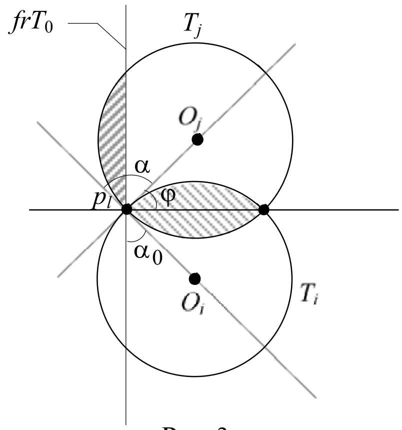

Рис. 3

На данной прямой на расстоянии R от точки p_{il} будет находиться искомая точка O_j.

Функция цели в этом случае имеет вид

$$\chi_j^l = R^2(\frac{\pi}{2} + \alpha_0 - \frac{\sin 2\varphi}{2} - \cos(\varphi - \alpha_0)), \tag{14}$$

$$\chi_j^{l'}\Big|_\varphi = -R^2(\cos 2\varphi + \sin(\alpha_0 - \varphi)) = 0,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi + \alpha_0, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

$$0 \le \alpha_0 \le \frac{\pi}{2},$$

очевидно, что $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha_0}{3}$.

Пусть $p_{il} \in frT_i \cap frT_j$. Для нахождения точки постановки центра O_j следующего круга T_j такой, что функция цели достигает в этой точке своего минимума, необходимо провести биссектрису угла φ, образованного касательными к окружностям frT_i и frT_j в точке p_{il}.

На данной биссектрисе на расстоянии R от точки p_{il} будет находиться искомая точка O_j.

Рассмотрим случай пересечения трех кругов T_s, T_k, T_r, $s,k,r \in I_m$, $m = m'+m''$, такой, что выполняются условия $\operatorname{int} T_k \cap \operatorname{int} T_r \neq \varnothing$, $\operatorname{int} T_k \cap \operatorname{int} T_s \neq \varnothing$ и найдется хотя бы по одной точке $p_{il}^{'}$ и $p_{il}^{''}$ пересечения кругов T_k, T_s и T_k, T_r соответственно, которые находятся в некоторой окрестности радиуса $\varepsilon = \frac{R}{2}$.

Следующий круг T_j размещается таким образом (рис. 4), что его центр O_j имеет координаты

$$\left(x_j, y_j\right) = \frac{1}{2}\left(x'+x'', y'+y''\right) + \\ + \frac{2\sqrt{4R^2-(x'-x'')^2-(y'-y'')^2}\cdot\left(y'-y'', x''-x'\right)}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}},$$

где x', y' и x'', y'' — координаты точек $p_{il}^{'}$ и $p_{il}^{''}$ соответственно.

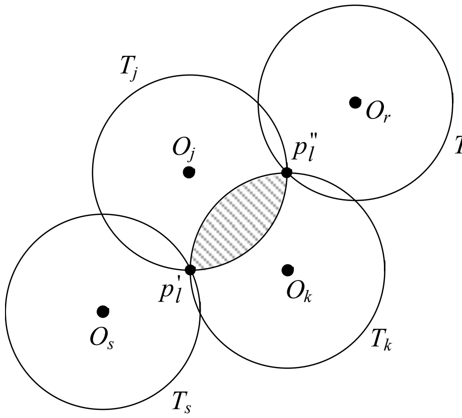

Рис. 4

Рассмотрим пошаговый алгоритм решения задачи (1) непосредственно.

Шаг 1. Полагаем $i = 0$, $K_0^* = \{(0,0)\}$; $K_0 = \{(0,0)\}$; $L_0 = 1$; $W_0 = 0$; $U_0 = \{(x_0 + R\frac{\sqrt{2}}{2}, y_0 + R\frac{\sqrt{2}}{2})\}$, $N_0 = 1$.

Шаг 2. Полагаем $j := j+1$. Для каждой точки $v_{il} \in U_i$, $l = 1,2,...,L_0$ вычисляем функцию цели χ_j^l по формуле (14). В случае $j = 1$ функция цели вычисляется по формуле (13).

Ранжируем множество значений χ_j^l по возрастанию. В результате получаем множество

$$Z_j = \{\chi_j^{i_1}, \chi_j^{i_2}, .., \chi_j^{i_{N_j}}\}.$$

Шаг 3. Полагаем $l := i_1$.

Шаг 4. Проверяем на связность множество вида $T_0^{jl} = T_0 \setminus \left(\bigcup_{q=1}^{i} T_q \cup T_j^l\right)$, где $T_j^l = T_j(v_{jl})$.

Шаг 5. Если множество T_0^{jl} — связно, то переходим к шагу 6. Если $l = L_i$, переходим к шагу 6. Иначе полагаем $l := l+1$ и переходим к шагу 4.

Шаг 6. Размещаем T_j таким образом, что центр O_j находится в точке v_{il}. Полагаем $W = W + \chi_j^l$. Формируем множества K_j^*:

$$K_j;\ K_j^* = K_j^* \setminus \{p_{il}\} \cup \{\{p_{jq}\}_q\},$$

где p_{jq} — точка пересечения T_j с областью

$$frT_j \cap fr(T_0 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i} T_k\right),$$

$$K_j^* = (K_i \cup (frT_j \cap fr(T_0 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i} T_k\right)) \setminus p_{il},$$

$$L_j^* = cardK_j^*.$$

Формируем множество K_j, исключая точки, не удовлетворяющие ограничениям задачи, $cardK_j = L_j$.

Формируем множество U_j центров O_j допустимой постановки кругов T_j, $cardU_j = N_j$. Если $N_j = 0$, переходим к шагу 8.

Шаг 7. Полагаем $i = j$. Переходим к шагу 2.

Шаг 8. Заканчиваем работу алгоритма.

Литература: 1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с. 2. *Антошкин А.А., Комяк В.М., Романова Т.Е., Шеховцов С.Б.* Особенности построения математической модели задачи покрытия в системах автоматической противопожарной защиты // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 1. С. 75-79.

Поступила в редколлегию 11.03.2001

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Антошкин Алексей Анатольевич, адъюнкт кафедры пожарной автоматики и связи Академии пожарной безопасности Украины. Адрес: Украина, 61023, Харьков, ул. Чернышевского, 94, тел. (0572) 40-20-35.

Панкратов Александр Владимирович, канд. техн. наук, научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, тел. (0572) 95-95-36.

Пацук Владимир Николаевич, канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, тел. (0572) 95-95-36.

Романова Татьяна Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, тел. (0572) 95-95-36.

Шеховцов Сергей Борисович, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Университета внутренних дел. Адрес: Украина, 61180, Харьков, пр. 50—летия СССР, 27, тел. (0572) 50-30-67.