УДК 519.6 : 514.1

ПРИМЕНЕНИЕ Φ –ФУНКЦИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ ВЫПУКЛОЙ МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ КРУГАМИ

Антошкин А.А.
Академия пожарной безопасности Украины
Тел. (0572) 402 035
Романова Т.Е., к.ф.-м.н.
Институт проблем машиностроения НАН Украины
Тел. (0572) 959 677

Анотація **– Розглядається задача покриття довільної опуклої багатокутної області кругами заданого радіусу. Ґрунтуючись на використанні Φ –функцій будується математична модель задачі з урахуванням умов на мінімально та максимально припустимі відстані між центрами кругів, а також між границею області та центрами кругів.**

Ключові слова **– задача покриття, Φ –функція, математична модель.**

Пусть имеется многоугольная выпуклая область T_0 и круги $T_i, i=1,2,...,n$ радиуса *R*. Необходимо покрыть область T_0 кругами из множества $\{T_i, i=1,2,...,n\}$ таким образом, чтобы количество кругов было минимальным, и выполнялись ограничения на минимально и максимально допустимые расстояния между центрами кругов, а также – между границей области T_0 и центрами кругов.

В работах [1, 2] приведена математическая модель задачи покрытия, моделирование которой основано на использовании аппарата ω-функций [1]. Для вычисления значений ω-функции требуются трудоемкие вычисления площадей геометрических объектов, которые, в общем случае, являются пересечениями кругов и многоугольников. Построение математических моделей задач покрытия на основе применения понятия Ф – функций, впервые введенном в работе [3], позволяют значительно упростить алгоритмы решения задач покрытия.

Рассмотрим понятие Ф – функции.

Пусть $T_i(u_i)=\left\{X \in R^2 \middle| X=u_i+Y, Y \in T_i\right\}$, $u_i=(x_i,y_i)$ – вектор параметров размещения объекта T_i , $i=1,2$.

Определение 1. Непрерывная, всюду определенная функция $\Phi: R^4 \to R^1$ называется Φ–функцией объектов $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$, если она удовлетворяет следующим характеристическим свойствам:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(u_1,u_2)>0, \text{ если } clT_1(u_1)\bigcap clT_2(u_2)=\varnothing,\\
&\Phi(u_1,u_2)=0, \text{ если } \begin{cases}\operatorname{int}T_1(u_1)\bigcap \operatorname{int}T_2(u_2)=\varnothing,\\ frT_1(u_1)\bigcap frT_2(u_2)\neq\varnothing,\end{cases}\\
&\Phi(u_1,u_2)<0, \text{ если } \operatorname{int}T_1(u_1)\bigcap \operatorname{int}T_2(u_2)\neq\varnothing,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

здесь clT, $\operatorname{int}T$, frT – замыкание, внутренность, граница множества T соответственно,

Поверхность $\gamma = \left\{ (u_1,u_2) \in R^4 : \Phi(u_1,u_2) = 0 \right\}$ называется поверхностью 0-уровня Φ–функции.

Определение 2. Φ–функция называется нормализованной, если ее значения равны кратчайшим евклидовым расстояниям между объектами $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ при условии $(u_1,u_2) \in G = \left\{ (u_1,u_2) \middle| \operatorname{int}T(u_1) \cap \operatorname{int}T(u_2) = \varnothing \right\}$.

С теоретико-множественной точки зрения значения Φ–функции "различают" следующие ситуации: а) объекты T_1 и T_2 пересекаются, т.е. $\operatorname{int}T_1 \cap \operatorname{int}T_2 \neq \varnothing$; б) объекты $T_1 = clT_1$ и $T_2 = clT_2$ не имеют общих точек, т.е. $T_1 \cap T_2 = \varnothing$; в) объекты T_1 и T_2 касаются, т.е. $frT_1 \cap frT_2 \neq \varnothing$ и $\operatorname{int}T_1 \cap \operatorname{int}T_2 = \varnothing$.

Очевидно, что Φ–функция зависит от взаимного положения объектов T_1 и T_2, при этом значения этой функции дают численную оценку ситуаций а), б) и в). Кроме того, в случае а) значения этой функции являются "мерой" пересечения T_1 и T_2, а в случае б) являются либо кратчайшими расстояниями, либо – оценкой расстояния между объектами T_1 и T_2.

Φ–функция обладает некоторыми важными свойствами [4].

1. Следуя определению 1, имеем

$$\Phi(u_1,u_2) = \Phi(u_1 - u_2, 0) = \Phi(0, u_2 - u_1),\ \forall (u_1,u_2) \in R^4.$$

2. Поверхность $\gamma_{12} = \left\{ u_2 \in R^2 \middle| \Phi(0,u_2) = 0 \right\}$ конгруэнтна сумме Минковского [5] $T_{12} = T_1(0) \oplus (-1)T_2(u_2)$ при условии отсутствия точных вхождений объектов T_1 и T_2, т.е.

$$\gamma_{12} \cong frT_{12} = fr\left\{ X_1 - X_2 : X_1 \in T_1(0), X_2 \in T_2(u_2) \right\}.$$

Аналогично, используя $T_{21} = T_2(0) \oplus (-1)T_1(u_1)$, имеем

$$\gamma_{21} \cong frT_{21} = fr\left\{ X_2 - X_1 : X_2 \in T_2(0), X_1 \in T_1(u_1) \right\}.$$

Следует заметить, что множества γ_{12} и γ_{21} известны как годографы функций плотного размещения [6].

3. Поверхности

$$\left\{ u \in R^2 \middle| \Phi(u,0) = \alpha \right\} \text{ и } \left\{ u \in R^2 \middle| \Phi(0,u) = \alpha \right\}$$

центрально симметричны для любого $\alpha \geq 0$, т.е.

$$v \in \left\{ u \in R^2 \middle| \Phi(u,0) = \alpha \right\} \Leftrightarrow -v \in \left\{ u \in R^2 \middle| \Phi(0,u) = \alpha \right\}.$$

4. В частности, при $\alpha = 0$ имеем

$$\gamma_{12} = \left\{ u \in R^2 \middle| \Phi(u,0) = 0 \right\} = (-1)\left\{ u \in R^2 \middle| \Phi(0,u) = 0 \right\} = (-1)\,\gamma_{21}.$$

5. Если объекты T_1 и T_2 – центрально симметричные множества, то существует Φ–функция такая, что $\Phi(u,0)=\Phi(0,u)$ для любого $(u,0),(0,u)\in G$.

Основываясь на свойствах 1–5, рассмотрим Φ–функции для объектов, которые будут использоваться в данном исследовании. Подробное описание способов построения Φ–функций для различных пространственных форм двумерных объектов из набора $\zeta=\left\{C,R,H,K,C^*,R^*,H^*,K^*\right\}$, где C – круг, R – прямоугольник, H – правильный многоугольник, K – выпуклый многоугольник, $C^*=cl(R^2/C)$, $R^*=cl(R^2/R)$, $H^*=cl(R^2/H)$, $K^*=cl(R^2/K)$ приведено в работе [7]. В качестве объектов $T_0(u_0)$ и $T_i(u_i)$ будем рассматривать следующие односвязные объекты: $T_0(u_0)\in\left\{R,K\right\}$, $T_i(u_i)\in\left\{C\right\}$.

Пусть C_1 и C_2 круги радиусов r_1 и r_2. В дальнейшем будем использовать обозначение $C_i(x_i,y_i)$, когда центр (полюс) круга C_i находится в точке (x_i,y_i), $i=1,2$. Тогда, Φ–функцию кругов $C_1(x_1,y_1)$ и $C_2(x_2,y_2)$ можно представить в виде

$$\Phi_{12}(x_1,y_1,x_2,y_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}-r_1-r_2. \tag{2}$$

Значения функции $\Phi_{12}(x_1,y_1,x_2,y_2)$ равны кратчайшим расстояниям между кругами $C_1(x_1,y_1)$ и $C_2(x_2,y_2)$, в случае если $C_1(x_1,y_1)\cap C_2(x_2,y_2)=\varnothing$. Поэтому, согласно определению 2, можно утверждать, что данная функция – нормализованная Φ–функция.

Более того, "мера" максимального пересечения кругов $C_1(x_1,y_1)$ и $C_2(x_2,y_2)$ равна $-(r_1+r_2)$, поскольку $\min\Phi_{12}(x_1,y_1,x_2,y_2)=-(r_1+r_2)$.

Далее рассмотрим Φ – функцию круга C и объекта $P^*=cl(R^2/P)$, где P – прямоугольник длины $2a$, ширины $2b$ и C – круг радиуса $r\le\min\{a,b\}$. Полюса объектов P^* и C расположены в центрах симметрии P и C. Параметры размещения объектов P^* и C обозначим (x_1,y_1) и (x_2,y_2).

Пусть $A=a-r$, $B=b-r$. В этом случае кривая γ_{12} определяется границей $T_{12}=P^*(0)\oplus(-1)C(u_2)$, где

$$T_{12}=cl\left(R^2\setminus\left\{(x,y)\in R^2:-A\le x\le A,-B\le y\le B\right\}\right).$$

Тогда нормализованную Φ–функцию объекта $P^*(x_1,y_1)$ и круга $C(x_2,y_2)$ можно представить так:

$$\Phi_{12}(x_1,y_1,x_2,y_2)=\min\left\{\chi_i(x_2-x_1,y_2-y_1),i=1,2,3,4\right\}, \tag{3}$$

где

$$\chi_1(x,y)=-x+A,\ \chi_2(x,y)=-y+B,\ \chi_3(x,y)=x+A,\ \chi_4(x,y)=y+B.$$

Построим Ф–функцию круга C и объекта $K^* = cl(R^2 / K)$, где K – выпуклый многоугольник, заданный последовательностью вершин $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, C – круг радиуса r. Полагаем, что радиус круга, вписанного в K^* не меньше радиуса r. Полюс объекта K^*– некоторая точка, принадлежащая $\operatorname{int} K$. Параметры размещения объектов K^* и C обозначим (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Пусть $g_i(x, y) = A_i x + B_i y + C_i = 0$ – уравнение прямой линии проходящей через вершины v_i и v_{i+1}, $i = 1, 2, ..., n$, $v_{n+1} = v_1$. В случае, если $A_i = -(y_{i+1} - y_i)/d_i$, $B_i = (x_{i+1} - x_i)/d_i$, $C_i = (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)/d_i$, где $d_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$, имеем $g_i(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \notin K^*$.

Тогда, $\gamma_{12} = frD_0$, $D_0 = \left\{(x, y) : g_i(x, y) = A_i x + B_i y + C_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n\right\}$, где $C_i = C_i - r$.

Нормализованную Φ–функцию объекта $K^*(x_1, y_1)$ и круга $C(x_2, y_2)$ можно представить так:

$$\Phi_{12}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \min\left\{g_i(x_2 - x_1, y_2 - y_1), i = 1, 2, ..., n\right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим математическую модель задачи покрытия произвольной области кругами заданного радиуса R с дополнительными ограничениями.

Назовем соседними круги $T_i(u_i)$, $T_j(u_j)$, $i, j \in I_n, i \neq j$, для которых значения Φ–функции не положительны, т.е.

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) \leq 0,$$

где $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$– нормализованная Ф-функция кругов $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$.

Назовем крайними круги $T_i(u_i)$, для которых выполняется условие $T_i(u_i) \cap frT_0(u_0) \neq \varnothing$, $i \in I_n$, т.е.

$$-2R \leq \Phi(u_0, u_i) \leq 0,$$

где $\Phi_{0i}(u_0, u_i)$– нормализованная Ф-функция объекта $cl(R^2 \setminus T_0(u_0))$ и круга $T_i(u_i)$.

Полагаем,

$r_0^+ < R$ – максимально допустимое расстояние между центрами крайних кругов и границей области покрытия T_0;

r_0^- – минимально допустимое расстояние между центрами крайних кругов и границей области покрытия T_0;

r^+– максимально допустимое расстояние между центрами соседних кругов $T_i(u_i)$, $T_j(u_j)$;

r^-– минимально допустимое расстояние между центрами соседних кругов $T_i(u_i)$, $T_j(u_j)$.

Пусть

$$\begin{gathered}\Lambda_{0i}^{1}(u_i)=\Phi_{0i}(u_0,u_i)+(R-r_0^-)\\ \Lambda_{0i}^{2}(u_i)=-\Phi_{0i}(u_0,u_i)-(R-r_0^+)\ ,\\ \Lambda_{0i}(u_i)=\min\left\{\Lambda_{0i}^{1}(u_i),\Lambda_{0i}^{2}(u_i)\right\}.\end{gathered}$$

Тогда, ограничение на минимально и максимально допустимые расстояния между центром крайнего круга $T_i(u_i)$ и границей области покрытия $T_0(u_0)$, можно задать следующим образом:

$$\Lambda_{0i}(u_i)\geq 0. \tag{5}$$

Полагаем также,

$$\begin{gathered}\Lambda_{ij}^{1}(u_i,u_j)=\Phi_{ij}(u_i,u_j)+2(R-r^-)\\ \Lambda_{ij}^{2}(u_i,u_j)=-\Phi_{ij}(u_i,u_j)+(r^+-2R)\ ,\\ \Lambda_{ij}(u_i,u_j)=\min\left\{\Lambda_{ij}^{1}(u_i,u_j),\Lambda_{ij}^{2}(u_i,u_j)\right\}.\end{gathered}$$

Очевидно, что ограничение на максимально и минимально допустимые расстояния между центрами соседних покрывающих объектов $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$ имеет вид

$$\Lambda_{ij}(u_i,u_j)\geq 0. \tag{6}$$

Тогда, математическую модель рассматриваемой задачи задачи покрытия, с учетом ограничений (5) и (6) можно представить

$$\min_{u\in D\subset R^{2n}}\kappa(u)=\min_{u\in D\subset R^{2n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i'(u_i)+\sigma_i''(u_i)\right)\ , \tag{7}$$

где

$$u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in R^{2n},$$

$$\sigma_i'(u_i)=sign(\Lambda_{0i}(u_i)),$$

$$sign(\Lambda_{0i}(u_i))=\begin{cases}1, \text{ если } \Lambda_{0i}(u_i)\geq 0\\ 0, \text{ если } \Lambda_{0i}(u_i)<0\end{cases}$$

$$\sigma_i''(u_i)=sign(\Phi_{0i}(u_0,u_i)),$$

$$sign(\Phi_{0i}(u_0,u_i))=\begin{cases}1, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0,u_i)>0\\ 0, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0,u_i)\leq 0\end{cases},$$

$$D=\left\{u\in R^{2n}\,\middle|\,\Lambda(u)\geq 0\right\}, \tag{8}$$

где

$$\Lambda(u) = \min\left\{\Lambda_0(u), \Lambda^*(u)\right\},$$
$$\Lambda_0(u) = \Phi_{0T}(u_0, u_T)$$

$$\Lambda^*(u) = \min\left\{\max\left\{\Lambda_{ij}(u_j), \Phi_{ij}(u_i, u_j), i = 1,2,..,n,\ j = 1,2,...,n, i \neq j\right\}\right\},$$

$\Phi(u_0, u_T)$ – Ф-функция объекта $T(u_T) = cl(R^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(\sigma_i(u_i) \cdot T_i(u_i)))$ и области $T_0(u_0)$, $\sigma_i(u_i) = \sigma_i^{'}(u_i) + \sigma_i^{''}(u_i)$.

Следуя определениям ω-функции [1] и Ф-функции [3], в случае, когда $\operatorname{int} T_i(u_i) \bigcap \operatorname{int} T_j(u_j) \neq \varnothing$, справедливо соотношение

$$\omega_{ij}(u_i, u_j) > 0 \Leftrightarrow \Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0.$$

Поэтому, естественным является построение математической модели поставленной задачи покрытия с функцией цели – *суммарная площадь перекрытий покрывающих объектов* на основе использования Ф-функций.

$$\min_{u \in D \subset R^{2n}} \kappa(u) = \tag{9}$$
$$= \min_{u \in D \subset R^{2n}} \left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{0i}(u_0, u_i) \cdot \Phi_{0i}(u_0, u_i)\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{j>i=1}^{n} \sigma_{ij}(u_i, u_j) \cdot \Phi_{ij}(u_i, u_j) \right),$$

где

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R^{2n},$$

$$\sigma_{0i}(u_0, u_i) = sign(\Phi_{0i}(u_0, u_i)),$$
$$sign(\Phi_{0i}(u_0, u_i)) = \begin{cases} 1, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) < 0 \\ 0, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) \geq 0 \end{cases},$$

$$\sigma_{ij}(u_i, u_j) = sign(\Phi_{ij}(u_i, u_j)),$$
$$sign(\Phi_{ij}(u_i, u_j)) = \begin{cases} 1, \text{ если } \Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0 \\ 0, \text{ если } \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0 \end{cases},$$

где D определяется формулой (8).

Аналитический вид функций $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$, $\Phi_{0i}(u_0, u_i)$ зависит от пространственной формы объектов покрытия и области покрытия, поэтому если покрывается кругами прямоугольная область, то следует использовать формулы (2) и (3), в случае задачи покрытия кругами выпуклой многоугольной области – формулы (2) и (4).

Заметим, что Φ–функция $\Phi(u_0, u_T)$ объекта $T(u_T)$ и выпуклого многоугольника $T_0(u_0)$, строится на основе построения Φ–функций объектов из набора ζ.

Предложенный подход к моделированию поставленой задачи покрытия можно распространить на случай кругов различных радиусов, а также различных сочетаний пространственных форм покрывающих объектов и области покрытия.

Список литературы

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.– Киев: Наук. думка, 1986.–268 с.
2. Антошкин А.А., Панкратов А.В., Пацук В.Н., Романова Т.Е., Шеховцов С.Б. Задача покрытия прямоугольной области кругами заданного радиуса // Радиоэлектроника и информатика, № 3, 2001. С. 38-42
3. Стоян Ю. Г. Об одном обобщении функции плотного размещения. – Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 8. – С. 70–74.
4. Yu. G. Stoyan Φ- function and its properties. – Доп. НАН України. Сер. А. – 2001. – № 9. – С. 31–37.
5. Fejes Toth L. Lagerungen inder Ebene, auf der Kugel und in Raum, zweite Auflage Grundl. Math.Wiss. 65, Springer Verlag, Berlin Heidelberg - New York, 1953.
6. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения геометрических объектов.– Киев: Наук. думка, 1976.–247 с.
7. Y. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil, T.Romanova Φ- functions for primary 2D-objects //MATH-NM-15-2001, Technishe Universitat Dresden

APPLICATION OF Φ-FUNCTIONS IN CONSTRUCTING OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE COVERING PROBLEM OF THE CONVEX POLYGONAL REGION BY CIRCLES

Antoshkin A.A., Romanova T.E.

***Summary* – The covering problem of the convex polygonal region by circles of given radius is considered. On the basis of application of Φ-functions the mathematical model of the problem is constructed in view of restrictions on minimal and maximal admissible distances between centers of the circles, and also between the frontier of the region and the centers of circles.**