УДК 519.6:514.1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ ВЫПУКЛОЙ МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ КРУГАМИ С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

А. А. Антошкин **

Т.Е.Романова *, канд. физ.-мат. наук

*Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины

(г. Харьков, E-mail: sherom@kharkov.ua)

** Академия пожарной безопасности Украины

(г. Харьков, E-mail: alex_fire@mail.ru)

Строится математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области конгруэнтными кругами с учетом погрешностей исходных данных в интервальном виде. Используется класс интервальных **Ф**–*функций точечных множеств интервального пространства* $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$.

Будується математична модель задачі покриття опуклої багатокутної області конгруентними кругами з урахуванням похибок вихідних даних у інтервальному вигляді. Використається клас інтервальних **Ф**–*функції точкових множин интервального простору* $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$.

Пусть имеется выпуклый многоугольник T_0, заданный последовательностью вершин v_j, $j = 1, 2, ..., m$, и множество кругов C_i радиуса r, i = 1, 2, …, n. Координаты вершин многоугольника T_0 и радиусы кругов C_i заданы с некоторыми погрешностями $\nu_{xi}^0 \geq 0$, $\nu_{yi}^0 \geq 0$, $\nu_r^0 \geq 0$, i = 1, 2, …, n, соответственно.

Необходимо, учитывая заданные погрешности, покрыть область T_0 кругами C_i, i = 1, 2, …, n, так, чтобы суммарная площадь перекрытий объектов и ее погрешность достигали своего минимального значения.

Полагаем, что полюс объекта совпадает с началом его собственной системы координат и является, в случае многоугольника T_0, его внутренней точкой, в случае круга C_i – его центром.

Введем следующие дополнительные обозначения: x_i, y_i координаты полюса O_i объекта C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; ν_{x_i}, ν_{y_i} – погрешности соответствующих координат, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для построения математических моделей выпуклых многоугольников и кругов, заданных с погрешностями, в данном исследовании используются элементы теории интервальной геометрии [1–3]. В работе [4] введено определение и свойства выпуклых интервальных многоугольников.

Рассмотрим понятие интервального круга $\mathbf{C} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, где

$$\mathbf{I_s R} = \left\{ \langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \middle| \ x = \frac{c+d}{2} \in R^1, \ \nu_x = \frac{d-c}{2} \in R^1, \ c, d \in R^1 \right\} \qquad (1)$$

пространство центрированных интервалов [1, 2] с евклидовой метрикой

$$\rho(U_1, U_2) =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\nu_{x_1} - \nu_{x_2})^2 + (y_1 - y_2)^2 + (\nu_{y_1} - \nu_{y_2})^2}\,.$$

В интервальном пространстве $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ с заданными арифметическими операциями [4] вводится отношение линейного порядка вида

$$\begin{aligned} &U_1 \le U_2 \Leftrightarrow (\langle X_1 \rangle < \langle X_2 \rangle) \vee ((\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle) \wedge (\langle Y_1 \rangle \le \langle Y_2 \rangle)),\\ &U_1 = U_2 \Leftrightarrow (\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle) \wedge (\langle Y_1 \rangle = \langle Y_2 \rangle), \end{aligned} \qquad (2)$$

$U_1 = (\langle X_1\rangle, \langle Y_1\rangle)$, $U_2 = (\langle X_2\rangle, \langle Y_2\rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$,

$$\langle X \rangle \le \langle Y \rangle \Leftrightarrow (x < y) \vee ((x = y) \wedge (\nu_x \le \nu_y)).$$

В силу гомеоморфизма пространств R^2 и $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [1], имеем

$$R^2 \ni (x, \nu_x) \leftrightarrow \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}\,.$$

Определение 1. Интервальное уравнение

$$\langle X' \rangle^2 + \langle Y' \rangle^2 - \overline{\langle R' \rangle^2} = \langle 0 \rangle \qquad (3)$$

задает в пространстве $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ интервальную окружность радиуса $\langle R\rangle$ с центром в точке $\langle 0\rangle$, здесь $\langle X'\rangle = \langle x', \nu_x^{'}\rangle$,

$$x' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+\nu_x^2}+\sqrt{x^2-\nu_x^2}\right), \nu_x^{'} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+\nu_x^2}-\sqrt{x^2-\nu_x^2}\right), \text{ если } \langle X'\rangle \in \mathbf{I}_{s_1},$$

$$x' = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+\nu_x^2}}, \nu_x^{'} = \frac{\nu_x^2}{\sqrt{x^2+\nu_x^2}}, \text{ если } \langle X'\rangle \in \mathbf{I}_{s_3} \cap \mathbf{I}_1,$$

$$x' = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+\nu_x^2}}, \nu_x^{'} = -\frac{\nu_x^2}{\sqrt{x^2+\nu_x^2}}, \text{ если } \langle X'\rangle \in \mathbf{I}_{s_3} \cap \mathbf{I}_2,$$

$$\mathbf{I}_{s_1} = \left\{\langle X'\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \middle| x' - |\nu'_x| > 0\right\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3} = \left\{\langle X'\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \middle| \left(\left(x' - |\nu'_x| < 0\right) \wedge \left(x' \geq 0\right)\right) \vee \left(\left(x' + |\nu'_x| < 0\right) \wedge \left(x' \leq 0\right)\right)\right\},$$

$$\mathbf{I}_1 = \left\{\langle X'\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \middle| x' \cdot \nu'_x \geq 0\right\},\ \mathbf{I}_2 = \left\{\langle X'\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \middle| x' \cdot \nu'_x \leq 0\right\},$$

$\overline{\langle V\rangle} = \langle v, -\nu_v\rangle$ – элемент, сопряженный $\langle V\rangle = \langle v, \nu_v\rangle$ [5].

Уравнение (3) можно представить в эквивалентном виде

$$\langle x^2, \nu_x^2\rangle + \langle y^2, \nu_y^2\rangle - \overline{\langle r^2, \nu_r^2\rangle} = \langle 0\rangle \quad . \tag{4}$$

Рассмотрим интервальное неравенство

$$\langle X'\rangle^2 + \langle Y'\rangle^2 - \overline{\langle R'\rangle^2} \leq \langle 0\rangle, \tag{5}$$

которое определяет некоторое множество $\mathbf{S} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$. Из отношения порядка (2) следует, что $\mathbf{S} \neq cl\mathbf{S}$.

Топологическая внутренность множества **S** описывается так:

$$int\mathbf{S} = \langle X'\rangle^2 + \langle Y'\rangle^2 - \overline{\langle r^2, \nu_x^2 + \nu_y^2\rangle} < \langle 0\rangle. \tag{6}$$

Топологическое замыкание cl**S**, топологическая граница fr**S** множества **S** задается следующим образом:

$$cl\mathbf{S} = \langle X'\rangle^2 + \langle Y'\rangle^2 - \overline{\langle r^2, \nu_x^2 + \nu_y^2\rangle} < \langle 0\rangle,$$

$$fr\mathbf{S} = \langle X'\rangle^2 + \langle Y'\rangle^2 - \overline{\langle r^2, \nu_x^2 + \nu_y^2\rangle} = \langle 0\rangle \quad .$$

Очевидно, что пересечение множества **S** с интервальной окружностью, описываемой интервальным уравнением (3), не пусто. Обозначим через **Q** часть окружности, принадлежащей множеству **S.**

Пусть множество **Q** задается некоторым интервальным уравнением

$$\mathbf{F}((\langle X\rangle, \langle Y\rangle)) = \langle 0\rangle. \tag{7}$$

Определение 2. Интервальным кругом **C** называется объединение множеств, описываемых (6) и (7), если неравенство (5) в пространстве $R^2_{xy} \subset \mathbf{I}^2_s\mathbf{R}$ определяет круг С(u) и, кроме того, неравенство $\nu_x^2 + \nu_y^2 - \nu_r^2 \le 0$ задает в пространстве R^2 некоторый круг С(ν_u).

Множество **Q** называется интервальной границей интервального круга **C** и обозначается $\boldsymbol{fr}\mathbf{C}$.

Таким образом, математическую модель области $\mathrm{T}_0 \subset R^2$ с учетом погрешностей можно представить в виде интервального выпуклого многоугольника $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{I}^2_s\mathbf{R}$, т.е. $\mathbf{T}_0 = \mathrm{int}\mathbf{T}_0 \cup \boldsymbol{fr}\mathbf{T}_0$, а математическую модель круга $C_i \subset R^2$ с учетом погрешностей – в виде интервального круга $\mathbf{C}_i \subset \mathbf{I}^2_s\mathbf{R}$, т.е. $\mathbf{C}_i = \mathrm{int}\mathbf{C}_i \cup \boldsymbol{fr}\mathbf{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для того, чтобы аналитически описать отношение касания, пересечения, не пересечения интервальных выпуклых многоугольников и интервальных кругов на основании определения Ф–функции объектов пространства R^2 [6], рассмотрим понятие интервальной **Ф**-функции интервальных объектов пространства $\mathbf{I}^2_s\mathbf{R}$.

Обозначим интервальный объект $\mathbf{T}_i$, $i=1,2$, заданный в собственной интервальной системе координат и транслированный на интервальный вектор U_i, так:

$$\mathbf{T}_i(U_i) = \left\{\mathbf{X} \in \mathbf{I}^2_s\mathbf{R} \,\middle|\, \mathbf{X} = U_i + \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \in \mathbf{T}_i\right\}, \tag{8}$$

где $U_i = (\langle X_i\rangle, \langle Y_i\rangle)$ – интервальные параметры размещения объекта $\mathbf{T}_i$, $i = 1, 2$.

Определение 3. Непрерывная, всюду определенная функция $\Phi : \mathbf{I}_s^4\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, называется интервальной **Φ**–функцией объектов $\mathbf{T}_1(U_1)$ и $\mathbf{T}_2(U_2)$, если она удовлетворяет следующим характеристическим свойствам:

$$\boldsymbol{\Phi}(U_1,U_2) = \left\langle \Phi(u_1,u_2), \Phi(\nu_{u_1},\nu_{u_2}) \right\rangle,$$

$$\boldsymbol{\Phi}(U_1,U_2) = \begin{cases} > \langle 0 \rangle, \text{ если } \Phi(u_1,u_2) > 0 \text{ или } \begin{cases} \Phi(u_1,u_2) = 0, \\ \Phi(\nu_{u_1},\nu_{u_2}) > 0, \end{cases} \\ = \langle 0 \rangle, \text{ если } \begin{cases} \Phi(u_1,u_2) = 0, \\ \Phi(\nu_{u_1},\nu_{u_2}) = 0, \end{cases} \\ < \langle 0 \rangle, \text{ если } \Phi(u_1,u_2) < 0 \text{ или } \begin{cases} \Phi(u_1,u_2) = 0, \\ \Phi(\nu_{u_1},\nu_{u_2}) < 0, \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

где

$\Phi(u_1,u_2)$ – Φ–функция объектов $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$, $u_i = (x_i, y_i) \in R^2$,

$\Phi(\nu_{u_1},\nu_{u_2})$ – Φ–функция объектов $T_1(\nu_{u_1})$ и $T_2(\nu_{u_2})$, $\nu_{u_i} = (\nu_{x_i}, \nu_{y_i}) \in R^2$, $i = 1,2$.

Интервальная поверхность $\boldsymbol{\gamma} = \left\{ (U_1,U_2) \in \mathbf{I}_s^4\mathbf{R} : \boldsymbol{\Phi}(U_1,U_2) = \langle 0 \rangle \right\}$ называется интервальной поверхностью *0*-уровня интервальной **Φ**–функции.

Очевидно, $\boldsymbol{\gamma} = \left\{ (U_1,U_2) \in \mathbf{I}_s^4\mathbf{R} : (\Phi(u_1,u_2) = 0) \wedge (\Phi(\nu_{u_1},\nu_{u_2}) = 0) \right\}$.

Определение 4. Интервальная **Φ**–функция называется нормализованной, если Φ–функции $\Phi(u_1,u_2)$ и $\Phi(\nu_{u_1},\nu_{u_2})$ нормализованы [6, 7], т.е. их значения равны кратчайшим евклидовым расстояниям между соответствующими парами объектов $T_1(u_1)$, $T_2(u_2)$ и $T_1(\nu_{u_1})$, $T_2(\nu_{u_2})$ при условии $(u_1,u_2) \in G$, $(\nu_{u_1},\nu_{u_2}) \in G$,

где

$$G = \left\{ (u_1,u_2) \in R^4 \,\middle|\, \operatorname{int} T_1(u_1) \cap \operatorname{int} T_2(u_2) = \varnothing \right\},$$

$$G = \left\{ (\nu_{u_1},\nu_{u_2}) \in R^4 \,\middle|\, \operatorname{int} T_1(\nu_{u_1}) \cap \operatorname{int} T_2(\nu_{u_2}) = \varnothing \right\}.$$

Таким образом, из определений 3, 4 следует, что построение интервальных **Φ**–функций (9) интервальных объектов сводится к построению Φ–функций геометрических объектов арифметического евклидова пространства R^2.

В работе [7] приведены способы построения Φ–функций допустимых пар объектов из набора $\zeta = \left\{C, R, H, K, C^*, R^*, H^*, K^*\right\}$, где C – круг, R – прямоугольник, H – правильный многоугольник, K – выпуклый многоугольник, $C^* = cl(R^2 / C)$, $R^* = cl(R^2 / R)$, $H^* = cl(R^2 / H)$, $K^* = cl(R^2 / K)$. В данном исследовании в качестве пространственных форм объектов $T_0(u_0)$ $(T_0(\nu_{u_0}))$ и $T_i(u_i)(T_i(\nu_{u_i}))$ могут быть рассмотрены следующие односвязные объекты: $T_0(u_0)$, $T_0(\nu_{u_0}) \in \left\{R, H, K\right\}$, $T_i(u_i)$, $T_i(\nu_{u_i}) \in \left\{C\right\}$.

Обозначим интервальные $\mathbf{\Phi}$–функции, необходимые для построения математических моделей задач покрытия множества $\mathbf{T}(U_0)$ конгруэнтными интервальными кругами $\mathbf{C}_i(U_i)$, следующим образом:

1) $\mathbf{\Phi}_{ij}(U_i, U_j)$ – нормализованная $\mathbf{\Phi}$– функция кругов $\mathbf{C}_i(U_i)$ и $\mathbf{C}_j(U_j)$;

2) $\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0, U_i) \in \{\mathbf{\Phi}_{R^*C}(U_1, U_2),\ \mathbf{\Phi}_{H^*C}(U_1, U_2),\ \mathbf{\Phi}_{K^*C}(U_1, U_2)\}$ – нормализованная $\mathbf{\Phi}$– функция интервального объекта $\mathbf{T}_0^*(U_0) \in \left\{\mathbf{R}^*, \mathbf{H}^*, \mathbf{K}^*\right\}$ и круга $\mathbf{C}_i(U_i)$;

3) $\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0, U_i) \in \{\mathbf{\Phi}_{RC}(U_1, U_2),\ \mathbf{\Phi}_{HC}(U_1, U_2),\ \mathbf{\Phi}_{KC}(U_1, U_2)\}$ – нормализованная $\mathbf{\Phi}$–функция интервального объекта $\mathbf{T}_0(U_0) \in \left\{\mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{K}\right\}$ и круга $\mathbf{C}_i(U_i)$.

4) $\mathbf{\Phi}(U_0, U_T) = \min\left\{\mathbf{\Phi}_{0l}(U_0, U_l),\ l = 1, 2, ..., k\right\}$ – $\mathbf{\Phi}$–функция интервальных объектов $\mathbf{T}(U_T) = \bigcup\limits_{l=1}^{k} \mathbf{T}_l(U_l)$ и $\mathbf{T}_0(U_0)$, $\bigcup\limits_{l=1}^{k} \mathbf{T}_l(U_l) = cl(\mathbf{I}_s^2\mathbf{R} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathbf{T}_i(U_i))$, $\mathbf{T}_l(U_l)$ – интервальное выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$, $\mathbf{\Phi}_{0l}(U_0, U_l)$ – $\mathbf{\Phi}$–функция объектов $\mathbf{T}_0(U_0)$ и $\mathbf{T}_l(U_l)$.

Учитывая (1) – (9), математическую модель поставленной задачи можно представить в интервальном виде так:

$$\min_{U \in \mathbf{D} \subset \mathbf{I}_s^{2n}\mathbf{R}} \chi(U) = \min_{U \in \mathbf{D} \subset \mathbf{I}_s^{2n}\mathbf{R}} (\chi_0(U) + \chi_1(U)),$$

где

$$U=(U_1,U_2,\dots,U_n)\in \mathbf{I}_s^{2n}\mathbf{R}=\underbrace{\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}}_{n},$$

$$\boldsymbol{\chi}_0(U)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{0i}(U_i)\cdot\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i),\ i=1,2,\dots,n,$$

$$\sigma_{0i}(U_i)=\begin{cases}1,\ \text{если }\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i)-\mathbf{d}>\langle 0\rangle\\ 0,\ \text{если }\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i)-\mathbf{d}\le\langle 0\rangle\end{cases},$$

$$\boldsymbol{\chi}_1(U)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sigma_{ij}(U_i,U_j)\cdot\mathbf{\Phi}_{ij}(U_i,U_j),$$

$$\sigma_{ij}(U_i,U_j)=\begin{cases}1,\ \text{если }\Upsilon_{ij}(U_i,U_j)>0\\ 0,\ \text{если }\ \Upsilon_{ij}(U_i,U_j)\le 0\end{cases},$$

$$\Upsilon_{ij}(U_i,U_j)=\min\left\{\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i)-\mathbf{d},\mathbf{\Phi}_{0j}(U_0,U_i)-\mathbf{d},-\mathbf{\Phi}_{ij}(U_i,U_j)\right\},$$

$$\mathbf{d}=\min_{(U_0,U_i)\in\gamma_{0i}}\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i),\gamma_{0i}=\left\{(U_0,U_i)\in\mathbf{I}_s^4\mathbf{R}\,\middle|\,\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i)=0\right\},$$

$\mathbf{\Phi}(U_0,U_T)$ – $\mathbf{\Phi}$–функция объектов $\mathbf{T}(U_T)=cl(\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}(\mathbf{T}_i(U_i)))$ и $\mathbf{T}_0(U_0)$,

$$\mathbf{D}=\left\{U\in\mathbf{I}_s^{2n}\mathbf{R}\,\middle|\,\mathbf{\Phi}(U_0,U_T)\ge\langle 0\rangle\right\}.$$

Данный подход к построению математических моделей задач покрытия можно распространить на случай кругов различных радиусов, а также когда $T_0(u_0),T_0(\nu_{u_0})\in\{C,R,H,K\}$, $T_i(u_i)$, $T_i(\nu_{u_i})\in\{C,R,H,K\}$.

Литература

1. *Stoyan Yu. G.* The extended interval space and elementary mappings // Proc. of the IMACS–GAMM Intern. Symp. on Numerical Methods and Error Bounds. (Oldenburg, Germany). – Oldenburg, 1995. – P. 270–279.
2. *Стоян Ю.Г.* Метрическое пространство центрированных интервалов// Докл. АН Украины. Сер. А. – 1996. – № 7. – С. 23–25.
3. *Стоян Ю.Г.* Интервальное пространство $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$. Интервальные уравнения// Докл. АН Украины. Сер. А. – 1998. – № 6. – С. 109–116.

4. *Стоян Ю.Г.* Интервальное касание выпуклых интервальных многоугольников / *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е.*// Докл. АН Украины. Сер. А. – 2000. – № 7. – С. 21–26.
5. *Kaucher E.* Interval Analysis in the Extended Interval Space **IR//** Computing Suppl. – 1980. – № 2. – P. 33–49.
6. Stoyan Yu. G. Φ–function and its basic properties// Докл. АН Украины. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 112–117.
7. Stoyan Yu. Construction of a Φ-function for 2D primary objects./ Stoyan Yu., Gil N., Romanova T., Terno J. , Schithauer G. – Technische Univarsitat Dresden, MATH-NM-13.–2001.–27 p.

Поступила в редакцию 25.12.01