Висновки. За допомогою спеціалізованого програмного комплексу DEFORM 2D, який призначений для моделювання процесів оброби металів тиском, було проведено моделювання процесу осадки заготовки на плоских бойках з впливом трьох факторів: відносного обтиску, температури і швидкості деформування. Аналіз результатів моделювання показав, що відносний обтиск має більший вплив на силу осадки ніж температура або швидкість деформування.

В результаті проведеного дослідження розроблено регресійне рівняння моделювання, яке дозволяє отримувати показники зусилля осадки у натуральних одиницях:

$$Y = 0,483 - 0,00206x_1 + 2,06 + 1,43x_2 - 0,715 + 0,81x_3 - 0,41$$

Список літератури: 1. *Сторожев М.В.*, *Попов Е.А.* Теория обработки металлов давлением // М.: Машиностроение. – 1971. – С. 424. **2.** *Шнейберг А.М.*, *Михаленко Ф.П.*, *Щербатов Д.А.* Экспериментальные исследования предельной пластичности при осадке без кручения и с кручением // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. – 2012. – № 1. – С. 18 – 24. **3.** *Тюрин В.А.*, *Савонькин М.Б.* Стадийность процесса и потокораспределение при осадке плитами с осевым отверстием // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. – 2009. – № 3. – С. 17 – 20. **4.** *Воронцов А.Л.* Пластическое течение при осадке полых заготовок // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. – 2007. – № 1. – С. 3 – 8. **5.** *Гринкевич В.А.*, *Чухлеб В.Л.*, *Сальников А.С.*, *Тумко А.Н.*, *Ашкелянец А.В.*, *Банашек Г.* Исследование различных схем осадки на прессе заготовки сплава ЭИ698-ВД путем математического моделирования // Обработка материалов давлением. – 2013. – № 4 (37). – С. 3 – 7. **6.** Таблицы планов эксперимента для факторных и полиноминальных моделей. – М.: Металлургия, 1982. – С. 752. **7.** *Данченко В.Н.*, *Миленин А.А.*, *Кузьменко В.И.*, *Гринкевич В.А.* Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением // Численные методы: сборник научных трудов. – Днепропетровск: Системные технологи. – 2005. – С. 443.

Bibliography (transliterated): 1. Storozhev, M. V., and E. A. Popov. *Theorija obrabotki metallov davleniem.* Moscow: Mashynostroenie, 1971. Print. **2.** Shnejberg, A. M., F. P. Mihalenko and D. A. Shherbatov. "Experimental'nye issledovanija predel'noj plastichnosti pri osadke bez kruchenija i s krucheniem." *Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo. Obrabotka materialov davleniem.* No. 1. 2012. 18–24. Print. **3.** Tjurin, V. A., and M. B. Savon'kin. "Stadijnost' processa i potokoraspredelenie pri osadke plitami s osevym otverstiem." *Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo. Obrabotka materialov davleniem.* No. 3. 2009. 17–20. Print. **4.** Voroncov, A. L. "Plasticheskoe techenie pri osadke polyh zagotovok." *Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo. Obrabotka materialov davleniem.* No. 1. 2007. 3–8. Print. **5.** Grinkevich, V. A., et al."Issledovanie razlichnyh shem osadki na presse zagotovki splava EI698-VD putjom matematicheskogo modelirovanija." *Obrabotka materialov davleniem.* No. 4 (37). 2013. 3–7. Print. **6.** Tablicy planov experimenta faktornyh i polinominal'nyh modelej. Moscow: Metallurgija, 1982. Print. **7.** Danchenko, V. N., et al. *Komp'uternoe modelirovanie processov obrabotki metallov davleniem. Chyslennye metody: sbornyk nauchnyh trydov.* Dnepropetrovsk: Sistemnye tehnologii, 2005. Print.

Надійшла (received) 25.09.2015

Бондаренко Юлія Володимирівна **–** кандидат технічних наук, доцент кафедри обробки металів тиском, Запорізька державна інженерна академія: пр. Леніна, 226, м. Запоріжжя, Україна 69000, e-mail: bond.1984@mail.ru, тел.: 067-76-75-350.

Бондаренко Юлия Владимировна **–** кандидат технических наук, доцент кафедры обработки металлов давлением, Запорожская государственная инженерная академия: пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина 69000, e-mail: bond.1984@mail.ru, тел.: 067-76-75-350.

Bondarenko Jylia Vladimirovna – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of working metals by pressure, Zaporozhye State Engineering Academy, Lenina ave. 226, Zaporozhye, Ukraine, 69000, E-mail: bond.1984@mail.ru, tel.: 067-76-75-350.

УДК 389.14+658.16(075.8)

С. О. ВАМБОЛЬ, І. В. МІЩЕНКО, В. В. ВАМБОЛЬ, О. М. КОНДРАТЕНКО

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ БЕТА-РОЗПОДІЛУ. ЧАСТИНА 2

Досліджено особливості бета-розподілу та обґрунтування його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Проаналізовано спеціалізовану науково-технічну і довідникову літературу, методи математичної статистики, теорії ймовірностей, чисельні. У даній частині дослідження подано описання системи кривих Пірсона як математичної бази бета-розподілу, особливості застосування узагальненого бета-розподілу до об'єкту дослідження, а також проаналізовано придатність нормального закону розподілу за оцінками коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, початкових і центральних моментів неперервних розподілів.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

Вступ. Аналіз і оцінювання *похибок вимірювання*, які являють собою величини, що характеризують недосконалість вимірювання, є одним з розділів *метрології*. Закономірність прояву *випадкових похибок*, як додатних, так і від'ємних, виявляється лише при достатньо великій кількості вимірювань. За деяких умов *розподіл випадкових похибок* підкоряється *нормальному розподілу*. Однак при виявленні факту невідповідності *емпіричного розподілу* нормальному стає питання пошуку або підбору такого розподілу, який за певними критеріями точніше описує *емпіричний розподіл*. Вибір найбільш *близького закону розподілу* до *істинного* серед десятків існуючих *типових розподілів* здійснюється на основі аналізу *гістограми* та *моментних оцінок*, потім здійснюється перевірка *гіпотези* про відповідність *емпіричного розподілу* до *теоретичного*, що при підтвердженні гіпотези дає розв'язання *задачі апроксимації*, яке у деяких випадках досягається перебиранням різних законів розподілу за вищеописаним алгоритмом і не є гарантованим. В той же час існує підхід до побудови *універсальних сімей розподілів*, зокрема, апроксимація на основі *сімей розподілів Пірсона*, який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального, є варіативним і гнучким.

У попередній частині дослідження застосовано типові закони розподілу до об'єкту дослідження та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним, для знаходження справжнього або близького до нього закону [1].

Аналіз літературних джерел. При проведенні дослідження проаналізовано 32 наукових джерела інформації, їх повний перелік подано у дослідженні [1]. У тому ж джерелі наведено *мету*, *об'єкт*, *предмет* і перелік *задач дослідження*. У даній роботі наведено описання системи кривих Пірсона як математичної бази бета-розподілу при апроксимації емпіричних даних.

Використання бета-розподілу при апроксимації емпіричних даних. Система кривих Пірсона. В математичній статистиці проводять апроксимацію емпіричних даних на основі типових розподілів, до найуживаніших з яких можна віднести нормальний, логарифмічно-нормальний, експоненціальний, Вейбулла, гамма-розподіли тощо. Перевага застосування типових розподілів складається в їхній достатньо повній вивченості та можливості отримання обґрунтованих, незміщених та відносно високоефективних оцінок параметрів. Однак перелічені вище типові закони не мають необхідного різноманіття форм розподілів (гістограм), тому їхнє застосування не дає необхідної універсальності представлення випадкових величин. Те саме стосується і апроксимації на основі спеціальних рядів (наприклад, *ряд Грама-Шарльє*), які рекомендовано використовувати для описання розподілів, близьких до нормального.

В математичній статистиці порівняно нечасто використовується бета-розподіл. Його використання зумовлене тим, що через нього можуть бути виражені практично всі відомі вживані закони розподілів ймовірностей, в тому числі і дискретні. Особливо велике значення бета-розподіл набув у непараметричній статистиці, тобто для вирішення задач, які не потребують знання закону розподілу ймовірностей випадкової величини. Такому розподілу притаманно надзвичайна різноманітність видів і форм кривих розподілу, які описуються функцією бета-розподілу при різних поєднаннях його параметрів. На практиці застосовують різні наближення, що дозволяють обчислити параметри бета-розподілу за допомогою таблиць або апроксимацій нормального розподілу (апроксимації *Кедуелла*, *Уайза*, *Кемпа-Полсона*) [2].

Покажемо обґрунтованість використання бета-розподілу.

Моменти розподілу випадкової величини не характеризують його повністю, але визначають однозначно за деяких умов, котрі виконуються майже для усіх розподілів, які використовуються на практиці. Під час вирішення задач обробки експериментальних даних знання моментів еквівалентно знанню функції розподілу, а збіг значень перших моментів двох розподілів говорить про їхню приблизну однаковість. Не знаючи точно вигляд функції розподілу, але знайшовши необхідні перші моменти, можна підібрати інший розподіл з таким ж значеннями перших моментів. Практично така апроксимація виявляється прийнятною при збігу перших чотирьох моментів.

Вважається [3, 4, 5], що довільну невід'ємну функцію $f(y) \geq 0$, яка задовольняє умовам нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1,$$

можна розглядати як щільність імовірності $P(y)$ деякої випадкової величини y. Різноманітний характер щільностей імовірності $P(y)$ дає система кривих Пірсона, яка задається диференційним рівнянням

$$\frac{dP(y)}{dy} = \frac{y-a}{b_O + b_1 y + b_2 y^2} P(y), \tag{1}$$

в якому коефіцієнти a і b_i, $i = 0, 1, 2$, повністю задають систему розподілів.

Розв'язання цього рівняння записується в загальному вигляді має вид

$$P(y) = C \exp\left(\int \frac{y-a}{b_O + b_1 y + b_2 y^2} dy \right). \tag{2}$$

Проводячи рекурентні перетворення, визначають старші моменти через молодші; можливо визначити постійні a і b_i через вибіркові оцінки центральних моментів розподілу та привести до системи рівнянь у такому вигляді

$$\{-a + b_1 = 0; b_O + 3b_2\tilde{\mu}_2 = -\tilde{\mu}_2; -a\tilde{\mu}_2 + 3b_1\tilde{\mu}_2 + 4b_2\tilde{\mu}_3 = -\tilde{\mu}_3; -a\tilde{\mu}_3 + 3b_O\tilde{\mu}_2 + 4b_1\tilde{\mu}_3 + 5b_2\tilde{\mu}_4 = -\tilde{\mu}_4 . \tag{3}$$

В загальному випадку розподіли Пірсона визначаються чотирма моментами $\tilde{m}_1$, $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_3$ і $\tilde{\mu}_4$. Рішення цієї системи зведено у табл. 1. Відомо, що характер кривої може бути різним залежно від коренів квадратного рівняння $b_O + b_1 y + b_2 y^2 = 0$. Позначаючи корні цього рівняння через y_1 та y_2, маємо:

$$y_{1,2} = -\frac{b_1}{2b_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{K}}\right), \ K = \frac{b_1^2}{4b_O b_2}. \tag{4}$$

Таблиця 1 – Рішення системи (3)

$d = 10\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 - 18\tilde{\mu}_2^3 - 12\tilde{\mu}_3^2$	
$c_O = -\tilde{\mu}_2\left(4\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 - 3\tilde{\mu}_3^2\right)$	$b_O = c_O / d$
$c_1 = -\tilde{\mu}_3\left(\tilde{\mu}_4 + 3\tilde{\mu}_2^2\right)$	$b_1 = c_1 / d$, $a = b_1$
$c_2 = -2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + 6\tilde{\mu}_2^3 + 3\tilde{\mu}_3^2$	$b_2 = c_2 / d$

Для визначеності знаки обираються так, щоб $y_1 < y_2$. Значення коренів залежні від величини K. Якщо $K < 0$, то корені дійсні та мають різні знаки (тип I розподілу за класифікацією Пірсона). При $K > 1$ корені дійсні та мають однакові знаки (тип VI розподілу). При $0 < K < 1$ корені комплексні (тип IV розподілу). По суті, цим і охоплюються всі можливі випадки.

Після вищезгаданих перетворень маємо наступне:

$$f(y) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1}(1-y)^{q-1}, \text{ при } 0 \le y \le 1. \tag{5}$$

Стандартний бета-розподіл зосереджений на відрізку від 0 до 1. Застосовуючи лінійні перетворення, бета-величину можна перетворити так, що вона буде приймати значення на будь-якому інтервалі.

Тип VI розподілу є бета-розподілом II роду та має вигляд:

$$f(y) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}, \quad 0 \le y < \infty. \tag{6}$$

Про тип IV розподілу нічого однозначно сказати неможливо, існують лише окремі випадки цього розподілу.

Використання узагальненого бета-розподілу. *Узагальнений бета-розподіл* описує розподіл випадкової величини $z = \alpha + (\beta - \alpha)y$, що є лінійною функцією випадкової величини y, яка має бета-розподіл I типу з параметрами p, q і розподілена в інтервалі $\alpha \le y \le \beta$. Справедливе й зворотне – якщо випадкова величина z має узагальнений бета-розподіл з вказаними параметрами, то випадкова величина $y = (z-\alpha)/(\beta-\alpha)$ має бета-розподіл I типу з параметрами p, q [6].

Як було зазначено в [1], обсяг вибірок був $N = 500$, $N = 1000$, $N = 3000$, значення $m_d = 1{,}59$ мм, величина середньоквадратичного відхилення діаметру приймалась $\sigma_d = 0{,}00159$ мм, $\sigma_d = 0{,}0636$ мм, $\sigma_d = 0{,}0954$ мм, $\sigma_d = 0{,}1113$ мм. В табл. 2. зведено розрахункові дані для вибірок різного обсягу та відхилення $\sigma_d = 0{,}1113$ мм.

Вибіркові оцінки необхідних для визначення типу розподілу за схемою (табл. 1 і 2 в [1]) моментів $\tilde{m}_1$, $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_3$ і $\tilde{\mu}_4$, розмірності яких для $n-$го моменту (мм^4) у $n-$му ступеню, а саме:

● для даних з 1-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0{,}64424759$, $\tilde{\mu}_2 = 0{,}03181752$, $\tilde{\mu}_3 = 0{,}00248719$, $\tilde{\mu}_4 = 0{,}00319209$; корені дійсні, мають різний знак, тобто це відповідає типу I розподілу за класифікацією Пірсона;

● для даних з 2-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0{,}64625362$, $\tilde{\mu}_2 = 0{,}03180040$, $\tilde{\mu}_3 = 0{,}00298760$, $\tilde{\mu}_4 = 0{,}00343242$; корені дійсні, мають різний знак, тобто це відповідає типу I розподілу за класифікацією Пірсона;

● для даних з 3-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0{,}64436396$, $\tilde{\mu}_2 = 0{,}03254810$, $\tilde{\mu}_3 = 0{,}00378001$, $\tilde{\mu}_4 = 0{,}00398597$; корені дійсні, мають однаковий знак, тобто це відповідає типу VI розподілу за класифікацією Пірсона.

Додатково проведено аналіз придатності нормального розподілу для апроксимації за оцінкою коефіцієнтів асиметрії та ексцесу (табл. 3) за методикою, наведеною вище, та формулами (3) – (6) у [1]. Отримані результати з цих позицій відкидають можливість такої апроксимації.

Таблиця 2 – Розрахункові дані

N, од	500	1000	3000
m_d, мм	1,59	1,59	1,59
σ_d, мм	0,11130	0,11130	0,11130
$c_0 \cdot 10^5$	1,234	–1,303	–1,550
$c_1 \cdot 10^5$	1,549	–1,932	–2,708
$c_2 \cdot 10^6$	8,69	1,42	–9,72
$d \cdot 10^4$	3,616	4,056	5,052
$b_0 \cdot 10^2$	–3,4112	–3,2135	–3,0669
$b_1 \cdot 10^2$	–4,2844	–4,7634	–5,3599
$b_2 \cdot 10^2$	2,4040	0,3512	–1,9241
$a \cdot 10^2$	–4,2844	–4,7634	–5,3599
K	–0,5596	–5,0259	1,2171
y_1	–0,5965	–0,6440	–1,9810
y_2	2,3787	14,2064	–0,8046

Вибіркові оцінки необхідних для визначення типу розподілу та визначення за схемою (табл. 1 і 2 у [1]) моментів $\tilde{m}_1$, $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_3$ і $\tilde{\mu}_4$, розмірності яких для $n-$го моменту (мм^4) у $n-$му ступеню:

● для даних з 1-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0{,}62760067$, $\tilde{\mu}_2 = 0{,}00063461$, $\tilde{\mu}_3 = 0{,}00000127$, $\tilde{\mu}_4 = 0{,}00000124$; корені комплексні, тобто це відповідає типу IV розподілу за класифікацією Пірсона;

● для даних з 2-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0{,}63256213$, $\tilde{\mu}_2 = 0{,}01028946$, $\tilde{\mu}_3 = 0{,}00037723$, $\tilde{\mu}_4 = 0{,}00034880$; корені комплексні, тобто це відповідає типу IV розподілу за класифікацією Пірсона;

● для даних з 3-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0{,}63966754$, $\tilde{\mu}_2 = 0{,}02360745$, $\tilde{\mu}_3 = 0{,}00199333$, $\tilde{\mu}_4 = 0{,}00199352$; корені комплексні, тобто це відповідає типу IV розподілу за класифікацією Пірсона.

В табл. 4 зведено розрахункові дані для вибірок однакового обсягу $N = 3000$ та $\sigma_d = 0{,}01590$ мм, $\sigma_d = 0{,}06360$ мм, $\sigma_d = 0{,}09540$ мм.

Таблиця 3 – Аналіз придатності нормального розподілу для апроксимації за оцінкою коефіцієнтів асиметрії та ексцесу

$N = 500$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}11130$ мм			
$3S_1 = 0{,}32666958$	$3S_1 = 0{,}32765334$	$5S_2 = 1{,}07916065$	$5S_2 = 1{,}09003045$
$\tilde{S}k = 0{,}43823744$		$\tilde{E}x = 0{,}15313548$	
$\left\|\tilde{S}k\right\| \le 3S_1$ – умова не виконується		$\left\|\tilde{E}x\right\| \le 5S_2$ – умова не виконується	
$N = 1000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}11130$ мм			
$3S_1 = 0{,}23168328$	$3S_1 = 0{,}23203146$	$5S_2 = 0{,}7688133$	$5S_2 = 0{,}7726713$
$\tilde{S}k = 0{,}52683317$		$\tilde{E}x = 0{,}39418314$	
$\left\|\tilde{S}k\right\| \le 3S_1$ – умова не виконується		$\left\|\tilde{E}x\right\| \le 5S_2$ – умова не виконується	
$N = 3000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}11130$ мм			
$3S_1 = 0{,}13403001$	$3S_1 = 0{,}134097065$	$5S_2 = 0{,}44609725$	$5S_2 = 0{,}44684165$
$\tilde{S}k = 0{,}64373057$		$\tilde{E}x = 0{,}76255408$	
$\left\|\tilde{S}k\right\| \le 3S_1$ – умова не виконується		$\left\|\tilde{E}x\right\| \le 5S_2$ – умова не виконується	

Як і в попередньому аналізі, в табл. 5 наведено дані про коефіцієнти асиметрії та ексцесу. Для емпіричних розподілів з малою дисперсією, коли інтервал даних є відносно малим, апроксимація нормальним розподілом допускається. При «розтіканні» щільності імовірності нормальність порушується, використання вказаної апроксимації не рекомендується. Таким чином, можливість апроксимації емпіричного розподілу бета-розподілом підтверджена розрахунками (для даних з табл. 2 – однозначно, для даних з табл. 4 – такий варіант не відкидається). Переходячи до змінної J_P, яка змінюється в інтервалі $J_{\text{P}\min} \le J_\text{P} \le J_{\text{P}\max}$ (це легко визначається з аналізу емпіричних даних), запишемо щільність ймовірностей у вигляді формули (7), для якої початкові моменти задані формулою (8), а центральні – формулою (9):

$$f\left(J_\text{P}\right) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\left(J_\text{P} - J_{\text{P}\min}\right)^{p-1}\left(J_{\text{P}\max} - J_\text{P}\right)^{q-1}}{\left(J_{\text{P}\max} - J_{\text{P}\min}\right)^{p+q-1}}, \tag{7}$$

Таблиця 4 – Розрахункові дані

N, од	3000	3000	3000
m_d, мм	1,59	1,59	1,59
σ_d, мм	0,0159	0,0636	0,0954
$c_0 \cdot 10^6$	$-2{,}0 \cdot 10^{-6}$	–0,14	–4,16
$c_1 \cdot 10^6$	$-3{,}12 \cdot 10^{-6}$	–0,25	–7,31
$c_2 \cdot 10^6$	$-4{,}06 \cdot 10^{-5}$	–0,21	–3,26
$d \cdot 10^5$	$3{,}27 \cdot 10^{-4}$	1,46	18,61
$b_0 \cdot 10^4$	–6,11	–98,35	–223,66
$b_1 \cdot 10^4$	–9,54	–172,51	–392,57
$b_2 \cdot 10^2$	–1,2401	–1,4732	–1,7534
$a \cdot 10^3$	–0,95377	–17,2505	–39,2573
$K \cdot 10^2$	3,0014	51,3464	98,2474
$y_1 \cdot 10^2$	$-3{,}85 \cdot (1 - 1{,}52i)$	$-58{,}55 \cdot (1 - 0{,}97i)$	$-111{,}95 \cdot (1 - 0{,}13i)$
$y_2 \cdot 10^2$	$-3{,}85 \cdot (1 + 1{,}52i)$	$-58{,}55 \cdot (1 + 0{,}97i)$	$-111{,}95 \cdot (1 + 0{,}13i)$

$$m_n(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(J_{\text{P}\max} - J_{\text{P}\min}\right)^k J_{\text{P}\min}^{n-k} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p+q+k)}, \tag{8}$$

$$\mu_n(p,q) = \left(J_{\text{P}\max} - J_{\text{P}\min}\right)^n \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \times \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{p}{p+q}\right)^k \frac{\Gamma(p+n-k)}{\Gamma(p+q+n-k)}. \tag{9}$$

В цих виразах $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $k \le n$ – біноміальні коефіцієнти, $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функція, яка за визначенням задається інтегралом $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-z} dt$, $(\operatorname{Re} z > 0)$ [7 – 10]. Для цілого аргументу обчислення гамма-функції пов'язано з обчисленням факторіалу, але для загального випадку необхідно використовувати наближення, наприклад, *формулу Стірлінга*:

$$\Gamma(z) \approx e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \frac{163879}{209018880z^5} + \frac{5246819}{75246796800z^6}\right], \tag{10}$$

або інші наближення через неперервний дріб [9, 11], що забезпечує цілком достатню для досліджень точність.

Таблиця 5 – Коефіцієнти асиметрії та ексцесу

$N = 3000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}01590$ мм			
$3S_1 = 0{,}13403001$	$3S_1 = 0{,}134097065$	$5S_2 = 0{,}44609725$	$5S_2 = 0{,}44684165$
$\tilde{S}k = 0{,}07967409$		$\tilde{E}x = 0{,}08897396$	
$\left\|\tilde{S}k\right\| \le 3S_1$ – **умова виконується**		$\left\|\tilde{E}x\right\| \le 5S_2$ – **умова виконується**	
$N = 3000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}06360$ мм			
$3S_1 = 0{,}13403001$	$3S_1 = 0{,}134097065$	$5S_2 = 0{,}44609725$	$5S_2 = 0{,}44684165$
$\tilde{S}k = 0{,}36142125$		$\tilde{E}x = 0{,}29447751$	
$\left\|\tilde{S}k\right\| \le 3S_1$ – умова не виконується		$\left\|\tilde{E}x\right\| \le 5S_2$ – **умова виконується**	
$N = 3000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}09540$ мм			
$3S_1 = 0{,}13403001$	$3S_1 = 0{,}134097065$	$5S_2 = 0{,}44609725$	$5S_2 = 0{,}44684165$
$\tilde{S}k = 0{,}54954858$		$\tilde{E}x = 0{,}57702432$	
$\left\|\tilde{S}k\right\| \le 3S_1$ – умова не виконується		$\left\|\tilde{E}x\right\| \le 5S_2$ – умова не виконується	

Таблиця 6 – Початкові та центральні моменти неперервних розподілів

Порядок моменту	Початкові моменти	Центральні моменти
0	$m_0 = 1$ (за визначенням)	$m_0 = 1$ (за визначенням)
1	m_1 (визначається)	$\mu_1 = 0$
2	$m_2 = m_1^2 + \mu_2$	$\mu_2 = m_2 - m_1^2$
3	$m_3 = m_1^2 + 3\mu_2 m_1 + \mu_3$	$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$
4 (поч.)	$m_4 = m_1^4 + 6\mu_2 m_1^2 + 4\mu_3 m_1 + \mu_4$	
4 (центр.)	$\mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4$	

Для неперервних розподілів справедливі наступні співвідношення між початковими та центральними моментами [12 – 14], що також можна використати при розрахунках:

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mu_k m_1^{n-k} ,$$

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k m_k m_1^{n-k} , \qquad (11)$$

що для моментів до 4-го включно дає вирази, зведені в табл. 6. В усіх розрахунках кривих Пірсона потрібна висока точність обчислень (необхідно утримувати до 8÷10 знаків після коми), що пояснюється мультиплікативною схемою нагромадження похибок у степеневих членах.

Висновки. Таким чином, в роботі розглянута задача апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису, які представлені у вигляді вибірки та на їхній основі побудованій гістограми, за допомогою бета-розподілу. На основі розрахунку відповідних величин показано, що використання нормального розподілу для апроксимації емпіричних даних, які характеризують об'єкт дослідження – тіло кочення кулькового підшипника, не є прийнятним через значення асиметрії та ексцесу.

У даній частині дослідження на основі аналізу спеціалізованої літератури подано математичне описання бета-розподілу (математична основа якого – сімейство кривих Пірсона), який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального, може стати універсальним, але потребує ретельного дослідження. Виявлено, що у своїй більшості можливі типи розподілів зводяться до бета-розподілів I або II типу, які можуть бути зведені до узагальненого бета-розподілу. Таким чином, задача апроксимації після обґрунтування використання саме вказаних розподілів зводиться до визначення вибіркових оцінок моментів і розрахунку параметрів бета-розподілу. Обґрунтовано застосування бета-розподіля до об'єкту дослідження шляхом проведення числових досліджень для вибірок різного обсягу з різними середньоквадратичними відхиленнями змінної, яка і характеризує об'єкт дослідження.

Список літератури: **1.** *Вамболь С.О., Міщенко І.В., Кондратенко О.М., Бурменко О.А.* Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 1 // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 36 – 44. **2.** *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с. **3.** *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений / под ред. *А.Н. Колмогорова*. – М.: Наука, 1966. – 588 с. **4.** *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. **5.** *Ходасевич Г.Б.* Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Часть 1. Обработка одномерных данных [Электронный ресурс]: Учебное пособие. – Режим доступа: http://www.dvo.sut.ru/libr/opds/il30hodo_part/4.htm. **6.** *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с. **7.** *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 249 с. **8.** *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / под ред. *К.И. Бабенко*. – М.: Мир, 1980. – 608 с. **9.** Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. *М. Абрамовица* и *И. Стиган*. – М.: Наука, 1979. – 832 с. **10.** *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / под ред. *Л.И. Седова*. – М.: Наука, 1964. – 344 с. **11.** *Дьяконов В.П.* Справочник по алгоритмам и программа на языке бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. – М.: Наука, 1989. – 240 с. **12.** *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с. **13.** *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 328 с. **14.** *Крамер Г.* Математические методы статистики / под ред. *А.Н.Колмогорова*. – М.:Мир, 1975. – 648с.

Bibliography (transliterated): **1.** Vambol', S. O., et al. "Aproksymacija zakonu rozpodilu eksperymental'nyh danyh za dopomogoju beta-rozpodilu. Chastyna 1." *Visnyk NTU «KhPI».Zbirnuk naukovyh prac'. Ser.: Matematuchne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah.* No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 36–44. Print. **2.** Kobzar', A. I. *Prikladnaja matematicheskaja statistika. Dlja inzhenerov i nauchnyh rabotnikov.* Moscow: Fizmatlit, 2006. Print. **3.** Kendall, M., and A. St'juart. *Teorija raspredelenij*. Ed. A. N. Kolmogorov. Moscow: Nauka, 1966. Print. **4.** Tihonov, V. I. *Statisticheskaja radiotehnika*. Moscow: Radio i svjaz', 1982. Print. **5.** Hodasevich, G. B. "Obrabotka eksperimental'nyh dannyh na EVM. Chast' 1. Obrabotka odnomernyh dannyh: Uchebnoe posobie." *The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications*. The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications, 30 October 2009. Web. 20 September 2015. <http://www.opds.sut.ru/old/electronic_manuals/oed>. **6.** Vadzinskij, R. N. *Spravochnik po verojatnostnym raspredelenijam*. Saint-Petersburg: Nauka, 2001. Print. **7.** Kuznecov, D. S. *Special'nye funkcii*. Moscow: Vysshaja shkola, 1962. Print. **8.** Ljuk, Ju. *Special'nye matematicheskie funkcii i ih approksimacii*. Ed. K. I. Babenko. Moscow: Mir, 1980. Print. **9.** Abramovich, M. ed., and I. Stigan, I, ed. *Spravochnik po special'nym funkcijam s formulami, grafi-*

kami i tablicami. Moscow: Nauka, 1979. Print. **10.** Janke, E., F. Jemde and F. Ljosh. *Special'nye funkcii (Formuly, grafiki, tablicy)*. Ed. L. I. Sedova. Moscow: Nauka, 1964. Print. **11.** D'jakonov, V. P. *Spravochnik po algoritmam i programma na jazyke BASIC dlja personal'nyh EVM: Spravochnik*. Moscow: Nauka, 1989. Print. **12.** Ventcel', E. S., and L. A. Ovcharov. *Zadachi i uprazhnenija po teorii verojatnostej: Ucheb. posobie dlja stud. vtuzov*. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademija», 2003. Print. **13.** Gurskij, E. I. *Teorija verojatnostej s elementami matematicheskoj statistiki*. Moscow: Vysshaja shkola, 1971. Print. **14.** Kramer, G. *Matematicheskie metody statistiki*. Ed. A. N. Kolmogorova. Moscow: Mir, 1975. Print.

Надійшла (received) 25.09.2015

Вамболь Сергій Олександрович – доктор технічних наук, професор, зав. кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Вамболь Сергей Александрович – доктор технических наук, профессор, зав. кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Vambol' Sergij Oleksandrovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Міщенко Ігорь Вікторович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Мищенко Игорь Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Mishchenko Igor Viktorovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Вамболь Віола Владиславівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри хімії, екології та експертиз них технологій, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Вамболь Виола Владиславовна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры химии, экологии и экспертизных технологий, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Vambol' Viola Vladislavovna – Candidate of Technical Sciences, Docent, Docent at the Department of Chemistry, Ecology and Expertise Technology, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Кондратенко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Кондратенко Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Kondratenko Oleksandr Mykolajovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

УДК 389.14+658.16(075.8)

С. О. ВАМБОЛЬ, І. В. МІЩЕНКО, В. В. ВАМБОЛЬ, О. М. КОНДРАТЕНКО

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ БЕТА-РОЗПОДІЛУ. ЧАСТИНА 3

У даній, завершальній частині дослідження наведено визначення і проілюстровано параметри бета-розподілу для тіл кочення підшипників, а саме оцінено збіжність ітераційного процесу визначення цих параметрів, оцінено початкові і центральні моменти розподілу, збіг початкових моментів першого і другого порядку проілюстровано відповідними гістограмами і графіками. Наведені дані демонструють доцільність застосування математичного апарату бета-розподілу до вимірюваних фізичних величин, що чинять нелінійний вплив на механічні характеристики об'єкту дослідження. Отримана методологія і математичний апарат придатні для застосування бета-розподілу, для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

Вступ. У *метрології* існує підхід до побудови *універсальних сімей розподілів*, зокрема, апроксимація на основі *сімей розподілів Пірсона (бета-розподілу)*, який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до *нормального*, а отже вирізняється варіативністю і гнучкістю вирішення задачі апроксимації, але ще не повністю досліджений і не набув широкого використання. У попередніх частинах дослідження застосовано типовий закон розподілу (нормальний) до найпростішого елементу деталей машин – тіла кочення кулькового підшипника – як до тривимірного об'єкту найпростішої геометричного форми та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним, для знаходження справжнього або близького