СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.21

ФОКУСИРОВКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

БАСМАНОВ А.Е., ГЕРАСИН С.Н., ДИКАРЕВ В.А., РОДЗИНСКИЙ А.А.

Исследуются марковские процессы в широком смысле, имеющие континуальное множество состояний. Находятся условия, при выполнении которых имеет место фокусировка неоднородного марковского процесса на заданное распределение, либо стабилизация в его малой окрестности независимо от начального распределения.

Марковским процессом в широком смысле будем называть такой случайный процесс $\xi(t)$, для которого множество элементарных исходов $\Omega \subset R^n$, а множество событий состоит из всех борелевских множеств $\{B\}$, $B \subset \Omega$. Предполагается, что на множестве $\{B\}$ задана вероятностная мера P и условная вероятность удовлетворяет соотношению

$$P\big(\xi(t) \in A / \xi(s) \in B, \xi(s_1) \in B_1, \ldots, \xi(s_n) \in B_n\big) =$$
$$= P\big(\xi(t) \in A / \xi(s) \in B\big), \quad s_n < \ldots < s_1 < s < t.$$

Таким образом, рассматриваемый нами процесс является обобщением неоднородного марковского процесса на случай континуального множества состояний. Ниже при изучении процессов фокусировки и σ-фокусировки [1] будем, в основном, использовать счетную систему событий $\{B_j\}$, всюду плотную в множестве всех событий $\{B\}$. Это позволит свести анализ процесса с континуальным множеством состояний к изучению марковского процесса со счетным числом состояний. Основным объектом анализа будет стохастическая матрица $P_{st} = \|P_{st}(B_i, B_j)\|$, i, j =1, 2,.... Здесь $P_{st}(B_i, B_j)$ есть условная вероятность того, что исследуемая система в момент времени t попадает в состояние B_j, если в момент s она находилась в состоянии B_i. Эти вероятности легко вычисляются, если задано марковское семейство стохастических ядер $\{P_{st}(x, B)\}$, $s < t$, $(s,t) \in I \times I$. Здесь I – интервал (полуинтервал, отрезок) временной прямой. Далее существенно используется техника получения некоторых неравенств, сходная с [2].

Сформулируем основной результат работы. Пусть матрица $\|P_{st}(B_i, B_j)\|$, $s_0 < s < t < t_0$ удовлетворяет условиям:

1. Существуют такие последовательность индексов $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ и монотонная последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, $s_k \uparrow t_0$, $s_k < s_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(s_k, s_{k+1}) = \infty, \tag{1}$$

где $\delta(s_k, s_{k+1}) = \inf_i P_{s_k, s_{k+1}}(B_i, B_{j_k}) > 0$.

2. Собственный вектор $\vec{p}(t)$ матрицы $P^{\tau}_{s,t}$, отвечающий собственному числу, равному единице, имеет предел при $t \uparrow t_0$: $\lim_{t \uparrow t_0} \vec{p}(t) = \vec{\pi}$.

Тогда для любого начального распределения вероятностей $\vec{\pi}^0$, заданного в $s \in [s_0, t_0)$,

$$\lim_{t \uparrow t_0} \vec{p}(s,t) = \vec{\pi}. \tag{2}$$

В описанной ситуации t_0 называют точкой фокусировки [1]. Условие (1) эквивалентно существованию неинтегрируемых особенностей в точке t_0 всех или некоторых элементов инфинитезимальной матрицы $\Lambda(t)$. Если же ряд (1) сходится, но сумма его достаточно велика, либо последовательность собственных векторов (2) не имеет предела, но ее верхний и нижний пределы отличаются незначительно, при $t \uparrow t_0$ компоненты вектора $\vec{p}(s,t)$ будут локализоваться в s-окрестностях компонент некоторого вектора $\vec{\pi}$. В такой ситуации t_0 называется точкой s-фокусировки [1].

Приводимое ниже доказательство равенства (2) с некоторыми изменениями проводится по той же схеме, что и в [1]. Эти изменения связаны с тем, что теперь число состояний $\{\xi \in B_i\}$ бесконечно (счетно), в то время как доказательство, приведенное в [1], годится лишь для конечного числа состояний. Покажем, что предложенный в [1] подход можно изменить так, чтобы он стал пригоден и для счетного числа состояний.

В [1] исследование неоднородного марковского процесса с инфинитезимальной матрицей $\Lambda(s)$ было сведено к исследованию процесса с кусочно-постоянной инфинитезимальной матрицей $\tilde{\Lambda}(s)$ того же порядка, что $\Lambda(s)$. Такая аппроксимация исходного процесса процессом с надлежащим образом выбранной матрицей $\tilde{\Lambda}(s)$ позволила при доказательстве (2) использовать анализ, разработанный для однородных процессов. Кроме того, она давала возможность с любой степенью точности описать эволюцию исходного неоднородного процесса процессом с матрицей $\tilde{\Lambda}(s)$. Указанная схема позволила доказать следующее утверждение. Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и начальное распределение $\vec{\pi}^0$, заданное в любой точке $s \in [s_0, t_0)$, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \vec{\pi}^0)$, что для $t \in (s_0 - \delta, s_0)$ и любого j $|p_j(s,t) - \pi_j| < \varepsilon$. Здесь π_j – компоненты вектора $\vec{\pi}$ из (2). Модифицируем эту схему для процесса со счетным числом состояний.

Считаем, что инфинитезимальная матрица $\Lambda(s)$ исследуемого процесса $\xi(t)$ непрерывна на $[s_0, t_0)$ и что для всех s таких, что $s_0 < s < t < t_0$, ее диагональные элементы удовлетворяют условию

$$|\lambda_{ii}(s)| \le c(t) < \infty .$$

В этом случае исходный процесс $\xi(t)$ с матрицей $\Lambda(s)$, содержащей бесконечное число строк и столбцов, на любом отрезке $[s_0, t]$, $t < t_0$ можно с любой степенью точности аппроксимировать процессом $\hat{\xi}(t)$ с конечным числом состояний n. Инфинитезимальная матрица $\hat{\Lambda}(t)$ этого процесса есть левый верхний матричный блок матрицы $\Lambda(t)$, подвергнутый некоторой коррекции. Эта коррекция состоит в замене $\lambda_{ii}(t)$ величиной $\hat{\lambda}_{ii}(t) = \lambda_{ii}(t) + \Delta_i(t)$, где $\Delta_i(t) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Известно, что такая аппроксимация возможна при соответствующем выборе n для любого однородного процесса с инфинитезимальной матрицей $\Lambda(s)$, являющейся значением матрицы-функции $\Lambda(s)$ при любом фиксированном $s \in [s_0, t] \subset [s_0, t_0)$. Отсюда нетрудно получить, что существует n такое, что указанная выше аппроксимация исходного процесса $\xi(t)$ может быть реализована левым верхним диагональным блоком $\hat{\Lambda}(s)$ матрицы $\Lambda(s)$, имеющим для любого $s \in [s_0, t]$ одну и ту же размерность $n \times n$.

Очевидно, что выбор n, определяющий размерность матрицы $\hat{\Lambda}(s)$, зависит от точности аппроксимации исходного процесса с матрицей $\Lambda(s)$ процессом с матрицей $\hat{\Lambda}(s)$, содержащим n состояний.

Понятно, что с ростом n улучшается точность аппроксимации и что существует такая последовательность чисел $n_1, n_2, \ldots n_m, \ldots$ $(n_m \to \infty,\ m \to \infty)$, что аппроксимирующие процессы с числом состояний $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$, построенные по тому же правилу, что и процесс $\hat{\xi}(t)$, при неограниченном росте n_m будут давать погрешность в аппроксимации, стремящуюся к нулю. Поскольку для каждого из аппроксимирующих процессов имеет место соотношение (2) [1], то оно же будет иметь место и для предельного процесса $\xi(t)$.

Отметим, что фокусировка и стабилизация марковского процесса могут быть реализованы за сколь угодно малый промежуток времени путем сообщения инфинитезимальной матрице $\Lambda(t)$ сильных возмущений, выбранных специальным образом.

Литература: 1. *Дикарев В.А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Харьков, 1995, 9 с. Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95 № 526-Ук95. 2. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: Учебник для вузов. М.: Наука, 1985. 320 с.

Поступила в редколлегию 16.09.99

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Басманов Алексей Евгеньевич, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ. Научная специальность: вычислительная математика. Научные интересы: марковские процессы и их приложения. Увлечения: шахматы. Адрес: Украина, 310128, Харьков, Садовый проезд 5, кв.10, тел. 97-23-77.

Герасин Сергей Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМ ХТУРЭ. Научные интересы: стохастические процессы. Увлечения: лыжный спорт. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина 14, тел. (0572)40-93-72, (0572)72-12-38; e-mail: hm@kture.kharkov.ua.

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры ПМ ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей. Увлечения: туризм. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина 14, тел. (0572)40-93-72

Родзинский Анатолий Анатольевич, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ. Научная специальность: математическое моделирование и вычислительные методы. Научные интересы: математические модели в технике и экономике. Увлечения: компьютеры. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина 14, тел. (0572)40-93-72.

УДК 681.5.015(07)

ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ВИЗУАЛЬНЫМИ СРЕДСТВАМИ

КУЗЬМЕНКО В.М., ГНЕННЫЙ А.М.

Описывается применение идеографического подхода к языку GPSS, что позволило разработать систему визуального моделирования систем массового обслуживания Visual QSDM. Использование данного программного комплекса позволяет проводить моделирование достаточно сложных систем массового обслуживания без глубокого знания языков моделирования.

Решение смежных задач автоматизации исследования, управления и проектирования больших систем в настоящее время не может выполняться без использования методов имитационного моделирования. Для автоматизации динамического моделирования разработаны и используются специализированные пакеты программ, работа которых базируется на интерпретации программ-моделей, записанных посредством специального проблемно-ориентированного языка моделирования: GPSS, СЛАМ-2 и др. [1,2]. Однако создание программ-моделей требует взаимодействия специалистов различных областей: программистов, предметников, постановщиков и др. В связи с развитием самих моделируемых систем, необходимостью рассмотрения только отдельных аспектов этих систем программы-модели должны также изменяться, что требует постоянного взаимодействия этих типов специалистов. Альтернативой традиционной технологии создания имитационных моделей является идеографический подход [3], который позволяет создавать и модифицировать модель специалисту предметной области – непрограммисту.

Основой идеографического подхода служит использование идеографических элементов Id_i (i=1,..,N), которые, с одной стороны, являются визуальным изображением объектов моделируемой системы, а с другой – модулем, адекватно моделирующим этот объект. Идеографическая сеть Is, которая моделирует