

А.Е. Басманов, В.А. Дикарев

ФОКУСИРОВКА И СИНТЕЗ
НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ

Харьков 2003

УДК 519.21

Фокусировка и синтез неоднородных марковских процессов /
А.Е. Басманов, В.А. Дикарев. – Харьков, 2003. – 213 с.

Монография посвящена исследованию условий сходимости вероятностей неоднородных марковских процессов к предельным значениям. На основе доказанных теорем о фокусировке распределений предложены конкретные алгоритмы управления параметрами инфинитезимальной матрицы марковского процесса, обеспечивающие сходимость к заранее заданным распределениям.

Рассмотрена возможность восстановления информации о стохастической матрице неоднородного марковского процесса по стохастическим матрицам его фрагментов. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых такой синтез возможен. Для случая нормально распределенных ошибок во фрагментах построен статистический критерий, позволяющий проверить достоверность синтезированной матрицы процесса.

Полученные результаты используются для изучения диффузионных процессов, протекающих в промышленных экстракторах. Рассмотрены и другие приложения марковских процессов и, в частности, модель нейронной памяти.

Для специалистов в области прикладной математики, системного анализа и математического моделирования. Может быть полезна аспирантам и студентам ВУЗов.

Рецензенты

О.Г. Руденко, доктор технических наук (Харьковский Национальный университет радиоэлектроники),

С.В. Яковлев, доктор физико-математических наук (Харьковский университет внутренних дел)

© А.Е. Басманов,
В.А. Дикарев, 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Некоторые задачи, приводящие к марковским процессам	9
1.1. Нейронная память	9
1.2. Течение крови в сети мелких сосудов	10
1.3. Атласы экономико-производственных показателей и связей	11
1.4. Моделирование распадающихся экономик с помощью неоднородных марковских процессов	12
1.5. Описание процессов, происходящих в жидких смесях	13
2. Нейронная память	15
2.1. Введение и постановка задач	15
2.2. Описание имитационной модели	18
2.3. Численные эксперименты	19
2.4. Эффект сохранения пятна	22
2.5. Сопоставление с нейрофизиологией гиппокампа	26
2.6. Торможение в гиппокампе и критическое регулирование порогов	28
2.7. Множественность входов в гиппокамп и критическое регулирование шумов	30
2.8. Тэта-ритм как сигнал синхронизации импульсной следящей системы и его поведенческие корреляты	37
3. Фокусировка и стабилизация	41
3.1. Основные сведения из теории марковских процессов	41
3.2. Оценка точности σ -фокусировки марковского процесса	45
3.3. Решение системы дифференциальных уравнений Колмогорова	47
3.4. Стабилизация распределений марковского процесса	50
3.5. Произвольное начальное распределение	54
3.6. Компьютерное моделирование процессов фокусировки	58
3.7. Фокусировка распределений марковских процессов с континуальным числом состояний	70
4. Случайные блуждания на графах	75
4.1. Процессы с изменяющимся числом состояний	75
4.2. Простейшие схемы случайных блужданий	78
4.3. Случайные блуждания на графах	80
4.4. Фокусировка и σ -фокусировка в случайных блужданиях на графах	82
4.5. Частичная фокусировка	84
4.6. Случайные блуждания на графах с изменяющимся числом состояний	85
4.7. Случайные блуждания на графах, имеющих саргассовы зоны	90
4.8. Многослойные графы	94
4.9. Стабилизация на пересекающихся графах	98
5. Использование фокусирующих факторов при изготовлении лекарственных форм	103
5.1. Методы обработки фармакологических смесей	103
5.2. Марковский подход при описании процессов, происходящих в жидких смесях	106

5.3.Распределенные фокусирующие факторы	107
5.4.Стабилизация распределений вероятностей марковского процесса при локальных возмущениях его частей	111
5.5.Уравнения для высокочастотных колебаний, возникающих при воздействии детерминированных и случайных факторов	115
5.6.Применение зондирующих графов при исследовании динамики формирования фармакологических сиропов	119
6. Синтез марковского процесса по фрагментам	121
6.1.Разбиение марковского процесса на фрагменты	121
6.2.Синтез процесса по двум фрагментам	122
6.3.Необходимые и достаточные условия синтеза	125
6.4.Невыполнение условия согласования фрагментов	130
6.5.Достоверность синтезируемой матрицы	136
6.6.Синтез процесса со счетным числом состояний	139
6.7.Марковские процессы в широком смысле	140
6.8.Процесс блуждания на графах	144
7. Исследование диффузионных процессов	149
7.1.Собственное распределение диффузионного процесса	149
7.2.Аппроксимация диффузионного процесса марковским процессом с конечным числом состояний	154
7.3.Сходимость распределений диффузионных процессов	158
7.4.Численное решение уравнения диффузии	164
8. Приложение метода синтеза процесса по фрагментам	167
8.1.Процессы экстрагирования	167
8.2.Экстракторы промышленного типа	169
8.3.Извлечение сахара из свеклы	171
8.4.Стационарный режим	179
Заключение	183
Литература	185
Приложение А. Синтез марковского процесса по его фрагментам	196
Приложение Б. Сходимость плотности распределения вероятностей диффузионного процесса к предельной плотности	205

ВВЕДЕНИЕ

Постоянный интерес к марковским процессам со стороны теоретиков и прикладников, наблюдающийся уже более семидесяти лет, объясняется тем, что многие реальные процессы, с которыми приходится сталкиваться в различных областях науки и техники, обладают так называемым марковским свойством. В силу этого, такие процессы могут быть описаны с той или иной степенью точности с помощью соответствующим образом подобранного марковского процесса (или нескольких марковских процессов, каждый из которых наиболее полно передаёт интересующие исследователя стороны реального процесса). Марковское свойство, которое с некоторым огрублением можно сформулировать так – «при фиксированном настоящем будущее не зависит от прошлого», является характерной чертой многих процессов биологии, экологии, физики и химии, экономики и техники. Общеизвестна роль марковских процессов в радиотехнике и электронике.

Среди множества работ, посвящённых развитию теории марковских процессов и её приложениям (см., например, [7, 76, 68, 83, 89, 94] и содержащуюся в них библиографию), содержатся работы, в которых исследуется вопрос о сходимости вероятностей $p_j(t)$ ($j=1, 2, \dots$) состояний процесса (при $t \rightarrow \infty$, t – время) к своим предельным значениям: $p_j(t) \rightarrow \pi_j$, $\pi_j > 0$. Эти пределы должны быть одинаковы для всех начальных распределений вероятностей, заданных в один и тот же начальный момент времени t_0 . Марковские процессы, обладающие указанным свойством, называют эргодическими, предельное распределение вероятностей $\{\pi_j\}$ называют стационарным или финальным, а теоремы, в которых выясняется, при выполнении каких условий процесс является эргодическим – эргодическими теоремами.

Важность выяснения того, является ли конкретный процесс эргодическим или нет, очевидна. Например, если данный процесс описывает некоторый технологический режим, то важно знать, будут ли его основные рабочие характеристики с течением времени локализованы вблизи некоторых, не изменяющихся (или мало изменяющихся) во времени значений. Действительно, выполнение этого условия означает, что через некоторое время будет иметь место стабильность работы указанного режима.

Выявлению условий, при выполнении которых марковский процесс является эргодическим, посвящено много работ (см., например, работы [123, 160] и содержащуюся в них библиографию).

Особый интерес с точки зрения приложений представляют теоремы типа эргодических для неоднородных процессов Маркова. Исследование этого вопроса было произведено в ряде работ (см., например, [129, 73]). В них существование финальных вероятностей выясняется по-прежнему при условии $t \rightarrow \infty$. Отметим здесь сравнительно недавние работы [30, 31], в которых решение задачи о существовании предельных вероятностей произведено с

использованием теории устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подчеркнем, что до недавнего времени задача о существовании финальных вероятностей рассматривалась лишь при условии $t \rightarrow \infty$. Вместе с тем, с точки зрения приложений представляет интерес и задача о выявлении условий, при выполнении которых финальные вероятности состояний существуют при $t \rightarrow t_0$, $t_0 < \infty$. В частности, прикладное значение имеет следующая задача: можно ли построить на $[s_0, t_0)$ ($t_0 < \infty$) марковский процесс с дискретным или непрерывным временем (т.е. задать на $[s_0, t_0)$ матрицу $P(s, t)$ переходных вероятностей процесса) такой, чтобы для любого начального распределения вероятностей, заданного в момент времени $t = s_0$, вероятности состояний процесса при $t \uparrow t_0$ принимали заданные предельные значения $\{\pi_j\}$. В такой ситуации говорят, что процесс фокусирует на распределение $\{\pi_j\}$ в момент t_0 [60-62]. Оказывается, что эта задача может быть решена для процессов с конечным, счётным, и континуальным множеством состояний для временного промежутка $[s_0, t_0)$ сколь угодно малой длительности.

Основные результаты в этом направлении содержатся в работах [38, 58, 59, 62, 63]. В работе [2] с помощью подхода, изложенного в [62], описано решение задачи о фокусировке для неоднородного марковского процесса с дискретным временем. В работе [57] поставлена и решена задача о фокусировке процесса с конечным или счётным числом состояний при локальных возмущениях части его состояний (возмущений фрагментов процесса). В [64, 174] исследована задача о распадающихся экономиках с фиксацией основных экономических показателей в момент распада в каждой из экономик.

Во всех перечисленных публикациях о фокусировке решение задачи (т.е. построение процесса, который фокусирует) может быть получено, если некоторое подмножество элементов инфинитезимальной матрицы процесса получит сильные возмущения в левой полукрестности точки фокусировки t_0 . Эти возмущения должны быть определённым образом связаны между собой. Необходимым условием фокусировки является требование, состоящее в том, чтобы эти возмущения были неинтегрируемы [62]. Подчеркнём, что для марковских систем, с которыми приходится сталкиваться на практике, это условие не может быть выполнено, т.к. его реализация связана с бесконечными энергозатратами. Поэтому в [65] исследуется задача и о поведении при $t \uparrow t_0$ ($t_0 < \infty$) вероятностей состояний процесса и для случая, когда указанные возмущения интегрируемы.

Установлено, что если эти интегралы достаточно велики, то при $t \uparrow t_0$ для всех вероятностей состояний $p_j(s_0, t)$ независимо от начального распределения вероятностей, заданного в момент s_0 , выполняется условие $p_j(s_0, t) \in (a - \sigma, a + \sigma)$, $a > 0$, $\sigma > 0$. В этом случае говорят, что точка t_0 является точкой σ - фокусировки процесса. Если в момент t_0 имеет место фокусировка

или σ - фокусировка, то t_0 называют точкой стабилизации процесса. Из сказанного ранее следует, что стабилизация процесса может быть достигнута, если сообщить элементам его инфинитезимальной матрицы сильные возмущения, определённым образом связанные между собой. Подчеркнём, что, если возмущения, обеспечивающие стабилизацию, локализованы на сколь угодно малых временных промежутках, то стабилизация процесса может быть выполнена за сколь угодно малый промежуток времени.

Последнее утверждение нуждается в уточнении. Дело в том, для большинства реальных процессов характеристики среды, в которой они протекают (давление, плотность, температура и др.), не могут существенно изменить свои значения за сколь угодно малые промежутки времени. Так, реализовать с помощью сильных возмущений стабилизацию процесса диффузии частиц, взвешенных в воде, проще всего в температурной зоне, локализованной вблизи 4°C – температуры, при которой вода имеет максимальную плотность. Известно, что в этой зоне при заданных малых колебаниях температуры, величины, определяющие процесс диффузии, претерпевают максимальные вариации. Однако для получения таких вариаций необходимо, чтобы быстрые изменения во времени испытывала и температура воды. Последнее требует времени даже при значительных энергетических затратах.

На практике часто возникает необходимость в стабилизации процесса не к определённому моменту времени t_0 , а в его стабилизации на некотором временном промежутке, например, на промежутке $\alpha \leq t \leq \beta$. Под этим понимается выполнение при всех $t \in [\alpha, \beta]$ условия

$$|\vec{p}(s_0, t) - \vec{\pi}| \leq \sigma, \sigma > 0.$$

Здесь $\vec{p}(s_0, t)$, – вектор, компонентами которого являются вероятности состояний процесса в момент t , $s_0 < \alpha$ – момент задания начального распределения процесса, $\vec{\pi}(t)$ – вектор-функция, в σ -окрестности которой производится стабилизация. Величина σ характеризует точность стабилизации. Понятно, что задача о таком управлении процессом, при котором имела бы место его стабилизация на заданном временном промежутке, часто возникает при разработке и наладке технологических режимов, связанных с массовым производством.

Задача о стабилизации распределений вероятностей неоднородных марковских процессов на конечном временном промежутке была поставлена и решена в работе [13]. В ней для процессов с конечным и счётным множеством состояний было установлено, что стабилизацию можно реализовать с помощью специальным образом подобранных возмущений (управляющих воздействий) элементов инфинитезимальной матрицы процесса. Каждое такое возмущение локализовано на временном промежутке δt малой длительности и с точки зрения его воздействия на процесс представляет собой «толчок»,

воздействующий на процесс так, чтобы для всех $t \in \mathcal{J}$ выполнялось указанное условие стабилизации. Последовательность таких толчков, вообще говоря, различных по степени их воздействия на процесс и соответствующим образом распределённых на промежутке $\alpha \leq t \leq \beta$ позволяет произвести стабилизацию на этом промежутке. Этот подход реализуем и для процессов с континуальным множеством состояний.

В [13] было показано, что выбор управляющих воздействий (толчков) может быть произведен многими способами. Это даёт возможность для исследуемого процесса произвести этот выбор наиболее оптимальным с точки зрения конкретной задачи образом. Управление производственным процессом посредством направляющих толчков с целью его стабилизации, как правило, представляет собой трудную задачу. Нужно выяснить, насколько этот производственный процесс совместим с управлением, основанным на указанных воздействиях: насколько приспособлены к неизбежно возникающим при этом аритмиям оборудование и рабочая масса (среда, в которой протекает процесс). Нужно также выделить те возмущения (их длительности, плавность изменений, амплитуды), которые в конкретных условиях могут быть использованы. Таким образом, задача о стабилизации процесса не может быть решена без всестороннего анализа конкретного производственного процесса.

1. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССАМ

1.1. Нейронная память

По современным представлениям электрофизиологии память животных и человека можно подразделить на кратковременную и долговременную [23, 39, 80]. Первая связана с первичной электрофизической реакцией нейронов на стимул, вторая – с последующими необратимыми структурными изменениями межнейронных связей. Под кратковременной памятью понимают способность нейронной сети сохранять (удерживать) некоторые заданные пространственные конфигурации возбуждённых нейронов достаточно большое время (порядка нескольких секунд) для того, чтобы могла произойти структурная или биохимическая модификация межнейронных связей, активных в этих конфигурациях. Кратковременная память, по-видимому, необходима не только для записи информации в долговременную память, но также и для считывания из неё сигналов в форме электрической активности, напоминающей первоначальную записанную конфигурацию.

Основная задача, которая возникает при исследовании связи между кратковременной и долговременной памятью, состоит в следующем. Пусть в заданной нейронной сети установлены связи между её элементами и заданы вероятности перехода порогового потенциала для любой пары её элементов. Можно ли подобрать указанные связи так, чтобы в сети появилась кратковременная память? Появление кратковременной памяти на выделенной группе нейронов имеет место в том случае, если все (или почти все) нейроны из этой группы возбуждаются в течение некоторого промежутка времени достаточно часто.

Трудность задачи состоит в том, что необходимое время сохранения конфигураций групп возбуждённых нейронов должно на 2 – 3 порядка превышать время релаксации одиночных независимых нейронов (оно составляет всего несколько десятков миллисекунд). Поэтому если решение и существует, то только за счёт согласованной активности всех элементов сети, поскольку в задаче исключена возможность увеличения памяти одиночного нейрона с помощью каких-либо более медленных субклеточных процессов. Эта задача подробно рассмотрена в разделе 2.

Это направление указало на принципиально новые возможности моделирования памяти и положило начало разработке общих методов анализа многокомпонентных систем. Однако полученные здесь результаты не позволяют выяснить, реализуется ли подобный критический режим фиксации кратковременной памяти в нервной системе.

В работах [23, 39, 80] возникновение и фиксация кратковременной памяти достигались сведением задачи возбуждения нейронной сети к вероятностной задаче о случайных блужданиях в ней.

1.2. Течение крови в сети мелких сосудов

В последние десятилетия физиологи и биофизики исследуют процессы кровотока в сети мелких сосудов. При этом и экспериментаторы, и теоретики в основном изучают поведение одиночных сосудов. Вместе с тем имеются факты, указывающие на необходимость рассмотрения взаимодействия мелких кровеносных сосудов в сети друг с другом. Наиболее существенным из них является факт пространственной неоднородности тканевого кровотока, наблюдаемый во многих органах. Очевидный пример этого – кровоток в коже лица и ладоней. Красные и белые пятна на лице и ладонях – это результат неоднородного кровозаполнения. Неоднородность кровотока была зарегистрирована и в коре головного мозга. О возможном неоднородном распределении кровотока в сердечной мышце свидетельствуют микроинфаркты (точечные омертвения) миокарда.

Следует заметить, что сосуды, заполненные кровью, образуют весьма сложную сеть, и движение крови в артериолах, капиллярах и венах происходит не всегда по одним и тем же путям. Так кровь из артериальной ветви в венозную может перетекать как коротким путём, так и более длинным. Ясно, что если кровь течёт по короткому пути, то сопротивление течению меньше, чем в том случае, когда кровь течёт по более длинному пути. А поэтому пространственная структура кровотока может существенно влиять и на сопротивление сосудистой сети. Известный факт 20-кратного увеличения кровотока в мышце при физической нагрузке по сравнению с состоянием покоя при всего лишь 20 %-ном увеличении градиента давления может быть объяснён пространственным упорядочением кровотока.

В основном рассматриваются два механизма, влияющие на пространственную структуру кровотока в сети мелких сосудов и её гидродинамическое сопротивление.

а) Изменение структуры сети за счёт того, что в её состав входят не только пассивные сосуды – капилляры, но и активные, имеющие мышечный слой в стенке (артериолы, вены, артерио-венозные шунты). Они могут открываться и закрываться в зависимости от внутрисосудистого давления и мышечного напряжения и тем самым изменять структуру путей, по которым может двигаться кровь.

б) Изменение направленности кровотока в отдельных участках сети при одной и той же конфигурации совокупности открытых сосудов.

Реальная сеть сосудов имеет очень сложную структуру. На первом этапе исследования отдельно взятого участка кровеносной сети, сеть, отвечающая этому участку, подменяется двумерной решёткой. Более точное моделирование процесса кровотока производят с помощью подмены исследуемой сети соответствующим образом подобранным графом [4, 107, 108]. Затем кровоток в сети изучается с помощью процесса случайных блужданий на указанном графе. Этот процесс является неоднородным.

1.3. Атласы экономико-производственных показателей и связей

Известно, что многие процессы, исследуемые в экономике, удобно описывать с помощью соответствующим образом построенных графов. Основной моделью, описывающей процесс производства, является граф (система зависимостей и отношений), отражающий совокупность всех производственных, экономических и информационных связей между различными цехами и службами предприятия. Вершины этого графа изображают соответствующие подразделения предприятия, а его дуги – связи между его подразделениями. К числу связей относятся потоки грузов, потоки изготавливаемой продукции, заготовок и комплектующих изделий, поточные линии сети силовых кабелей, информационные каналы диспетчерской и других служб.

Экономическая деятельность любого крупного предприятия (корпорации) настолько сложна и разностороння, что часто её описывают не одним графом, а их набором (атласом). Графы, входящие в атлас, связаны между собой. Это связи между различными звеньями и производственными процессами предприятия. Они, вообще говоря, изменяются во времени. Эти изменения могут быть учтены, если рассматривать процессы на графах с характеристиками, изменяющимися во времени.

Отдельные графы, составляющие атлас, связаны друг с другом общими дугами и вершинами. При выполнении некоторых условий стабилизация процесса на одном из графов приводит к его стабилизации на всех графах атласа – абсолютная стабилизация. Далее будут приведены условия, при выполнении которых абсолютная стабилизация возможна (или не имеет места).

Все вершины и дуги графа должны быть снабжены данными о процессе производства, экономических затратах, потерях, плановых показателях и отклонениях от них. Чтобы эти данные описывали динамику производства и затрат, нужно фиксировать их достаточно часто. В ряде случаев, например, при исследовании периодичности некоторого технологического процесса, следует располагать такими данными для малых промежутков времени. Эти данные записываются в виде матрицы технико-экономических показателей (МТЭП), элементы которой характеризуют определённые стороны процесса производства, экономических, материальных и трудовых затрат.

Отдельные фрагменты производственного графа часто подвергаются случайным воздействиям, которые, влияя на связанные с ними вершины, вносят случайные сбои в работу цехов и других служб. Эти сбои отрицательно влияют на производственные циклы, т. к. приводят к резким колебаниям их характеристик. Прогнозирование и оценивание таких колебаний основывается на статистических данных, содержащихся в МТЭП, и их теоретико-вероятностном анализе.

Особый интерес представляют фрагменты производственного графа, которые устойчивы относительно малых возмущений программных показателей, а также такие фрагменты, внутри которых характеристики производственных процессов являются известными функциями от этих

возмущений. Выявление таких фрагментов позволяет достаточно точно прогнозировать процесс производства внутри каждого из них. Такие фрагменты выгодно отличаются от фрагментов, внутри которых даже малые возмущения рабочих характеристик приводят к существенным, а в ряде случаев и непредвиденным отклонениям производственных процессов от нормы.

Неустойчивость проявляет себя на тех фрагментах, на которых производственные процессы наиболее подвержены воздействию случайных факторов, отклонениям и сбоям. Выявление и исследование таких фрагментов является важной задачей. Эти фрагменты часто обнаруживают неустойчивость далеко не для всех возмущающих режимов. Чаще всего неустойчивость проявляется для определённых наборов возмущений. Такие наборы (для каждого неустойчивого фрагмента) и следует фиксировать в первую очередь. Это можно сделать с помощью статистических данных, содержащихся в МТЭП.

1.4. Моделирование распадающихся экономик с помощью неоднородных марковских процессов

В [64, 65, 174] исследована возможность такого управления распадом единой экономической структуры на несвязанные или слабо связанные структуры, при котором их основные показатели в моменты времени, близкие к моменту распада или совпадающие с ним, принимают любые наперёд заданные значения или локализуются вблизи них. Распад экономик исследуется с помощью неоднородных марковских процессов с непрерывным временем и конечным числом состояний. Предполагается, что распад происходит за конечный промежуток времени. Его анализ производится с помощью уравнений Колмогорова [94] с инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$, заданной на временном промежутке $[s_0, t_0]$, на котором изучается распад. Под состоянием j , $j = 1, \dots, n$, исследуемого процесса $\xi(t)$ следует понимать одно из возможных состояний исследуемой экономики. Оно может быть описано заданием основных ее экономических показателей.

На основе уравнений Колмогорова была создана модель, имитирующая распад экономической системы. С её помощью был проведен ряд экспериментов. Было подтверждено, что при выполнении ряда определённых условий, в определённые моменты времени происходит стабилизация процесса. Установлено, что характер распада процесса зависит от вида разложения инфинитезимальной матрицы на не взаимодействующие или почти не взаимодействующие блоки. Был реализован алгоритм построения матрицы $\Lambda(s)$, описывающей процесс стабилизации.

Более детальный анализ динамики распадающихся экономик с учётом их связей возможен на основе анализа процессов случайных блужданий на графах.

Из содержания этого подраздела видно, что решение задач физиологии, нейрофизиологии и экономики требует привлечения методов вероятностного анализа – исследования процессов случайных блужданий на графах. Процессы случайных блужданий используются при изучении и ряда других задач. К ним

относятся задачи об эволюции растительных сообществ [85] о структурах растительного покрова, устойчивых к внешним воздействиям [86]; об эволюции масс частиц при их блужданиях со склеиванием [189], а также задачи, связанные с изучением сложных систем [116, 141]. Все перечисленные задачи связаны с исследованием неоднородных процессов. Подчеркнём, что к настоящему времени анализ процессов неоднородных блужданий на графах произведен не был. В частности, не были известны условия, при выполнении которых процесс случайных блужданий будет стабилизирован за конечный промежуток времени.

1.5. Описание процессов, происходящих в жидких смесях

Известно, что процессы, связанные с изготовлением различных жидких смесей, представляют собой процессы диффузии. Далее для определённости под жидкой смесью будет пониматься фармакологический раствор (фармакологический сироп). Однако изложенный ниже подход в описании процессов растворения в основном приложим и к другим жидким смесям. Известно, что помимо низкочастотных колебаний, присутствие которых связано с работой оборудования, весомый вклад в процесс обработки лекарственного сырья вносят слабые электромагнитные поля, возникающие при турбулентных движениях жидкости [111], и быстроизменяющиеся во времени вибрации. Часто их высокочастотная компонента представлена достаточно массивно. Присутствие таких вибраций в обрабатываемом фармакологическом растворе обусловлено суммой хаотических и случайных воздействий. Эти воздействия возникают из-за несовершенства работы оборудования и степени его изношенности (шероховатости, микротрещины, раковины в передающих звеньях) и неизбежных помех, которые привносятся в рабочий режим действующего оборудования шумы в силовых кабелях, случайные электромагнитные поля, а также сама природа процесса и другие факторы, которые обычно трудно выявить. Опишем их.

Известно, что если проводящая (и даже слабо проводящая) среда находится в магнитном поле, то при гидродинамических движениях в ней индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. Поскольку фармакологический сироп вплоть до последних этапов его приготовления подвергают перемешиванию, то присутствие этих движений неизбежно. Известно также, что слабые магнитные поля могут присутствовать в жидких растворах даже в заключительный период растворения их компонент. Но на токи в магнитном поле действуют силы, которые могут влиять на движение жидкого раствора. С другой стороны, эти токи меняют и само магнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидродинамических явлений, которая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений поля и уравнений движения жидкости. Эти рассуждения позволяют выявить лишь качественную картину взаимодействия указанных полей с жидкой средой.

К сказанному следует добавить следующее. В жидком растворе на всех этапах растворения его компонент могут возникать турбулентные движения, которые приводят к возникновению магнитных полей. Даже в слабопроводящей жидкости всегда существуют малые возмущения, вызванные факторами, посторонними по отношению к самому движению жидкости (например, магнитомеханическими эффектами во вращающихся участках жидкости и тепловыми флуктуациями) и сопровождающиеся появлением очень слабых электрических и магнитных полей. Дальнейшее поведение полей – будут ли они в результате турбулентного движения в среднем заметно усиливаться или затухать – зависит от свойств самой жидкости. Обычно имеет место их затухание и тогда приходится сталкиваться с чисто гидродинамической турбулентностью, создающей фон, на котором развиваются малые магнитные возмущения.

2. НЕЙРОННАЯ ПАМЯТЬ

Приводимые в данном разделе рассуждения, выводы и рисунки взяты авторами из работы [80].

2.1. Введение и постановка задач

По современным представлениям электрофизиологии память животных и человека можно подразделить на кратковременную и долговременную. Первая связана с первичной электрофизической реакцией нейронов на стимул, вторая – с последующими необратимыми структурными изменениями межнейронных связей. Под кратковременной памятью понимается способность нейронной сети сохранять (или удерживать) некоторые заданные пространственные конфигурации совозбужденных нейронов достаточно большое время (порядка нескольких секунд) для того, чтобы могла произойти структурная или биохимическая модификация межнейронных связей, активных в этих конфигурациях. Кратковременная память, по-видимому, необходима не только для записи информации в долговременную память, но также и для считывания из нее сигналов в форме электрической активности, напоминающей первоначальную записанную конфигурацию.

Основная задача состоит в следующем. Предположим, что электрическая активность одиночных независимых нейронов описывается некоторой достаточно правдоподобной моделью (например, известной моделью первого прохождения порогового уровня случайным мембранным потенциалом с экспоненциальным затуханием [92]). Введем локальные связи между нейронами, то есть такие связи, чтобы проходящий на данный нейрон пресинаптический импульс заметно изменил величину мембранного потенциала лишь в том случае, если он пришел от нейрона, расположенного в некоторой окрестности данного. Можно ли подобрать силу этих связей таким образом, чтобы у сети появилась кратковременная память?

Трудность задачи состоит в том, что необходимое время сохранения конфигураций должно на 2–3 порядка превышать время релаксации одиночных независимых нейронов. (Последнее определяется способностью независимых нейронов быстро адаптироваться и реагировать на поступающие возмущения). Поэтому если и существует решение, то только за счет согласованной активности всех элементов сети, поскольку в нашей задаче исключена возможность увеличения памяти одиночного нейрона с помощью каких-либо более медленных субклеточных процессов.

Ближайшая аналогия – эффекты коллективности, изучаемые в статистической физике. Эта аналогия была отмечена в серии работ группы московских математиков [33, 34], первоначально связанной с моделированием некоторых отделов центральной нервной системы [90, 142]. Вначале с помощью машинных экспериментов было обнаружено, а затем строго доказано, что очень длинная цепочка последовательно соединенных самовозбуждающихся нейроноподобных элементов (формальных нейронов с внутренними шумами) обладает нетривиальным поведением, напоминающим

явление фазового перехода: при достаточно низких, но ненулевых шумах система неэргодична. Таким образом, такая сеть имеет несколько стационарных состояний, в которые она может попасть в зависимости от начальных условий и тем самым может сколь угодно долго помнить эти начальные состояния.

Это направление указало на принципиально новые возможности моделирования памяти и положило начало разработке общих методов анализа многокомпонентных систем. Однако полученные здесь результаты сами по себе не позволяют выяснить, реализуется ли подобный критический режим в нервной системе. Причина, конечно, в том, что их основная модель, задача Ставской, основывается на посылках, не соответствующих реальности (одномерная решетка, дискретное время, формальный нейрон). В этом отношении более обнадеживает опыт изучения критических явлений с помощью так называемой кинетической модели Изинга [178], главным образом из-за возможности установить нейронные аналоги фундаментальных физических понятий – температуры, намагниченности, восприимчивости, – тесно связанных с экспериментальными измерениями. К сожалению, описанная модель постулирует маловероятные для нейронов допущения:

А. Все стационарные состояния гиббсовские.

В. Выполняется принцип детального баланса («обратимость во времени»).

С. В отсутствие взаимодействия состояния отдельного элемента либо ± 1 , либо распределены симметрично.

Естественно, что проверка хотя бы приблизительного согласия их с электрофизиологическими характеристиками должна быть важной составной частью задачи, наряду с исследованием возможности отказаться от этих допущений. Необходимость последнего можно понять, если учесть, что нейронная сеть – неавтономная, открытая система, и ее временная эволюция, в отличие от кинетической модели Изинга, определяется не гамильтонианом, а нелинейным функционалом от состояния нейронов в данный момент.

Попытка связать модель Изинга с долгоживущими состояниями в мозге содержится в большой серии работ [183, 190]. Все их результаты, особенно более ранние, кажутся не связанными с допущениями А, В, С, а вытекают из следующего несколько, на первый взгляд, загадочного постулата:

Д. Вероятность срабатывания i -го единичного нейрона равна

$$(1 + \exp(-\beta x_i))^{-1}.$$

где x_i – суммарный мембранный потенциал i -го нейрона за вычетом порогового уровня; β – константа.

На самом деле, как отмечено в [190], постулат Д заимствован из квантовой механики; там он следует из более фундаментальных допущений А, В, С, причем там x_i – локальный гиббсовский потенциал i -го спина, а β – обратная температура. Поэтому неудивительно, что условия существования кратковременной нейронной памяти оказались в этих работах тождественными

условиям существования дальнего порядка в магнитной системе. Возникает естественный вопрос, в чем же специфика нервной системы.

В работе [190] приведено эвристическое обоснование постулата D в терминах нейрональных процессов, при этом величина $1/\beta$, идентифицирована как среднеквадратическое значение синаптических шумов. Авторы в будущем вместо постулата D обещали рассмотреть задачу о первом достижении границы случайным процессом. Заметим, что эта задача весьма близка к рассматриваемой основной задаче.

В целом оценить результаты этого направления довольно трудно, так как работы выполнены на физическом уровне строгости и нередко возникает сомнение в том, что они согласуются с результатами имитационных моделей [178]. Так, примененный матричный формализм, справедливый только при высоких температурах, заставляет думать, что они не описывают больших времен релаксации, наблюдаемых во многих машинных экспериментах (см., рис. 2.5). Тем самым проблема кратковременной нейронной памяти еще ждет своего решения.

Дальнейшее продвижение в этом направлении осложняется тем, что для более общей модели Изинга без предположений B и C неизвестно почти никаких математических результатов о существовании фазовых переходов. Поэтому роль имитационного моделирования на ЭВМ резко возрастает.

Но особенно велика роль имитационной модели для организации экспериментов по обнаружению критического режима в нервной системе. Здесь наибольший интерес представляют измерения силы синаптических связей. Однако использование для этого обычных кросскорреляционных измерений должно неизбежно столкнуться с серьезными трудностями из-за принципиальной нестационарности «метастабильной» фазы критических явлений.

Итак, основная задача о существовании кратковременной нейронной памяти может быть подразделена на следующие относительно самостоятельные задачи:

- 1) методом моделирования на ЭВМ обнаружить и исследовать критический режим, приводящий к неэргодическому поведению сети, составленной из неформальных нейронов, соединенных между собой по типу двумерной модели Изинга;

- 2) разработать метод анализа сети без предположений A, B, C и качественно объяснить поведение основных макропеременных системы – среднего уровня и ее дисперсии;

- 3) обосновать гиббсовость стационарных состояний сети (допущение A) при более слабых предположениях, чем B и C, и обсудить его возможную неединственность как проявление кратковременной памяти;

- 4) решить задачу о первом достижении случайным процессом криволинейной границы и применить ее для отыскивания нейронных аналогов парного потенциала, температуры и внешнего поля;

5) разработать новый метод идентификации взаимодействия между нейронами и дать рекомендации по его применению при поиске критического режима в реальных нейронных сетях;

б) предложить структурно-функциональную модель нейронной памяти, реализующую критический режим применительно к конкретной нейронной структуре мозга.

В данном разделе будут рассмотрены лишь первая и частично последняя задачи.

2.2. Описание имитационной модели

Основная модель нейронной сети в целом следует допущениям аналитической модели [92], но имеет некоторые отличия, частично обусловленные реализацией на ЭВМ, а частично связанные с уточнением структур связей (по типу модели Изинга). Так, время в модели дискретно, один шаг $\Delta\tau$ соответствует времени абсолютной рефрактерности.

1. Порог нейрона учитывает абсолютную и относительную рефрактерность и имеет вид, изображенный на рис. 2.1, где $t_{абс} = \Delta\tau$, $tg\psi = 3$.

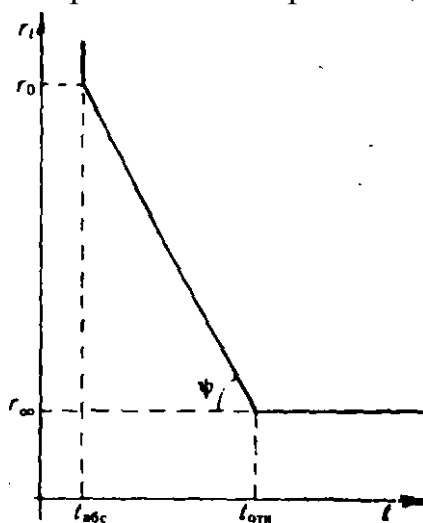


Рис. 2.1. Кривая порога

2. Каждый нейрон двусторонне связан с четырьмя соседними элементами, расположенными в узлах плоской решетки. Все веса связей одинаковы и равны амплитуде скачка a , на которую увеличивается мембранный потенциал данного нейрона при поступлении на него возбуждающего импульса от соседей. Граничные условия периодические.

3. В отсутствие входных импульсов мембранный потенциал каждого нейрона затухает линейно до потенциала покоя.

4. После каждого пересечения мембранным потенциалом порога нейрон посылает возбуждающий импульс на соседние нейроны, а его мембранный потенциал становится равным потенциалу покоя. Порог после возбуждения принимает значение $+\infty$, последующее изменение порога показано на рис. 2.1 (при этом ноль на оси времени соответствует моменту возбуждения нейрона).

5. К описанному в п. 3 мембранному потенциалу добавлен стационарный гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Модель имеет три основных параметра a , σ , r_∞ . Остальные параметры фиксированы, причем в большей части экспериментов r_∞ тоже фиксируется и приведенные значения a и σ нормированы на r_∞ .

Состоянием сети называется решетчатая конфигурация из нулей и единиц, соответствующих возбужденному ($x_i^t = 1$) или невозбужденному ($x_i^t = 0$) нейрону.

Уровнем активности сети будем называть величину

$$\bar{x}^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^t, \quad (2.1)$$

где N – число нейронов в сети. В рассмотренных ниже сетях выбиралось от 400 до 2500 модельных нейронов.

2.3. Численные эксперименты

Динамика уровня активности: выход на стационарный уровень. Исследование нашей модели мы начнем с анализа достаточно простой характеристики работы сети – уровня активности \bar{x}^t . Рассмотрим реализации \bar{x}^t при различных значениях параметров модели a и σ , но при одной и той же начальной конфигурации (пятно из единиц на фоне нулей с $\bar{x}^0 = 0,024$, рис. 2.2).

Задавая разные начальные значения датчика псевдослучайных чисел, мы получили разные реализации \bar{x}^t для фиксированных значений параметров сети и начальной конфигурации.

Все реализации \bar{x}^t ведут себя следующим образом: некоторое время после начала имеется тренд уровня активности, затем тренд исчезает и \bar{x}^t колеблется вокруг некоторого стационарного значения, зависящего от a и σ . При $a = 0,84$, $\sigma = 0,2$ наблюдается резкое увеличение τ . Эти значения параметров a и σ мы будем называть критическими. Время выхода на стационарный уровень в критической ситуации возрастает с увеличением размеров сети (рис. 2.6).

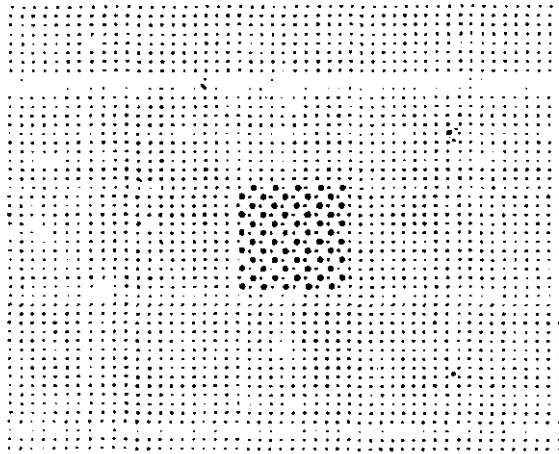


Рис. 2.2. Начальная конфигурация

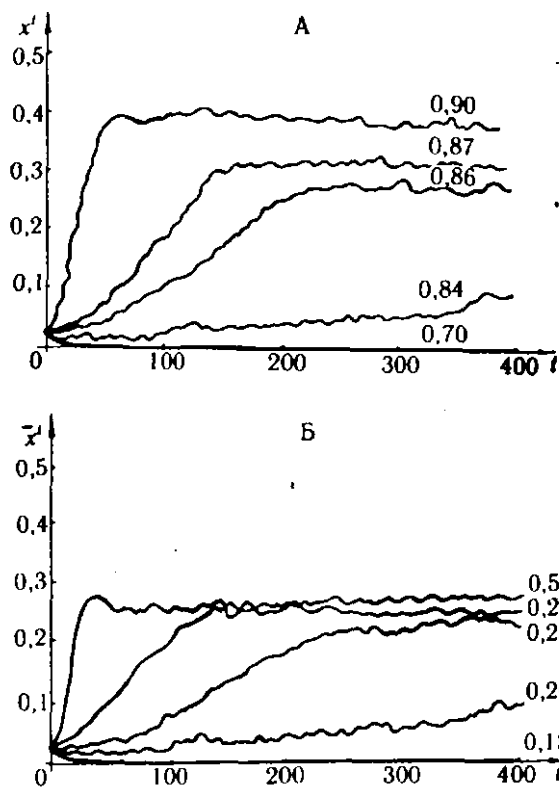


Рис. 2.3. Реализации \bar{x}^t : А – при различных значениях a ($\sigma = 0,2$); Б – при различных значениях σ ($a = 0,84$). В обоих случаях $r_0 = 30$, $r_\infty = 10$

Для сети с критическими параметрами характерен еще один эффект. Разные реализации \bar{x}^t сходятся не к одному (как в некритическом случае), а к двум различным стационарным значениям (рис. 2.7).

Еще одним весьма важным показателем динамики сети является дисперсия уровня активности. Она вычислялась по 10 реализациям по формуле:

$$D^t = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left(\bar{x}_{(i)}^t - \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \bar{x}_{(j)}^t \right)^2,$$

где i, j – номера реализаций.

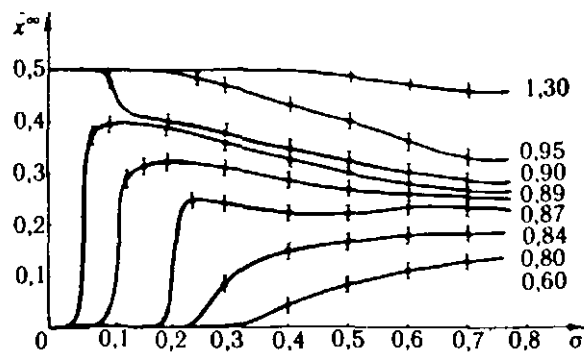


Рис. 2.4. Зависимость стационарного уровня активности от σ при разных значениях a . Параметры порога как на рис. 2.3

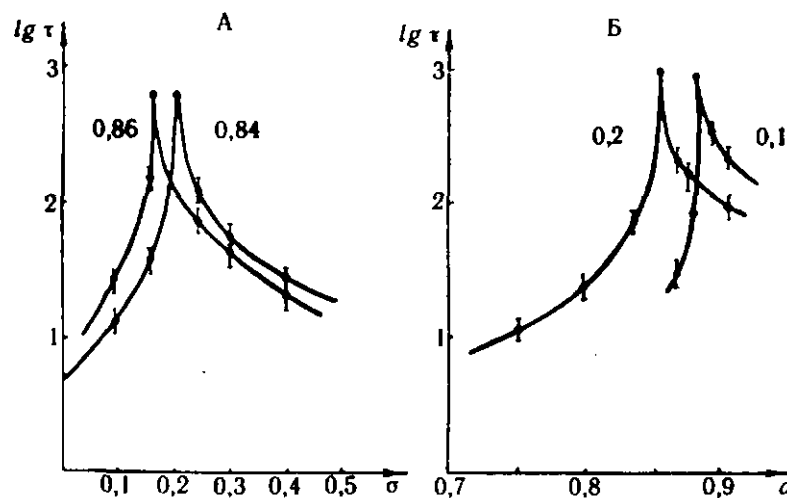


Рис. 2.5. Время выхода на стационарный уровень: А – при изменении σ (a фиксировано); Б – при изменении a (σ фиксировано)

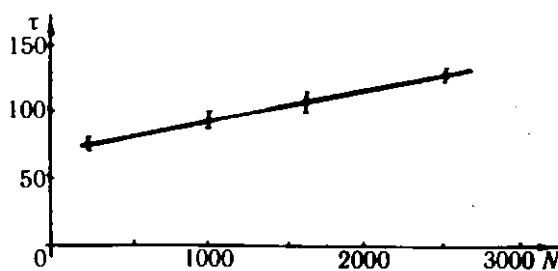


Рис. 2.6. Время выхода на стационарный уровень в зависимости от размеров сети ($a = 0,86, \sigma = 0,2$)

Для a, σ вдали критических значений дисперсия D^t вначале возрастает, затем, по мере приближения \bar{x}^t к стационарному уровню, D^t убывает; на стационарном участке дисперсия мала. Другая картина в критической ситуации. Здесь дисперсия возрастает пока не будет достигнут стационарный уровень и затем остается почти неизменной (рис. 2.8). Большая дисперсия на стационарном участке объясняется неединственностью стационарного уровня активности в критическом случае.

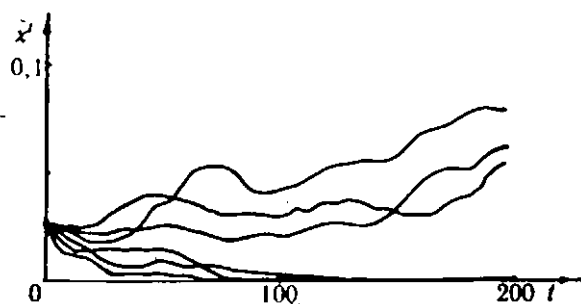


Рис. 2.7. Начальные участки реализаций \bar{x}^t при критических параметрах ($a = 0,84$, $\sigma = 0,2$). Параметры порога как на рис. 2.3

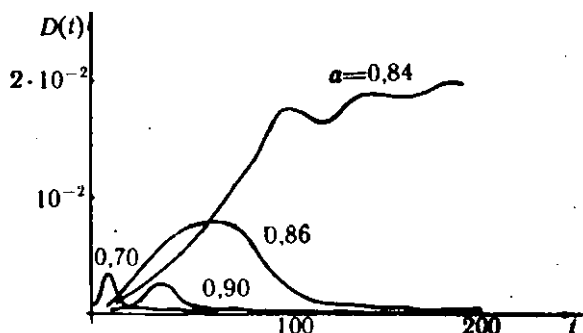


Рис. 2.8. Дисперсия уровня активности ($\sigma = 0,2$)

2.4. Эффект сохранения пятна

Рассмотрим теперь, как изменяется во времени состояние сети, если начальное состояние – пятно из единиц на фоне нулей (рис. 2.2). При определенных параметрах пятно расплзается (рис. 2.9А), и в стационарном режиме активность сети (в некотором диапазоне значений a) представляет собой кластерную конфигурацию, изменяющуюся во времени (пример таких состояний сети на рис. 2.11). В другом случае пятно размывается и исчезает, так что устанавливается конфигурация, состоящая в основном из нулей (рис. 2.9). Как правило, размывание или расплзание пятна происходит довольно быстро ($t \approx 50$ шагов времени, рис. 2.9А, В), однако сеть с критическими значениями параметров способна длительное время находиться в состоянии, близком к первоначальному (рис. 2.9Б), так сказать, сохранять пятно. Время сохранения пятна существенно зависит от первоначального размера пятна (рис. 2.10). Пятно меньше определенного размера быстро размывается.

Линии критического режима. В ходе эксперимента наблюдается стационарная активность четырех типов. Каждому из них соответствует своя область на плоскости параметров системы (рис. 2.12). Для области I характерны упорядоченные стационарные состояния сети, при которых всякий элемент возбужден каждый второй такт времени ($\bar{x}^\infty = 0,5$). Если параметры сети принадлежат области II, то конечные стационарные состояния представляют собой конфигурации, состоящие целиком из нулей ($\bar{x}^\infty = 0$). Область III соответствует случаям кластерных конфигураций ($0 < \bar{x}^\infty < 0,5$), изменяющихся во времени (пример таких состояний сети на рис. 2.11). В области IV,

соответствующей большим шумам, устанавливаются конфигурации из случайно разбросанных нулей и единиц.

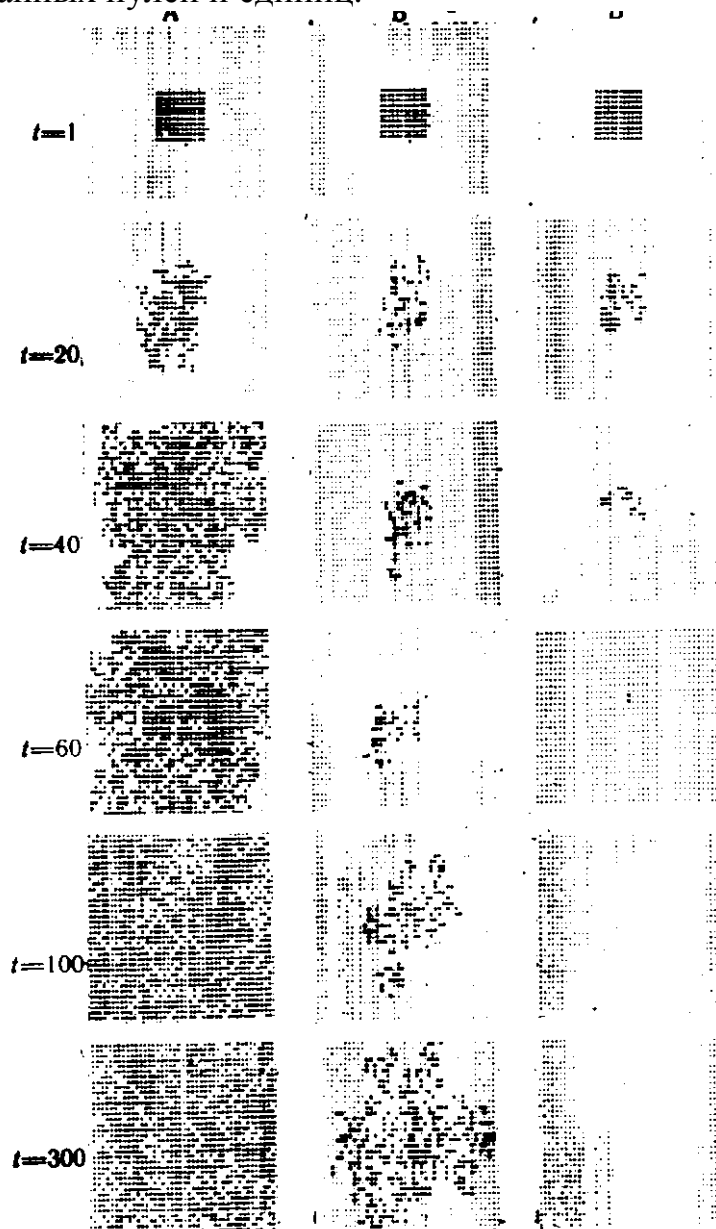


Рис. 2.9. Эффект сохранения пятна ($\sigma = 0,2$, $r_0 = 30$, $r_\infty = 10$, t – такты машинного времени)

Периодическая модуляция порога. В этом разделе модель будет усложнена – введем периодическое внешнее воздействие (аналог тэта-ритма). Для этого к порогу каждого элемента сети добавим величину Δr^t , которая является периодической функцией времени $\Delta r^t = A_\theta \sin(2\pi\lambda_\theta t + \varphi)$.

Как обеспечить в условиях такого внешнего воздействия длительное сохранение начальной конфигурации (эффект сохранения пятна)?

Оказывается, что для этого необходимо выполнить следующие условия:

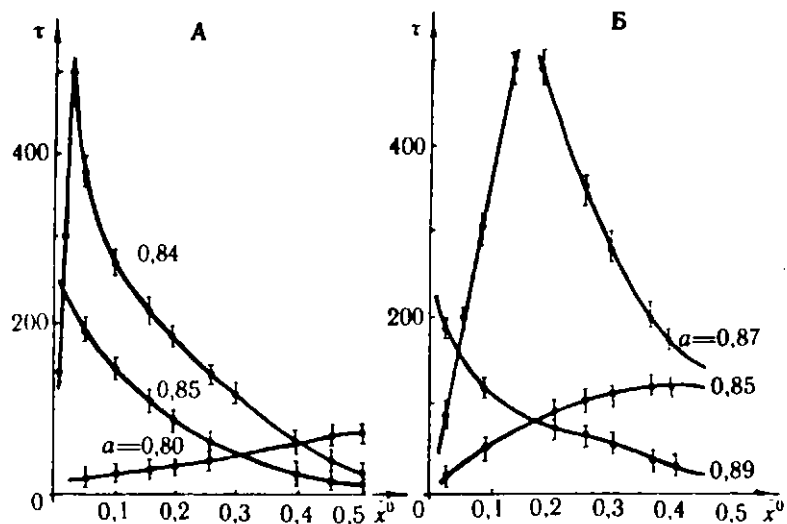


Рис. 2.10. Время сохранения пятна в зависимости от его первоначальных размеров и параметров сети: А – $\sigma = 0,2$; Б – $\sigma = 0,1$

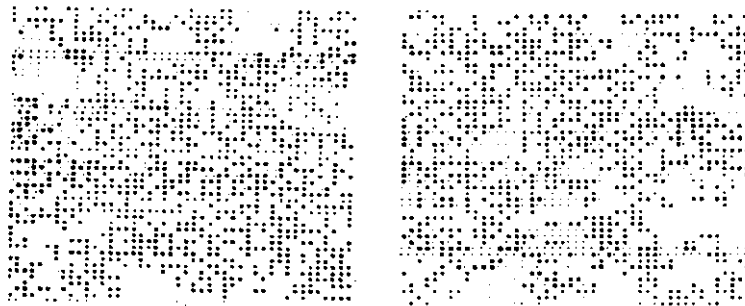


Рис. 2.11. Примеры кластерных конфигураций. Для увеличения наглядности, состояние каждого элемента суммировалось с его состоянием в следующем такте времени; если сумма принимала значение единицы, то ставилась звездочка, а если ноль – точка. Эта же операция использована при получении конфигураций, изображенных на рис. 2.9 и 2.13

1. Параметры a и σ близки к критическим.
2. Период модуляции $T_\theta = 1/\lambda_\theta$ близок к времени выхода на стационарный уровень в критическом случае.
3. Начальная фаза φ из определенного диапазона. Исходная конфигурация сохраняется при нарастающем пороге, в фазе падения порога этого не происходит.

Сеть с синаптической модификацией. Была проведена серия экспериментов, в которых веса связей между отдельными элементами могли меняться в процессе работы модели. А именно, всякий раз, когда два соседних элемента возбуждались в один и тот же или в два последовательных момента времени, сила связи между ними возрастала на малую величину $\Delta a \approx 0,001 \div 0,02$.

На сеть с параметрами, близкими к критическим, подавалась начальная конфигурация в виде пятна из единиц на фоне нулей. Так как некоторое время сохраняется конфигурация, близкая к первоначальной, происходит постепенное

увеличение связей между элементами пятна. В результате время сохранения пятна значительно возрастает, и состояние сети меньше отличается от начального, чем в случае сети без модификации связей (рис. 2.13).

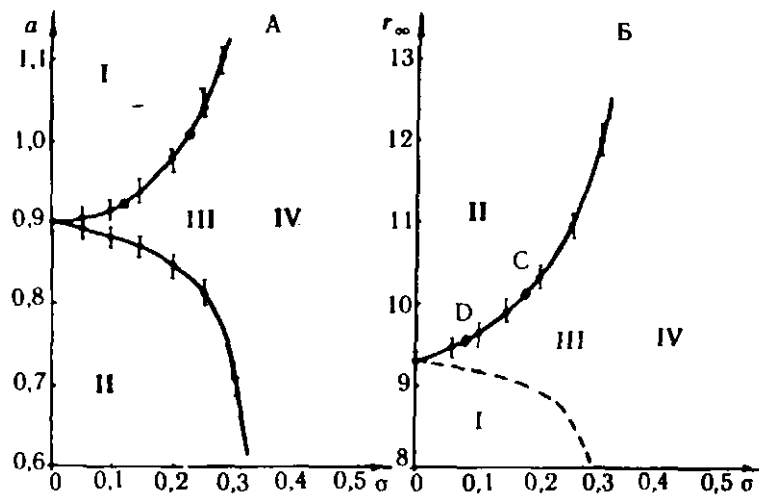


Рис. 2.12. Линии критического режима: А – $r_{\infty} = 10$, $r_0 = 30$; Б – $a = 0,84$, $r_0 = 30$

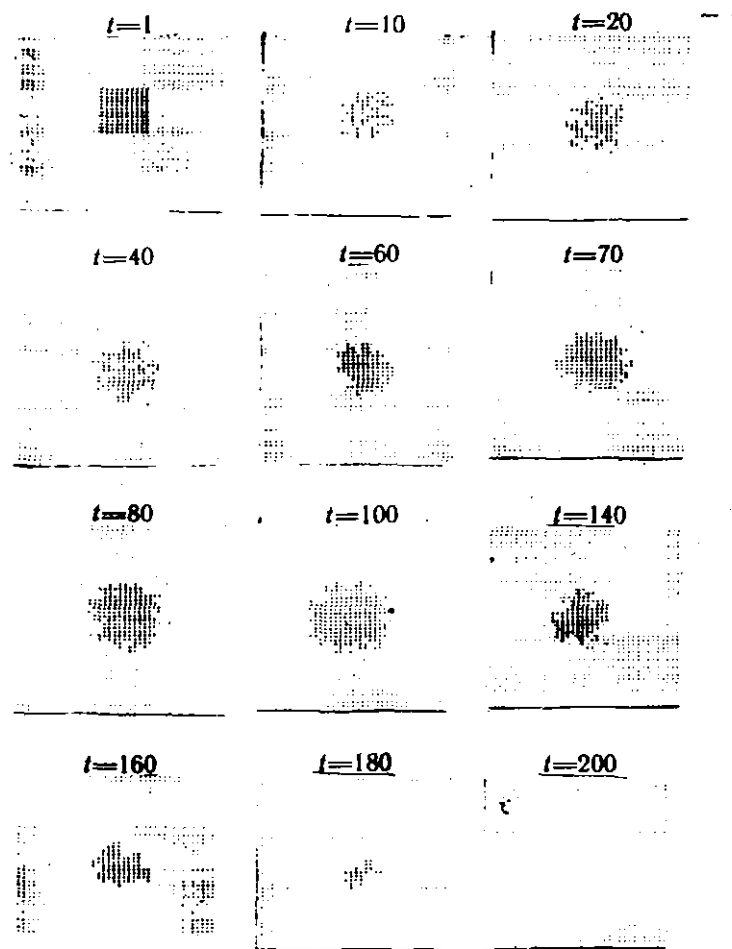


Рис. 2.13. Сохранение пятна при модификации и нарастающем пороге ($\sigma = 0,2$, $a = 0,85$, $\Delta a = 0,002$, $1/\lambda_0 = 400$)

Восстановление или «проявление» ранее записанного пятна происходит, во-первых, при установке параметров, близких к критическим (например, можно лишь слегка увеличить порог, сохранив остальные параметры теми же, что были при записи), и, во-вторых, при возбуждении части записанной конфигурации; последнее можно заменить подачей случайной конфигурации с равномерным распределением нулей и единиц.

2.5. Сопоставление с нейрофизиологией гиппокампа

Гипотеза рециркуляции и эффект сохранения пятна.

Многие существующие теории нейронной ассоциативной памяти [91] пропускают одну существенную трудность: чтобы записать в память какое-нибудь состояние, необходимо его зафиксировать на некоторое время, либо много раз повторить. Она разрешается соответственно двумя способами. Первый способ – фиксация – до сих пор чисто гипотетический [183], теперь вполне реален благодаря эффекту сохранения пятна. Второй более традиционный способ связан с известной гипотезой рециркуляции нервных импульсов [161]. Гипотеза была использована в теории пространственной памяти гиппокампа, которая вызвала необычно широкую дискуссию специалистов. Несколько раньше гипотеза привлекла внимание математиков [93, 115], доказавших ее при определенных условиях в связи с моделированием оперативной памяти. Поэтому стоит сопоставить оба способа.

Согласно гипотезе рециркуляции, в нервной системе с достаточно развитой синаптической структурой возникают (при наличии облегчения и проторения) замкнутые пути, по которым могут многократно циркулировать нервные импульсы в течение значительного времени после прекращения сигнала. В свою очередь, реверберационный след, по мнению Экклса, может приводить к долговременным морфологическим или химическим изменениям в структуре синаптического аппарата.

Однако во многих отделах мозга одного импульса недостаточно для того, чтобы вызвать импульс в другом нейроне, а конечная последовательность импульсов как целое требует для рециркуляции очень специальных условий (например, согласно Петунину [115], передача возбуждения с одного нейрона должна быть не более чем на один нейрон). Так что в итоге остается неясно, что же собственно циркулирует в реальных нервных сетях. Если отождествить реверберацию с корреляцией между мембранными потенциалами связанных нейронов, то в такой форме реверберация становится уже скорее статистическим свойством, а не фиксированным повторением какого-либо паттерна активности.

Эффект сохранения пятна имеет, безусловно, статистический характер. Так, передача возбуждения от одного нейрона должна идти на четыре ближайших соседа (как в плоской модели Изинга), вместо одного, да и это условие легко ослабляется. «Однопутный» характер реверберационных следов должен ограничить область применения гипотезы рециркуляции простейшим типом памяти. (Уже одно это обстоятельство позволяет усомниться в

упомянутой, основанной на рециркуляции, согласно которой, однако, гиппокамп формирует карту абсолютного, трехмерного, евклидова пространства). Но, пожалуй, более серьезные возражения против гипотезы реверберации применительно к гиппокампу представляют следующие факты:

«Одной из удивительных особенностей активности нейронов гиппокампа была нерегулярность разрядов. Некоторые нейроны, по данным обработки межспайковых интервалов, авто- и кросскорреляционного анализа, обнаружили ритмическое членение разрядов, но оно редко было четким» [35].

«Особенностью пирамидных нейронов гиппокампа является медленное возвращение мембранного потенциала к исходному уровню после спайкового разряда... По-видимому, эта следовая деполяризация служит причиной отмечаемого всеми авторами особого типа спонтанной активности нейронов гиппокампа с выраженной тенденцией к групповым, неритмическим, залповым разрядам. В таком залповом множественном разряде спайки идут с очень большой частотой. Далее, однако, частота уменьшается... вплоть до полного прекращения генерации».

Следует заметить, что эффект сохранения пятна, связанный с аperiodической, кластерной динамикой (рис. 2.11) легко с этим согласуется. Более того, такое объяснение нерегулярной активности, если развернуть его в терминах исходных постулатов модели, во многом совпадает с нижеследующей гипотезой Эйлера и Грина.

«Ряд авторов рассматривал этот феномен как проявление процесса инактивации, то есть катодного блока генераторной зоны пирамид при чрезмерной деполяризации. Природу развивающегося после первого спайка деполяризационного потенциала Эйлер и Грин считали неясной, но высказывали предположение, что он может быть следствием суммации ВПСП, возникающих при участии собственных возвратных коллатералей пирамид. Кандел и Спенсер, однако, считают наблюдаемое явление следствием суммации истинных деполяризационных послепотенциалов, зависящих не от возвратных ВПСП, а от собственных свойств мембраны, длительно сохраняющей измененный потенциал, что и приводит к множественному залпу с постоянным подавлением генерации соматодендритного спайка» [35].

Альтернативная гипотеза Кандела и Спенсера, отрицающая, по-видимому, роль соседних нейронов, представляется, с точки зрения рассматриваемой задачи, неоправданным перенесением основной трудности (получения длительного переходного процесса) на более низкий молекулярный уровень организации. Интересно также отметить, что залповая активность (как проявление суммации ВПСП в критическом режиме) получается в рассматриваемой модели без катодной депрессии, хотя последнюю при необходимости легко учесть введением накопления рефрактерности (то есть накоплением тех самых послепотенциалов, которые необходимы в гипотезе Кандела и Спенсера).

Возвращаясь к гипотезе реверберации, отметим, что ее детерминистский характер может привести к трудностям воспроизведения долговременной записи на синапсах. Наоборот, стохастический характер эффекта сохранения

пятна позволяет легко восстановить общие черты конфигурации, существовавшей при записи. Простейший способ – восстановить критический режим и подать на вход слабый равномерный шум или часть ранее записанной конфигурации. (Последний случай удивительно напоминает коллатеральный эффект Марра).

Аналогичные преимущества перед гипотезой рециркуляции возникают не только при воспроизведении, но и в других режимах работы – пуск, остановка, внезапные изменения входных и выходных сигналов и т.д. Легкость управления режимами обеспечивается большой чувствительностью критического режима к изменению параметров. Так, любая входная конфигурация, способная слегка изменить параметры сети в процессе сохранения пятен, постепенно расстроит критический режим, и сама затухнет в результате «привыкания».

Действительно, реакция сети на стимул-конфигурацию, согласно результатам, представленным на рис. 2.3 и 2.5, будет продолженной тонической, если в сети установлен критический режим. Любое отклонение от него, например, при изменении синаптических весов в результате модификации, ведет к уменьшению длительности реакций. Повторное предъявление ранее угасшей конфигурации вызывает лишь быстро затухающую фазическую реакцию, свидетельствующую об отсутствии «новизны» в сигнале. Этим частично объясняется привыкание (habituation) — основной динамический эффект поля CA_3 гиппокампа.

2.6. Торможение в гиппокампе и критическое регулирование порогов

«Тормозные явления в гиппокампе носят универсальный характер. Это может свидетельствовать о высокой дискретности (во времени) процессов возбуждения в гиппокампе, которые всегда осуществляются на фоне снижения активности большинства клеток. Торможение может иметь возвратную, латеральную и афферентную природу» [39].

«Наиболее универсальным, наиболее постоянным и часто единственным синаптическим явлением при внутриклеточном отведении от пирамид гиппокампа является мощный и длительный ТПСР. Любая теоретическая интерпретация интегративных нейронных механизмов гиппокампа, – писали Спенсер и Кандел, – должна учитывать существование этих тормозных эффектов» [39].

Может показаться, что модель, не содержащая в явном виде тормозной популяции нейронов, является чрезмерно упрощенной и не заслуживающей доверия. Рассмотрим, так ли это на самом деле.

Прежде всего, изменение порогов модельных нейронов по синусоидальному закону, имитирует афферентные тормозные влияния септального входа на пирамиды CA_3 через корзинчатые клетки в режиме тэтаритмической активности. В более полной модели эту функцию должна будет выполнять отдельная сравнительно небольшая (1:200) тормозная популяция. Но даже упрощенная модель позволяет объяснить очень важный для дальнейшего факт, состоящий в том, что «вероятность разрядов пирамид выше при

определенном фазовом угле тэта-волны» [39]. Результирующий порог достигает критического значения лишь при определенном фазовом угле, при котором и становится возможным эффект сохранения пятна. Дальнейший рост фазы выводит систему из критического режима и пятно исчезает, чтобы возобновиться в следующем периоде, если входной сигнал имеет правильную фазировку по отношению к тэта-волне.

Далее, если мы будем считать такую модификацию эффекта сохранения пятна основной функцией поля CA_3 , то другие возможные виды торможения должны быть вспомогательными по отношению к ней. Так, если существуют латеральные связи (например, с пирамид на корзинчатые клетки), то они должны предотвращать «расплывание» пятна, причем их действие внутри пятна эффективно выключается за счет преобладающего возбуждения от соседних пирамид. Дополнительной функцией такого торможения может быть автоматическая регулировка общего уровня возбуждения в гиппокампе и в связанных структурах в отсутствие тэта-ритма (при еде, питье, избегании боли, некоторых автоматических движениях и т.д.). Связь торможения с возбуждением в некритическом режиме можно описать аналитически с помощью модели типа [194], один вариант которой уже был подробно исследован специально применительно к гиппокампу [130].

Наконец, обратим внимание еще на одну очень важную вспомогательную функцию афферентного торможения, уже достаточно известную в нейрофизиологии, но которая приобретает особое значение в связи с эффектом сохранения пятна.

«Суммарный афферентный поток гиппокампа (а, следовательно, и его общие регуляторные влияния на неспецифические структуры) в период наличия тэта-ритма, по-видимому, снижается. Однако на общем тормозном фоне возможно дифференцированное возбуждение части пирамид – дискретное по времени и ограниченное в пространстве» [39].

«По-видимому, возникающие при возбуждении ретикулярной формации ранние ТМСП в гиппокампе можно интерпретировать как начальную генерализованную остановку активности пирамид, являющуюся предпосылкой для перестройки их работы и синхронизации сигналов» [39].

В терминах построенной модели это может означать следующее: чтобы сформировать пятно, нужно предварительно остановить или погасить высокую стационарную фоновую активность, установив, таким образом, необходимую «тишину». Эта операция осуществляется программно; ее необходимость видна из рис. 2.3, указывающего на значительную разницу начального и финального участков суммарного уровня горения, то есть при сохранении пятна и в стационарном режиме.

Этим же объясняется «преобладание тонических тормозных реакций нейронов гиппокампа (по крайней мере, в поле CA_3) при действии новых сенсорных раздражителей, то есть в условиях, вызывающих активацию с появлением тэта-ритма» [39]. Для этого стоит лишь заметить, что, согласно рис. 2.4 и 2.10, критический режим наиболее устойчив, если средний уровень

активности пятна (как раз в период развития тонической реакции) в два-три раза ниже стационарного уровня. Это хорошо согласуется со следующим наблюдением:

«Выяснилось стойкое численное преобладание тонических тормозных эффектов над активационными при действии сенсорных раздражителей. Преобладание тормозных эффектов над активационными, по данным разных авторов, составляет от 1,5:1 до 3:1» [39].

Отметим, что торможение в данной модели имеет принципиально другое назначение по сравнению с моделью типа [194]. Хотя и там тормозная популяция может регулировать чувствительность возбуждающей популяции, однако сомнительно, чтобы ее весьма большая инерционность позволила бы ей быстро установить «тишину». Главная же функция торможения построенной модели – регулирование порогов (с помощью внешнего генератора ритма) для нахождения и стабилизации критического, метастабильного режима. Последний (совершенно отсутствующий в модели Вилсона и Коуэна ввиду пренебрежения флуктуациями) возникает в принципе и без участия тормозной популяции, хотя и нуждается в ней для установки начальных условий и для автоматической компенсации различных возмущений, стремящихся нарушить критический режим.

Однако вне критического режима данная машинная модель с добавлением отдельной тормозной популяции, по-видимому, будет хорошо описываться уравнениями Вилсона и Коуэна. Поэтому для создания более полной аналитической модели необходимо в первую очередь рассмотреть критический режим при выключенном торможении. Введение тормозной популяции, хотя и желательно для полноты картины, по-видимому, ничего математически интересного не принесет. Функциональные возможности расширенной комбинированной модели, естественно, возрастают. Она сможет объяснить, почему «некоторые формы обучения возможны в отсутствие тэта-ритма» [39], почему возможно внимание без тэта-ритма и даже почему необходимы две системы внимания, работающие по очереди. Мы увидим далее, что в гиппокампе могут существовать два типа памяти – одна в критическом режиме, а другая вне его, которые работают почти одновременно, занимая по очереди соответствующую часть периода тэта-волны. Однако чтобы обсуждать вопросы памяти и поведения, необходимо, кроме уже рассмотренной тормозной регулировки порогов, рассмотреть способы регулирования двух оставшихся основных параметров модели – уровня шумов и весов синапсов.

2.7. Множественность входов в гиппокамп и критическое регулирование шумов

Гиппокамп имеет по крайней мере два основных входа – септальный и кортикальный. И каждый из входов как бы дублируется: входные сигналы по ним поступают как на сомму пирамид, так и на дендриты. Какова роль такого неравноправного дублирования? Ведь эффективность дендритов в проведении импульсов весьма низкая, даже если учесть возможное ее увеличение за счет

дендритных спайков. Зачем нужен дополнительный диффузный вход, если он может сигнализировать не о конкретных свойствах сигнала, а, в лучшем случае, о его среднем уровне или, может быть, о его дисперсии?

Оказывается, для данной модели такой дополнительный вход принципиально необходим, если по основным входам поступают изменяющиеся во времени сигналы. Пусть в модели установлен режим сохранения пятна, так что значения основных параметров изображаются точкой *C* на рис. 2.12Б. Изменим средний уровень пятна, уменьшив его размер или интенсивность входных импульсов. Тогда в соответствии с рис. 2.10 длительность сохранения пятна резко упадет. Чтобы сохранилось и это новое пятно, придется уменьшить порог нейронов, что, согласно рис. 2.12Б, повлечет уменьшение шумов, так что в пространстве параметров система перейдет в точку *D*, тоже расположенную на линии критического режима, поскольку пятно сохраняется только на ней.

Таким образом, изменение уровня афферентного потока в режиме фиксации информации возможно только при согласованном изменении порогов и шумов. Первое осуществляется регулировкой фазы θ -ритма, поступающего через основной септальный вход, второе – регулировкой уровня шумов через дополнительный кортикальный вход на дендриты пирамид. Естественно предположить, что такое же назначение имеет упомянутый дополнительный (возбуждающий) септальный вход, который к тому же может компенсировать не только средний уровень основного сигнала, но и его непостоянную залповую выраженность, непосредственно меняющую дисперсию шума. В этой же связи обсудим другой часто возникающий вопрос: не слишком ли упрощает построенная модель реальные внутренние связи нейронов гиппокампа, учитывая, подобно модели Изинга, активность лишь четырех ближайших соседних нейронов и пренебрегая активностью остальных? Да, упрощает, но не настолько, чтобы эффект сохранения пятна заметно ослабился или исчез вовсе. Наоборот, увеличивая количество связей с все более отдаленными нейронами, можно ожидать усиления эффекта в смысле увеличения длительности сохранения пятна и расширения класса запоминаемых конфигураций. Так, если вместо неизменных внутренних шумов, которые в модели генерируются специальной подпрограммой, использовать нестационарную дендритную, диффузионную активность от отдаленных соседних нейронов, тогда эффект должен сохраняться для более широкого класса входных конфигураций – примерно по тем же самым причинам, что и при регулировании шумов через внешние дополнительные входы.

Такое регулирование внутренних шумов, в отличие от действия внешних входов, можно назвать внутренним параметрическим регулированием. Это, по существу, подстройка параметров по закону фиксированной функциональной зависимости. В данном случае эта зависимость линейная, так как и регулируемая дисперсия шумов, и регулирующий ее средний уровень шумов линейно, но с различными коэффициентами, зависят от суммарной частоты импульсов сети. (Это известное свойство дробового шума, возникающего в данном случае в силу независимости отдаленных нейронов). Точность такого

регулируемая обычно невелика и определяется тем, насколько реализованная зависимость близка к идеальной, определяемой принципом действия регулятора. Идеальную характеристику легко получить из рис. 2.12Б, если учесть, что на нем по оси ординат отложена величина, пропорциональная среднему уровню шумов, а по оси абсцисс – квадратному корню из дисперсии. Наибольшая точность, очевидно, получится в случае, когда сплошная кривая, изображенная на рис. 2.12Б, окажется параболой.

Интересно отметить, что в чисто математическом плане идея, близкая к параметрическому регулированию, была высказана в работе Шнирмана [159]. Он предложил использовать нелокальное управление локальными связями, например, с помощью температуры (соответствующей нашей дисперсии шумов) для резкого увеличения числа инвариантных мер в задаче Ставской (то есть опять же для расширения класса «удерживаемых» входных сигналов).

Из-за весьма узкой критической области параметров описанная двойная регулировка шумов сама по себе не гарантирует стабилизацию критического режима, а лишь способствует ей, осуществляя грубую настройку. Главная регулировка осуществляется с помощью высокоточной системы автоматического регулирования фазы тэта-ритма, причем любой из дополнительных «шумовых» входов гиппокампа способен сорвать режим слежения, нарушая оптимальные условия обработки информации, почему-то ставшей для глобальной системы «неинтересной», «неновой», «неактуальной». Возможно, что такой предельно простой способ отключения высокоточной критической системы внимания и тем самым включение более грубой («внлсон-коуэновской») системы гиппокампального регулирования неспецифических структур и является главной функцией других неспецифических входов в гиппокамп.

Частотная потенция или хеббовская модификация? В последнее время многие физиологи, особенно изучающие поведенческие реакции, приходят к выводу, что одна из основных функций гиппокампа – память, хотя и неединодушны в том, какая именно: рабочая, кратковременная, буферная, эпизодическая, ассоциативная, пространственная, пространственно-временная и т.д. Однако наблюдения на синаптическом уровне пока не дают для этого необходимых оснований: вместо кросскорреляционной (хеббовской) модификации синапсов удается наблюдать лишь частотную потенцию, то есть увеличение эффективности синапса с частотой его использования. Последнее может обеспечить (самое большее) простейшую, неассоциативную форму памяти. Рассмотренная же модель помогает понять возможную причину возникшей трудности и подсказывает новый способ обнаружения кросскорреляционной модификации.

Предложение 2.1. Предположим, что в сети эффективное значение порога (r_s^t), равное математическому ожиданию от кривой порога в момент срабатывания, изменяется по синусоиде с частотой тэта-ритма (λ_θ) вблизи критического порога (r_k), как показано на рис. 2.14. Пусть частота залпов входного сигнала тоже равна частоте тэта-ритма. Тогда хеббовская

модификация $(\Delta a_{ij}^{t\tau})$ расщепляется на две компоненты: обычную хеббовскую $(\Delta a_{ij}^{t0})_H$, пропорциональную частоте совпадений (λ_{ij}) во временном окне $(\Delta\tau)$ пре- и постсинаптических потоков, и дополнительную $(\Delta a_{ij}^{t\tau})_\theta$ пропорциональную кросскорреляции между входным сигналом и тэта-ритмом, зависящую от временного сдвига (τ) между ними. Причем

$$\Delta a_{ij}^{t\tau} = (\Delta a_{ij}^{t0})_H + (\Delta a_{ij}^{t\tau})_\theta \quad (2.2)$$

$$(\Delta a_{ij}^{t0})_H = \gamma_H \Delta\tau \lambda_{ij} [1 - \lambda_\theta (\tau_k + \tau_c)] t \quad (2.3)$$

$$(\Delta a_{ij}^{t\tau})_\theta = \begin{cases} \gamma_H (\tau_k + \tau_c) \lambda_\theta \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_k + \tau_c}\right), & |\tau| < \tau_k + \tau_c \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (2.4)$$

где хеббовская модификация определяется соотношением

$$\frac{da_{ij}^{t0}}{dt} = \gamma_H x_i^t x_j^t, \quad (2.5)$$

x_i^t, x_j^t – пре- и постсинаптическая активность,
 γ_H – хеббовская эффективность,

$$\tau_c = \frac{1}{2\pi\lambda_\theta} \arcsin \frac{r_\infty - r_c}{A_\theta}$$

$$\tau_k = \frac{1}{2\lambda_\theta} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{r_\infty - r_c}{A_\theta}\right) \quad (2.6)$$

A_θ – амплитуда тэта-волны.

Рассмотрим возможности экспериментального измерения модификации. Из (2.3) и (2.4) видно, что максимальная скорость дополнительной компоненты в $\lambda_\theta (\tau_k + \tau_c) / (\lambda_{ij} \Delta\tau)$ раз больше обычной хеббовской и может быть значительно больше 1. Довольно парадоксально, но именно это обстоятельство, обеспечивающее высокую эффективность модификации, может сильно затруднить обнаружение последней.

В самом деле, допустим, что мы выбрали обычный кросскорреляционный метод оценки синаптических связей [22] (заметим, что более непосредственные электрофизиологические методы оценки эффективности синапсов, например с помощью антидромной стимуляции [164], по-видимому, нарушают естественные условия и условия критического режима). Такой метод, используя

внеклеточно отведенную активность, оказывает, по-видимому, наименьшее воздействие на объект, но требует довольно больших массивов данных. В то же время высокая скорость модификации позволяет сети записать сигнал на своих синапсах за довольно короткое время: ограничение по силе связи и связанное с ним ограничение по времени записи осуществляется автоматически при выходе сети из критического режима. В результате для корреляционного анализа пригоден лишь сравнительно короткий к тому же нестационарный участок тонической реакции на стимул.

Другая, возможно еще большая трудность состоит в том, что дополнительная компонента (2.4) оказывается пропорциональной не кросскорреляции λ_{ij} а частоте входного сигнала λ_{θ} , а в более общем случае – кросскорреляции сигнала и тэта-ритма. Этот результат в экспериментальных условиях довольно трудно отличить от упомянутой частотной потенциации, особенно в отсутствие контроля тэта-ритма. Более того, все корреляционные оценки, оказываются зависящими от частоты входных сигналов, так что проблема уверенного различения двух типов модификации остается. Но это еще не означает, что кросскорреляционная модификация в гиппокампе отсутствует. Наша модель предсказывает, что в общем случае, кроме хеббовской, может оказаться значительной, если не преобладающей, дополнительная кросскорреляция двух основных сигналов гиппокампа – некортикального и септального, причем с регулируемым сдвигом между ними.

Интересно заметить, что если хеббовская компонента ответственна за пространственную ассоциативность, то дополнительная – за ассоциативность событий во времени, так что пространственно-временная память – вполне вероятная функция гиппокампа, о чем уже давно догадывались некоторые физиологи. Эта гипотеза более подробно обсуждается в конце следующего раздела. Ее правдоподобность может увеличиться, если мы учтем, что хеббовская эффективность γ_H , формально определяемая соотношением (2.5), на самом деле может сильно возрасти в критическом режиме за счет облегчающего влияния групповой, кластерной активности на пространственные синаптические процессы, наподобие взаимодействия мембранных пор через общие токовые пути.

Еще одно замечание касается оценки емкости пространственной кратковременной памяти. Результаты, представленные на рис. 2.10, показывают, что существует минимальный критический размер пятна, ниже которого оно быстро затухает. По нашим оценкам критическое пятно содержит 5×5 нейронов, так что емкость кратковременного хранения не превосходит $0,04N$ двоичных единиц, где N – число нейронов сети. Для больших N это значительно больше $C_1\sqrt{N}$ – верхней оценки Цирельсона [156], но значительно меньше N^2 – оценки, приводимой в [190]. Поскольку в плоской модели Изинга каждый нейрон связан с четырьмя соседними, то предлагаемая в работе оценка дает $0,01$ бит/синапс. Столь низкая емкость – это, конечно, плата за критический режим и, в частности, за высокую скорость синаптической

модификации, то есть за возможность записывать весьма кратковременные, но, возможно, жизненно важные сигналы.

Приведем вывод соотношений (2.2)-(2.6), предварив его кратким перечнем ранее предложенных алгоритмов модификации с тем, чтобы понять естественную необходимость еще одной разновидности гипотезы Хебба. Марр предположил, что модификация синапсов в мозжечке происходит при совпадении двух входных сигналов, то есть вместо (2.5) имеем

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \gamma_M x_i^t z_j^t, \quad (2.7)$$

где z_j^t – активность лианного волокна. Для исключения потерь за счет насыщения от случайных совпадений Сейновский предложил (тоже для мозжечка) вычесть произведение средних $\bar{x}_i^t \bar{z}_j^t$:

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \gamma_S (x_i^t z_j^t - \bar{x}_i^t \bar{z}_j^t). \quad (2.8)$$

Еще раньше было высказано предположение, что существуют синапсы, для изменения которых необходимо совпадение активности трех различных нейронов

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \gamma_G x_i^t y_j^t z_k^t. \quad (2.9)$$

Теперь, по аналогии с этим, нетрудно записать, как изменится гипотеза Хебба (2.5) в условиях критического режима. Чисто формально, учитывая зависимость эффекта сохранения пятна от фазы тэта-ритма, имеем

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \begin{cases} \gamma_H x_i^t y_j^t z^{t-\tau}, & \text{если } z^{t-\tau} \neq 0 \\ \gamma_H x_i^t y_j^t, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (2.10)$$

где z^t – индикатор критической фазы (рис. 2.14), представляющий из себя последовательность единичных прямоугольных импульсов, синхронных и синфазных с тэта-ритмом. Рассмотрим активность пары соседних нейронов i и j , находящихся в одном и том же пятне или кластере, то есть такие нейроны, которые имеют однотипные возбуждающие, продолженные (тонические) реакции. Ввиду того, что в пятне каждый из таких нейронов почти непрерывно генерирует импульсы, можно считать, что $x_i^t = y_j^t$ при $z^{t-\tau} \neq 0$. Тогда, за время от нуля до t связь между ними изменится на величину

$$\Delta a_{ij}^{t\tau} = \gamma_H \int_0^t x_i^t z^{t-\tau} dt + \gamma_H \int_{\{t_1: z^{t_1-\tau}=0, 0 < t_1 < t\}} x_i^{t_1} y_j^{t_1} dt_1.$$

Первый интеграл как свертка двух прямоугольных импульсов одинаковой длительности (последнее не обязательно, но принято для упрощения формул) дает (2.4), а второй, с учетом вероятности совпадений $\lambda_{ij} \Delta \tau$, имеет математическое ожидание, записанное в правой части (2.3), где множитель в квадратных скобках учитывает то обстоятельство, что второй интеграл может быть равен нулю, если критический режим тэта-ритмом не срывается, то есть когда $\tau_k + \tau_c$ равно периоду тэта-ритма $1/\lambda_\theta$. Формулы (2.6) очевидны из рис. 2.14.

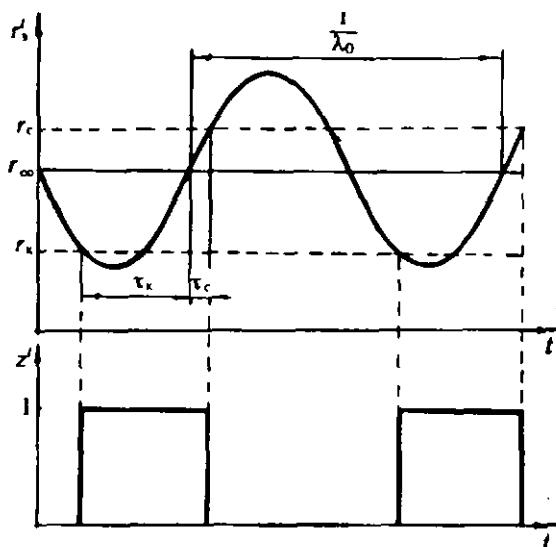


Рис. 2.14. Кривая эффективности порога r_s^t и индикатор критической фазы z^t . Обозначения: r_k – критический порог; r_c – порог срыва; r_∞ – порог, устанавливающийся в отсутствии тэта-ритма

Отметим, что в случае, когда первый интеграл значительно больше второго, рассматриваемый алгоритм при $\tau=0$ близок (по форме, но не по эффективности) к алгоритму Марра (2.7), причем z^t аналогичен активности лианного волокна. В этом случае второй интеграл, подобно второму слагаемому в алгоритме Сейновского (2.8), обязан в основном случайным совпадениям, но мы имеем возможность им пренебречь за счет большой разницы в эффективности в критическом режиме и вне его. Очевидный кросскорреляционный характер первого интеграла делается не столь очевидным в формуле (2.4), в которой дополнительно учтено, что входной сигнал имеет постоянную частоту залпов λ_θ . Вместо нее в более общем случае будет стоять импульсная кросскорреляция между септальным и кортикальным входами. Именно это свойство, с учетом зависимости от сдвига фаз, позволит в дальнейшем рассматривать память как временной аналог голографии.

В другом крайнем случае, когда можно пренебречь первым интегралом (например, из-за отсутствия тэта-ритма или из-за неблагоприятного сдвига фаз

между ним и кортикальным сигналом), рассматриваемый алгоритм не отличается от хеббовского, за исключением, возможно, большего значения γ_H , вследствие возможного влияния критического режима на мембранно-синаптические процессы. По этой же причине роль случайных совпадений, накапливающихся в основном в более продолжительный, но некритический период времени, окажется не такой заметной (как в алгоритме Сейновского), чтобы потребовалась их компенсация.

Наконец, общий случай, как видно из (2.10), напоминает комбинацию синапса Хебба и синапса Гриффиса вплоть до того, что третий множитель z^t , как выяснится в следующем разделе, связан с эмоциями, а точнее – со вниманием.

2.8. Тэта-ритм как сигнал синхронизации импульсной следящей системы и его поведенческие корреляты

К настоящему времени существует по крайней мере четыре гипотезы о функциональной роли тэта-ритма, соответствующие четырем основным функциям, которые приписываются гиппокампу [39]: 1) ориентировочный рефлекс-внимание; 2) мотивация – эмоции; 3) произвольные движения и 4) память – обучение.

Некоторые физиологи предлагают принять компромиссное решение вопроса: признать, что гиппокамп обладает сложной множественной функцией и, следовательно, тэта-ритм может участвовать в организации всех или большинства этих функций. Однако О.С. Виноградова пришла к другому заключению.

«Анализ электрофизиологических данных о коррелятах тэта-ритма и сопоставление их с иными фактами о функциях гиппокампа позволяют отвергнуть предположение о мотивации, эмоциях и произвольных движениях как причине или следствии тэта-ритма гиппокампа. Можно утверждать лишь, что тэта-ритм отражает определенный (оптимальный) рабочий уровень мозга и в этом отношении ближе всего коррелирует с реакцией активации, ориентировочным рефлексом, вниманием (в специфическом выражении, свойственном низшим млекопитающим). Поскольку поддержание активного состояния и высокого рабочего уровня мозга является в норме неперенным условием фиксации новых следов, то правомерны и представления о роли тэта-ритма в обучении и памяти, выдвигаемые рядом авторов. Возможно, что в этих процессах тэта-ритм в гиппокампе играет более специфическую роль синхронизирующего, сонастраивающего механизма» [39].

Рассмотрим, как естественное развитие рассматриваемой модели для поля CA_3 гиппокампа позволяет понять и несколько усилить этот вывод. Вначале заметим, что результаты, изложенные выше, согласуются с общепринятым теперь представлением о том, что поле CA_3 выполняет функцию компаратора в несколько более широком, чем у Виноградовой [39], смысле клапана: оно пропускает входные сигналы далее к полю CA_3 гиппокампа лишь в дискретные моменты времени, определяемые фазой тэта-

ритма, независимо от каких-либо свойств или качеств сигналов. Это стандартное звено автоматики, имеющее разнообразные применения (иногда его называют импульсным элементом, логической схемой «И», воротами и т.д.). В нашем случае оно увеличивает помехозащищенность системы от нежелательных входных сигналов, приходящих вне определенного временного интервала.

Однако функции поля CA_3 этим не ограничивается. Сопоставление результатов с тем фактом, что «вероятность разрядов пирамид выше при определенном фазовом угле (выясняется при векторном анализе), хотя спайки могут возникать и в другие периоды» [39], заставляет предположить, что между двумя основными входами поля CA_3 может существовать изменяющийся временной или фазовый сдвиг. Но тогда поле CA_3 как компаратор-клапан сможет выделить сигнал ошибки, пропорциональный разности фаз двух своих входных сигналов, если на его выходе включить так называемое фиксирующее звено. Последнее – тоже стандартный узел автоматики, представляющий из себя разновидность низкочастотного фильтра. Без него сигнал на выходе компаратора не способен заметно повлиять на поведение системы регулирования, содержащей какие-либо инерционные звенья, каковыми в гиппокампе являются модифицируемые синапсы, а вне его – тэта-генератор и различные соматические и вегетативные эффекторы. Только в сочетании с ним компаратор-клапан может стать фазовым компаратором, хотя последний термин уже давно используется для обозначения возможной функции гиппокампа [39].

Но откуда взять фиксирующее звено? Оказывается, что в рассматриваемой модели его действие вполне заменяется эффектом сохранения пятна. В самом деле, результаты показывают, что модель способна сохранять или фиксировать входную конфигурацию в течение некоторой части периода тэта-ритма, если выполнены правильные фазовые соотношения. В конце времени фиксации эта конфигурация быстро исчезает, чтобы в следующем периоде можно было зафиксировать другую конфигурацию и т.д.

Таким образом, поле CA_3 может выполнять одновременно функции нескольких стандартных звеньев системы автоматического регулирования: импульсного элемента (клапана), фиксирующего звена, фазового компаратора и даже носителя рабочей памяти. После этого неудивительно, что существует так много гипотез о поведенческих коррелятах тэта-ритма несмотря на то, что он выполняет здесь неспецифическую функцию синхронизации. Ведь такое звено, вырабатывающее сигнал ошибки рассогласования, необходимо для систем регулирования различного назначения и без него не обойдется ни одна теория функции гиппокампа.

Наряду с такой универсальной, неспецифической ролью тэта-ритм может играть особенную, очень специальную роль в обучении и памяти. Для ее описания нам, естественно, потребуются, во-первых, предположить, что в сети существует кросскорреляционная модификация синапсов и, во-вторых, придется дополнить нашу модель поля CA_3 до замкнутой системы

автоматического регулирования, включив в нее необходимые звенья и прежде всего сам генератор тэта-ритма.

О том, что частота тэта-ритма регулируется замкнутой петлей отрицательной обратной связи поля CA_3 на себя, можно заключить из того факта, что частота тэта-ритма в полтора раза снижается при стимуляции гиппокампа и почти вдвое повышается при отсечении гиппокампального входа на септум, где находится источник тэта-ритмической активности [39]. Кроме этого, существует внешнее, «ручное» (то есть неавтоматическое) регулирование частоты общим сенсорным притоком, поступающим на ретикулярную формацию от различных структур. Характеристика регулирования по частоте в обоих случаях, по-видимому, линейна в достаточно широких пределах: «Чем больше объем поступающей информации, тем выше частота тэта-ритма, который, таким образом, является чувствительной мерой общего уровня сенсорного притока. Тэта-ритм не возникает при его низком уровне, линейно нарастает по частоте по мере его повышения и исчезает при чрезмерно высоких уровнях воздействия» [39].

Рассматриваемый как элемент автоматики, тэта-генератор – это интегратор – основной узел весьма точных (астатических, то есть обеспечивающих нулевую установившуюся ошибку) систем автоматического регулирования. Название его объясняется тем, что его выходная переменная – фаза φ – выражается интегралом от входной частоты управляющих импульсов λ_R , поскольку она линейно регулирует частоту тэта-ритма λ_θ , а эта, в свою очередь, дает по определению угловой частоты $2\pi\lambda_\theta \equiv \frac{d\varphi}{dt}$.

В другом варианте интегратор – это генератор импульсов, задержка которых относительно запуска регулируется линейно с помощью входного сигнала.

Не проводя здесь детального анализа возникающей замкнутой следящей системы, регулирующей внимание, покажем, как частота тэта-ритма может отражать динамику процесса регулирования и нести, таким образом, информацию о стадиях обучения. Для этого предположим, что залп тэта-активности возбуждает неокортекс и спустя некоторое время T_N вызывает на входе поля CA_3 залповый отклик. Тогда фазовый компаратор обеспечит сигнал рассогласования (ошибки) $\tau = T_N - T_\theta$, который, благодаря фиксации и отрицательной обратной связи, изменит частоту тэта-ритма $\lambda_\theta = 1/T_\theta$ в направлении уменьшения рассогласования. При этом установившаяся ошибка, благодаря интегратору, будет равна нулю, так что частота тэта-ритма окажется постоянной, если T_N – постоянная.

Предположим теперь, что $T_N = t_N + t_F$, где t_N – постоянная, t_F – переменная латентность, зависящая от степени проторения путей, так что t_F уменьшается со временем до нуля. Тогда сигнал рассогласования на выходе CA_3 будет менять период тэта-ритма T_θ таким образом, что он будет с некоторой ненулевой ошибкой «следить» за изменением T_N , так что если T_N со

временем уменьшается, то частота тэта-ритма возрастает до тех пор, пока не будет достигнута максимально возможная частота, после чего режим слежения срывается. Тем самым цикл записи данного сигнала прекращается автоматически.

Таким образом, изменение частоты тэта-ритма в режиме слежения действительно отражает динамику, текущую стадию процессов записи информации. Например, «доучивание» вследствие меньшей латентности сигнальных путей потребует более высокой частоты тэта-ритма по сравнению со свежим впечатлением. Этим частично объясняются результаты Эйди, обнаружившего связь отдельных узких частотных полос тэта-ритма с определенными стадиями и фазами обучения [39].

Увеличение частоты тэта-ритма с помощью внешнего, неавтоматического («ручного») регулирования со стороны неспецифических структур должно, как правило, приводить к срыву автоматического регулирования, хотя, по-видимому, бывают случаи, когда это не так. Иногда, возможно, такое «мотивационное» регулирование помогает сохранить внимание с помощью «волевого усилия», поступающего через «ручное» управление, но чаще всего, по аналогии с техническими системами, эта ручная регулировка должна использоваться для «сознательного» выбора объекта внимания, информация о котором затем будет записана автоматически. Помимо мотиваций и эмоций, этим же «ручным» путем могут возникнуть корреляции тэта-ритма с произвольными движениями, с парадоксальным сном, «предустановкой» и т.д.

В заключение укажем еще на одну особую роль тэта-ритма в организации пространственно-временной памяти. Для этого заметим, что любая распределенная в пространстве кросскорреляционная память обладает ассоциативным свойством, состоящим в том, что для воспроизведения записанной конфигурации достаточно подать на вход только часть конфигурации. Однако в предыдущем разделе мы видели, что в нашей сети можно записать не только пространственные, но и временные корреляции. Поэтому есть основание ожидать от сети свойства пространственно-временной ассоциативности, то есть возможности по некоторому фрагменту пространственно-временной последовательности конфигураций восстановить всю записанную последовательность. Поскольку при записи в режиме автоматического регулирования меняются фаза и частота тэта-ритма, их временной ход необходимо воспроизвести и при считывании, благодаря чему критический режим будет «извлекать» из памяти лишь ту информацию, которая была при записи ассоциирована с определенной фазой тэта-ритма. Тэта-ритм оказывается, таким образом, своеобразным аналогом опорной частоты в голографии, причем автоматическое регулирование частоты приводит к дополнительному эффекту, аналогичному голографическому кино.

Близкую гипотезу о роли тэта-ритма как аналога лазера в голографии высказал Лендфилд (1976), хотя он ничего не говорит о воспроизведении временных последовательностей, считая, по-видимому, тэта-ритм аналогом когерентного источника постоянной частоты.

3. ФОКУСИРОВКА И СТАБИЛИЗАЦИЯ

3.1. Основные сведения из теории марковских процессов

Рассмотрим однородные марковских процессов с конечным или счетным числом состояний, эволюционирующих с изменением непрерывного времени [94]. К числу таких процессов относятся: пуассоновские процессы, процессы рождения и гибели, процессы случайных блужданий и процессы восстановления.

Марковский процесс с непрерывным временем будем обозначать через $\xi(t), t \geq 0$. В любой положительный момент времени t $\xi(t)$ может находиться в одном из возможных состояний $i, i = 0, 1, 2, 3, \dots$ (индексами i, j мы по-прежнему нумеруем состояния). Если в момент времени $t = t_1$ $\xi(t)$ находится в состоянии i , то пишут $\xi(t_1) = i$.

Основным свойством марковских процессов с непрерывным временем является марковское свойство, состоящее в следующем: при заданном состоянии $\xi(s) = i$. Эволюция процесса в будущем, т. е. при $t \geq s$, не зависит от течения процесса в прошлом, т. е. от его эволюции при $t \leq s$.

Марковское свойство можно описать еще так. Пусть в произвольные моменты времени s_1, s_2, \dots, s_n, s , ($0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < s$), $\xi(s_1) = i_1, \xi(s_2) = i_2, \dots, \xi(s_n) = i_n, \xi(s) = i$. Тогда

$$P\{\xi(s+t) = j | \xi(s_1) = i_1, \xi(s_2) = i_2, \dots, \xi(s_n) = i_n, \xi(s) = i\} = p_{ij}(t). \quad (3.1)$$

Это свойство должно выполняться для любых i, j и s, t . Величины $p_{ij}(t), t \geq 0$, называют вероятностями перехода из состояния i в состояние j за время t или переходными вероятностями.

Рассмотрим произвольный марковский процесс $\xi(t), t \geq 0$, с переходными вероятностями

$$p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}, \quad p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

заданными при всех $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что при любом заданном шаге $h > 0$ последовательность $\xi(nh), n = 0, 1, \dots$, образует дискретную цепь Маркова с переходными вероятностями $p_{ij}(h)$.

Пусть задано начальное распределение вероятностей $p_i^0 = P\{\xi(0) = i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда в соответствии с марковским свойством совместное распределение вероятностей случайных величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ при любых $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ имеет вид

$$P\{\xi(t_1) = j_1, \dots, \xi(t_n) = j_n\} = \sum_i p_i^0 p_{ij_1}(t - t_0) \dots p_{j_{n-1}j_n}(t_n - t_{n-1}).$$

В частности, при $t > 0, s > 0$:

$$p_j(t) = \sum_i p_i^0 p_{ij}(t),$$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

В первой из этих формул $p_j(t)$ есть вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии j .

Уравнения Колмогорова. По-прежнему рассматриваются однородные процессы Маркова. Пусть существуют пределы

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = -\lambda_i \leq 0,$$

$$\lambda_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0, \quad i \neq j.$$

Считаем, что

$$\sum_{i \neq j} \lambda_{ij} = \lambda_i.$$

Это условие всегда выполнено, если число состояний процесса конечно. Сформулируем теоремы, играющие важную роль в исследовании марковских процессов с непрерывным временем.

Теорема 2.1. Пусть условие $\sum_{i \neq j} \lambda_{ij} = \lambda_i$ выполнено. Тогда переходные вероятности $p_{ij}(t)$ процесса удовлетворяют обратной системе уравнений Колмогорова:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 2.2. При выполнении указанных выше ограничений на величины λ_{ij}, λ_i переходные вероятности $p_{ij}(t)$ удовлетворяют *прямой системе* уравнений Колмогорова:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) \lambda_{kj}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Вероятности состояний удовлетворяют следующей прямой системе уравнений:

$$p'_j(t) = \sum_k p_k(t) \lambda_{kj}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Сходимость к стационарному распределению для марковских процессов с непрерывным временем. Условие сходимости здесь такое же, как и для дискретных цепей Маркова: пусть существует состояние j_0 и такие h и $\delta > 0$, что для всех i

$$p_{ij_0}(h) \geq \delta > 0.$$

Тогда независимо от начального распределения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \pi_j \quad (j = 0, 1, \dots),$$

где π_j – компоненты стационарного распределения. Эта сходимость равномерна по j .

Стационарное распределение $\{\pi_j\}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\sum_i \pi_i \lambda_{ij} = 0, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим неоднородный процесс с конечным или счетным числом состояний. Множество всех состояний обозначим через X (X – фазовое пространство). Потребуем, чтобы для всех состояний $i, j = 0, 1, \dots$ существовали пределы:

$$\lim_{\substack{s_1 \uparrow s, s_2 \downarrow s}} \frac{p_{ij}(s_1, s_2) - \delta_{ij}}{s_2 - s_1} = \lambda_{ij}(s) \quad (3.2)$$

и чтобы для любого $i \in X$ ($i = 0, 1, \dots$) выполнялись условия

$$\sum_j \lambda_{ij}(s) = \lambda_i(s). \quad (3.3)$$

Теорема 2.3. Если для всех $(i, j, s) \in X \times X \times (0, t)$ условия (3.2) и (3.3) имеют место, то тогда вероятности $p_{ij}(s, t)$ дифференцируемы по s ($0 < s < t$) и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (обратные уравнения Колмогорова):

$$-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_{k \in X} \lambda_{ik}(s) p_{kj}(s,t), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 2.4. Если условия (3.2), (3.3) выполнены для всех $i, j \in X$, то переходные вероятности $p_{ij}(s, t)$ удовлетворяют прямым уравнениям Колмогорова:

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = \sum_{k \in X} p_{ik}(s, t) \lambda_{kj}(t), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < s < t.$$

Теорема 2.5. Если условия теоремы 1.4 имеют место, то вероятности состояний $p_j(s, t)$ удовлетворяют прямым уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial p_j(s, t)}{\partial t} = \sum_{k \in X} p_k(s, t) \lambda_{kj}(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Остановимся на вопросах о существовании и единственности решений прямой и обратной систем Колмогорова и о совпадении решений для прямой и обратной систем. В. Феллер доказал [151], что если при любом s ($0 < s < t$)

$$\sup_i \lambda_i(s) < \infty,$$

то существует единственное общее решение прямой и обратной систем $\{p_{ij}(s, t)\}$, удовлетворяющее уравнению Колмогорова-Чепмена

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in X} p_{ik}(s, \tau) p_{kj}(\tau, t)$$

и условиям

$$p_{ij}(s, t) \geq 0, \quad \sum_{j \in X} p_{ij}(s, t) = 1. \quad (3.4)$$

При рассмотрении конкретных прикладных задач, приходится иметь дело с такими последовательностями $\lambda_i(t)$, которые не удовлетворяют условию (3.3). В таких случаях приходится сталкиваться с решениями, для которых

$$\sum_{j \in X} p_{ij}(s, t) < 1. \quad (3.5)$$

В. Феллером было установлено, что, независимо от поведения коэффициентов $\lambda_i(s)$, всегда существует минимальное решение $\{p_{ij}(s, t)\}$, удовлетворяющее обеим системам Колмогорова, и также уравнению Колмогорова-Чепмена. Это решение называется минимальным, т.к. для любого

решения $\{\tilde{p}_{ij}(s, t)\}$, удовлетворяющего либо прямым, либо обратным уравнениям Колмогорова

$$\tilde{p}_{ij}(s, t) \geq p_{ij}(s, t).$$

Им было также установлено, что если минимальное решение удовлетворяет (3.4), то кроме него прямая и обратная системы не имеют никаких других решений, имеющих вероятностный смысл. Иными словами, если минимальное решение удовлетворяет условиям (3.4), то процесс однозначно определится любой из систем Колмогорова.

Если же минимальное решение удовлетворяет условию (3.5), то в этом случае существует бесконечное число решений, удовлетворяющих обратным уравнениям и уравнению Колмогорова-Чепмена и, значит, существует бесконечно много марковских процессов, отвечающих этим уравнениям. Часть этих решений может удовлетворять и прямым уравнениям.

Ниже будут рассматриваться системы Колмогорова, часть коэффициентов которых может иметь неинтегрируемые особенности. При исследовании решений таких уравнений следует иметь в виду те их свойства, которые были приведены выше.

3.2. Оценка точности σ -фокусировки марковского процесса

Рассмотрим марковский процесс, заданный на временном полуинтервале $[a, b)$. Если для любого начального распределения $\{p_i^0\}$, заданного в точке b , распределение вероятностей процесса $p_i(t) \rightarrow p_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, при $t \rightarrow b$, то такое явление называется фокусировкой [61, 62, 65, 66]. В [62] показано, что при некоторых условиях, налагаемых на инфинитезимальную матрицу $\Lambda(t)$ процесса (существование столбца, содержащего неинтегрируемые особенности в точке b , и существование предела у нулевого собственного вектора матрицы $\Lambda(t)$), указанная фокусировка имеет место. Если же в этом столбце интегралы сходятся, но принимают по абсолютной величине достаточно большие значения, то финальные вероятности лежат в некоторой σ -окрестности:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow b} p_i(t) \leq p_i^* + \sigma; \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow b} p_i(t) \geq p_i^* - \sigma$$

и такое явление носит название σ -фокусировки [62]. Полученная ниже оценка для параметра σ , характеризующая точность σ -фокусировки, произведена способом, отличным от способа, предложенного в [62].

Построим оценку параметра σ для σ -фокусировки процесса по заданной инфинитезимальной матрице $\Lambda(t)$ неоднородного марковского процесса, выразив ее через элементы инфинитезимальной матрицы, а не стохастической как в [62]:

$$R_j(s_0, t_0) - r_j(s_0, t_0) \leq \prod_{k=1}^N [1 - \delta_j(s_{k-1}, s_k)], \quad (3.6)$$

где $R_j(s_0, t_0) = \sup_i p_{ij}(s_0, t_0)$;

$$r_j(s_0, t_0) = \inf_i p_{ij}(s_0, t_0);$$

$$\delta_j(s_{k-1}, s_k) = \inf_{i \neq j} p_{ij}(s_{k-1}, s_k);$$

$s_0, s_1, \dots, s_k, \dots$ – такая последовательность моментов времени, что $s_k \in [s_0, t_0)$; $s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots$; $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = t_0$.

По определению, $R_j(s_0, t_0) - r_j(s_0, t_0) = 2\sigma$.

Для $i \neq j$ рассмотрим предел произведения (3.6) при $N \rightarrow \infty$, учитывая, что $p_{ij}(t, t+h) = \lambda_{ij}(t)h + \bar{o}(h)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - p_{ij} \left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k-1), t_0 + \frac{t-t_0}{N}k \right) \right) = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{t-t_0}{N} \lambda_{ij} \left(\frac{t-t_0}{N}(k-1) + t_0 \right) \right) = \\ & = \exp \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \ln \left(1 - \frac{t-t_0}{N} \lambda_{ij} \left(\frac{t-t_0}{N}(k-1) + t_0 \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку, $\ln(1-x) = -x + \bar{o}(x)$, то мы можем преобразовать последнее выражение к виду

$$\exp \left\{ - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{t-t_0}{N} \lambda_{ij} \left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k-1) \right) \right\} = \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \lambda_{ij}(\tau) d\tau \right\}$$

Если теперь рассмотреть аналогичный предел для δ_j :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \delta_j \left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k-1), t_0 + \frac{t-t_0}{N}k \right) \right),$$

то в каждой из рассматриваемых точек величина δ_j будет заменяться на соответствующее значение $p_{i_m j}(t_{k-1}, t_k)$, такое что

$$p_{i_m j}(t_{k-1}, t_k) = \min_{i \neq j} p_{ij}(t_{k-1}, t_k).$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \delta_j \left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k-1), t_0 + \frac{t-t_0}{N}k \right) \right) \leq \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \min_{i \neq j} \lambda_{ij}(\tau) d\tau \right\}$$

Поскольку, $p_j(s, t) = \sum_{i=1}^n p_i(s) p_{ij}(s, t) \leq \sum_{i=1}^n p_i(s) R_j(s, t) = R_j(s, t)$ и

$$p_j(s, t) = \sum_{i=1}^n p_i(s) p_{ij}(s, t) \geq \sum_{i=1}^n p_i(s) r_j(s, t) = r_j(s, t),$$

то в зависимости от начального распределения вероятность нахождения процесса в состоянии j будет лежать между $r_j(s, t)$ и $R_j(s, t)$:

$$r_j(s, t) \leq \inf_{p_i(s)} p_j(s, t) \leq p_j(s, t) \leq \sup_{p_i(s)} p_j(s, t) \leq R_j(s, t),$$

где инфимум и супремум берутся по всем возможным начальным распределениям в момент времени s . Тогда

$$\sup_{p_i(s)} p_j(s, t) - \inf_{p_i(s)} p_j(s, t) \leq \exp \left\{ - \int_s^t \min_{i \neq j} \lambda_{ij}(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.7)$$

Таким образом, если $\int_{t_0}^t \min_{i \neq j_0} \lambda_{ij_0}(\tau) d\tau > -\ln \sigma$, то будет иметь место

σ -фокусировка. В частности, если расходится интеграл

$$\int_{t_0}^t \min_{i \neq j} \lambda_{ij}(\tau) d\tau = \infty,$$

то в предельной точке t будет наблюдаться точная фокусировка.

Заметим, что из оценки (3.7) следует, что максимальное расстояние между траекториями, соответствующими различным начальным распределениям, уменьшается с течением времени.

3.3. Решение системы дифференциальных уравнений Колмогорова

Рассмотрим неоднородный марковский процесс, заданный инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$, где $t \in [a, b]$. Найдем соответствующую ей

стохастическую матрицу $P(a,t)$, описывающую вероятности перехода между состояниями на отрезке времени $[a,t]$. Вопросы численного решения системы дифференциальных уравнений рассмотрены в [103, 137, 153]. Специальные подходы к решению системы уравнений Колмогорова приведены в [75, 119, 158]. Сложности при ее численном решении возникают, когда инфинитезимальная матрица быстро изменяется (такие эффекты возникают при явлениях фокусировки или σ -фокусировки). Вначале рассмотрим задачу Коши общего вида

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a, b), \quad (3.8)$$

$$y(a) = y_0, \quad (3.9)$$

где x, y – скаляры или векторы. Общая форма численного метода решения задачи (3.8)-(3.9) такова

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

где α_j, β_j – постоянные, $\alpha_k \neq 0, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$; это линейное соотношение между y_{n+j} и f_{n+j} . Соответствующий формуле (3.10) метод называется линейным многошаговым методом или k -шаговым методом. Если $\beta_k = 0$, то метод (3.10) называется явным многошаговым методом. Если же $\beta_k \neq 0$, то в общем случае необходимо решать нелинейное уравнение относительно y_{n+k} и метод (3.10) называется неявным многошаговым методом. В [138] показано, что, несмотря на большую вычислительную сложность, неявные методы обычно предпочтительнее на практике. Для заданного числа k неявный метод является в принципе более точным, чем явный. Далее, когда дело доходит до рассмотрения поведения методов при малых возмущениях значений y_n (моделирующего поведение формул при их численной реализации на вычислительных машинах), оказывается, что в явных методах значения шага h должны быть гораздо меньше, чем в неявных методах (вследствие абсолютной устойчивости последних).

Учитывая вышесказанное, перейдем к численному решению системы дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dp^T}{dt} = A^T(t)p^T, \quad t \in (a, b),$$

$$p^T(a) = p^0,$$

где $p^T(t)$ – вектор-столбец, описывающий распределение вероятностей в момент времени t . Будем использовать неявный метод прямоугольников

$$p_{n+1}^T - p_n^T = h_n A^T(t_{n+1}) p_{n+1}^T \quad (3.11)$$

и неявный метод трапеций

$$p_{n+1}^T - p_n^T = \frac{h_n}{2} \left(A^T(t_n) p_n^T + A^T(t_{n+1}) p_{n+1}^T \right), \quad (3.12)$$

где нижний индекс n означает значение соответствующего параметра на n -ой итерации. Решая уравнения (3.11)-(3.12) относительно p_{n+1}^T , найдем

$$p_{n+1}^T = \left(E - h_n A^T(t_{n+1}) \right)^{-1} p_n^T \quad (3.13)$$

для метода прямоугольников и

$$p_{n+1}^T = \left(E - \frac{h_n}{2} A^T(t_{n+1}) \right)^{-1} \left(E + \frac{h_n}{2} A^T(t_n) \right) p_n^T \quad (3.14)$$

для метода трапеций. Достоинством неявного метода трапеций является также и то, что в нем при вычислении значения искомой функции в точке t_{n+1} учитываются значения инфинитезимальной матрицы A в точках t_n и t_{n+1} . Это значительно улучшает точность приближения, даже в случае резких возмущений $A(t)$.

Общая схема вычислений состоит в следующем. Задаемся достаточно малой максимально допустимой погрешностью $\varepsilon > 0$, минимально допустимым шагом h_{\min} и максимально допустимым шагом h_{\max} . На n -ой итерации вычисляем $p_{n+1}^{T(np)}$ по формуле прямоугольников (3.13) и $p_{n+1}^{T(mp)}$ по формуле трапеций (3.14). Вычисляем локальную погрешность $\left\| p_{n+1}^{T(np)} - p_{n+1}^{T(mp)} \right\| < \varepsilon$. В качестве нормы в пространстве векторов берем сумму модулей координат вектора:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Если локальная погрешность больше ε и шаг $h_n > h_{\min}$, то уменьшаем шаг в δ раз и повторяем n -ю итерацию ($\delta > 1$). Для более точного описания процессов с большими по модулю элементами инфинитезимальной матрицы уменьшаем

(насколько это возможно) шаг итерации так, чтобы $h_n < \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_{ii}(t_n)|}$.

Продолжаем процесс до тех пор, пока либо локальная погрешность не окажется меньшей ε , либо шаг h_n не окажется меньше минимально допустимого h_{\min} .

После этого полагаем значение вектора распределения вероятностей в точке t_{n+1} равным значению, полученному по формуле трапеций: $p_{n+1}^T = p_{n+1}^{T(mp)}$ и переходим к $(n+1)$ -ой итерации. Мы используем значение $p_{n+1}^{T(mp)}$, так как метод трапеций является более точным.

При переходе к $(n+1)$ -ой итерации оставляем шаг неизменным $h_{n+1} = h_n$, если на n -ой итерации производилось его уменьшение, либо шаг уже достиг своего максимального значения h_{\max} . В противном случае увеличиваем шаг $h_{n+1} = \gamma h_n$, где γ – заранее выбранная константа, $1 < \gamma < 2$. Такое увеличение шага значительно ускоряет решение системы уравнений на тех участках, где $A(t)$ изменяется достаточно плавно.

3.4. Стабилизация распределений марковского процесса

В [147] установлено, что фокусировка в точке t_0 имеет место, если элементы $\lambda_{ij}(t)$ инфинитезимальной матрицы $A(t)$ (все или их часть) при $t \rightarrow t_0$ быстро возрастают. Их быстрый рост обычно возникает из-за воздействия на процесс быстро изменяющихся внешних факторов, локализованных на малых промежутках времени. На практике приходится иметь дело с такими факторами, которые, воздействуя на процесс на некотором промежутке времени $[a, b]$, приводят к появлению на нем точек фокусировки, распределенных почти непрерывно. В связи с этим возникает задача о стабилизации вероятностей состояний марковского процесса в окрестности заданного распределения путем целенаправленного воздействия на его инфинитезимальную матрицу $A(t)$.

Пусть задана n -мерная кривая $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$:

$$\varphi_k(t) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n; \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) = 1, t \in [a, b]. \quad (3.15)$$

В начальной точке a задано распределение вероятностей $p(a)$. Требуется, чтобы в последующие моменты времени $t \in [a, b]$ распределение вероятностей $p(t)$ находилось в окрестности указанной кривой $\varphi(t)$ (3.15):

$$\varphi(t) - \sigma(t) \leq p(t) \leq \varphi(t) + \sigma(t), t \in [a, b], \quad (3.16)$$

где $\sigma(t)$ – максимально допустимая погрешность. Полагаем, что в начальный момент времени $t = a$ это условие уже выполнено:

$$\varphi(a) - \sigma(a) \leq p(a) \leq \varphi(a) + \sigma(a).$$

Задача состоит в том, чтобы при заданном начальном распределении $p(a)$ выбрать инфинитезимальную матрицу $\Lambda(t)$ таким образом, чтобы выполнялось условие (3.16). Функция $\sigma(t)$ и инфинитезимальная матрица $\Lambda(t)$ при этом предполагаются непрерывными на отрезке $[a, b]$, $\sigma(t) \geq 0$.

Связь между инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t) = \|\lambda_{ij}(t)\|$ и распределением вероятностей $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ задается прямой системой дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dp^T}{dt} = \Lambda^T p^T.$$

Разобьем весь временной отрезок $[a, b]$ на малые отрезки $[t_k, t_{k+1}]$, $t_0 = a$, $t_m = b$. Ввиду непрерывности инфинитезимальной матрицы $\Lambda(t)$, а, следовательно, и решения $p(t)$, на каждом из частичных отрезков заменим уравнения Колмогорова приближенным разностным матричным уравнением. Обозначим $h_k = t_{k+1} - t_k$ (рис. 3.1).

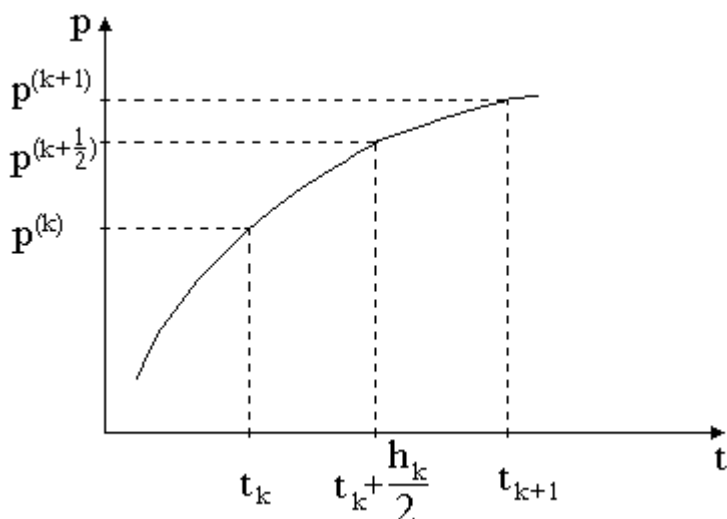


Рис. 3.1. Аппроксимация уравнений Колмогорова

Значение в промежуточной точке $t_k + \frac{h_k}{2}$ может быть представлено в виде

$$p^{T(k+1/2)} = \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) p^{T(k)} + \bar{o}(h_k) \quad (3.17)$$

и, с другой стороны,

$$p^{T(k+1/2)} = \left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right) p^{T(k+1)} + \bar{o}(h_k), \quad (3.18)$$

где E – единичная матрица. Сопоставляя соотношения (3.17) и (3.18), получим аппроксимацию системы уравнений Колмогорова матричным уравнением

$$p^{T(k+1)} = \left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right)^{-1} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) p^{T(k)}, \quad (3.19)$$

где символ $^{(k)}$ представляет собой значение соответствующего параметра в точке t_k . Уменьшая шаг h_k , можем добиться сколь угодно малой разности между точным решением системы дифференциальных уравнений и приближенным решением разностной системы. Преобразовывая разностное уравнение, получим

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right) p^{T(k+1)} &= \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) p^{T(k)}, \\ p^{T(k+1)} - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} p^{T(k+1)} &= p^{T(k)} + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} p^{T(k)}, \\ p^{(k+1)} - \frac{h_k}{2} p^{(k+1)} \Lambda^{(k+1)} &= p^{(k)} + \frac{h_k}{2} p^{(k)} \Lambda^{(k)}, \\ p^{(k+1)} \Lambda^{(k+1)} &= 2 \frac{p^{(k+1)} - p^{(k)}}{h_k} - p^{(k)} \Lambda^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Таким образом, на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ по заданному значению матрицы $\Lambda^{(k)}$ в начальной точке t_k мы можем найти значение $\Lambda^{(k+1)}$ в конечной точке t_{k+1} так, чтобы распределение вероятностей в ней приняло значение $p^{(k+1)}$. Однако уравнение (3.20) не определяет однозначно матрицу $\Lambda^{(k+1)}$. Поэтому целесообразно из множества матриц $\Lambda^{(k+1)}$ выбрать такую, которая бы минимально отклонялась от исходной невозмущенной матрицы.

Обозначим через $X^{(k+1)}$ искомое значение возмущенной матрицы в точке t_k и перепишем условие (3.20) в виде

$$p^{(k+1)} X^{(k+1)} = 2 \frac{p^{(k+1)} - p^{(k)}}{h_k} - p^{(k)} X^{(k)}.$$

Это приводит к задаче минимизации вида

$$\alpha \sum_{i,j} \left(x_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k+1)} \right)^2 + \beta \sum_{i,j} \left(x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)} \right)^2 \rightarrow \min_{x_{ij}^{(k+1)}}; \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^{(k+1)} x_{ij}^{(k+1)} = - \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} x_{ij}^{(k)} + \frac{2}{h_k} \left(p_j^{(k+1)} - p_j^{(k)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.22)$$

$$x_{ii}^{(k+1)} = - \sum_{j \neq i} x_{ij}^{(k+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.23)$$

$$x_{ij}^{(k+1)} \geq 0, \quad i \neq j. \quad (3.24)$$

Здесь $x_{ij}^{(k+1)}$ - элементы искомой матрицы $X(t)$ в точке t_k , \square - элементы невозмущенной матрицы $\Lambda(t)$ в той же точке. Ограничение (3.22) представляет собой аппроксимацию (3.20) уравнений Колмогорова. Ограничения (3.23)-(3.24) определяются свойствами инфинитезимальной матрицы. Первое слагаемое в функции цели означает стремление к минимальному отклонению от исходной невозмущенной матрицы Λ , второе слагаемое введено для избежания резких осцилляций возмущенной матрицы. Положительные коэффициенты α и β регулируют вклады этих слагаемых.

Задача (3.21)-(3.24) является задачей квадратичного программирования с линейными ограничениями и квадратичной функцией цели. Такая задача всегда имеет единственное решение, которое может быть найдено численными методами. Таким образом, задача об удержании распределения вероятностей марковского процесса в окрестности некоторой функции распределения (3.16) сводится к разбиению временного интервала на частичные отрезки и решению задачи минимизации (3.21)-(3.24) на каждом из них. Если найденное решение $X^{(k+1)}$ после подстановки в уравнения Колмогорова дает

$$p(t_{k+1}) \in [\varphi(t_{k+1}) - \sigma(t_{k+1}), \varphi(t_{k+1}) + \sigma(t_{k+1})],$$

то принимаем его как начальное значение на следующем отрезке $[t_{k+1}, t_{k+1}]$. В противном случае уменьшаем шаг h_k на данном частичном отрезке и повторяем вычисления заново. Отметим, что указанный подход позволяет вычислить возмущенную инфинитезимальную матрицу процесса на любой системе точек из временного отрезка $[a, b]$.

3.5. Произвольное начальное распределение

Предыдущая задача была решена в предположении о том, что начальное распределение известно. Если же начальное распределение неизвестно, то следует так выбирать инфинитезимальную матрицу $X(t)$, чтобы при любом начальном распределении, заданном в точке a , распределение вероятностей лежало бы в полосе

$$\varphi_1(t) \leq p(t) \leq \varphi_2(t), \quad t \in [a, b],$$

где $\varphi_1(t) = (\varphi_{11}(t), \varphi_{12}(t), \dots, \varphi_{1n}(t))$, $\varphi_2(t) = (\varphi_{21}(t), \varphi_{22}(t), \dots, \varphi_{2n}(t))$ – вектор-функции, непрерывные на $[a, b]$ и такие, что $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$, $t \in [a, b]$, $\varphi_1(a) = 0$, $\varphi_2(a) = 1$ (рис. 3.2).

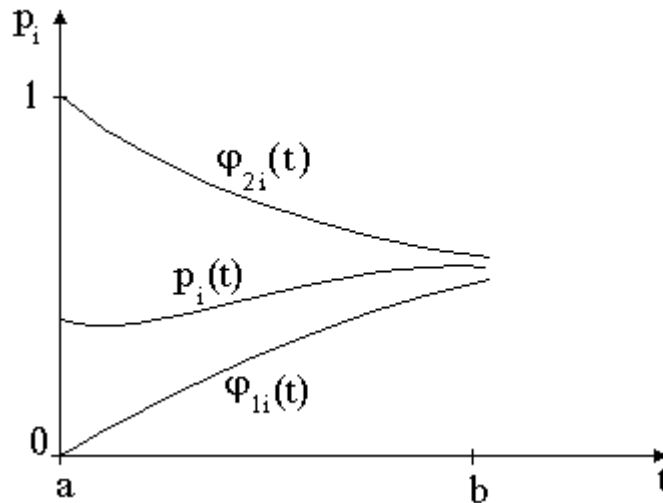


Рис. 3.2. Удержание вектора распределения в заданной полосе

Отметим, что если $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$, то инфинитезимальная матрица $\Lambda(t)$ может иметь разрыв типа полюс в точке t_0 [147]. Поэтому далее будем предполагать, что $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ не обращается в нуль ни в одной из точек отрезка $[a, b]$. Тогда матрица $\Lambda(t)$ будет непрерывна на всем отрезке $[a, b]$.

Пусть $P(a, t)$ – матрица переходных вероятностей на отрезке времени $[a, t]$. Тогда $p(t) = p(a)P(a, t)$. Отображение $P(a, t)$ переводит множество начальных распределений $\{p(a)\}$ во множество $\{p(t)\}$. Набор векторов $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ будем называть положительным базисом множества распределений $\{p(t)\}$, если любой вектор из этого множества представляется в виде неотрицательной линейной комбинации базисных векторов: $p(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_n e_n(t)$, где $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

Лемма 2.1. Отображение $P(a,t)$ переводит положительный базис $e_i(a)$ в положительный базис $e_i(t)$.

Доказательство. Поскольку $e_1(a), e_2(a), \dots, e_n(a)$ образуют положительный базис, то любое распределение вероятностей $p(a) \in \{p(a)\}$ может быть представлено в виде линейной комбинации:

$$p(a) = \alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + \dots + \alpha_n e_n(a),$$

где $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$. Тогда в точке t получим

$$\begin{aligned} p(t) &= p(a)P(a,t) = (\alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + \dots + \alpha_n e_n(a))P(a,t) = \\ &= \alpha_1 e_1(a)P(a,t) + \alpha_2 e_2(a)P(a,t) + \dots + \alpha_n e_n(a)P(a,t) = \\ &= \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_n e_n(t). \end{aligned}$$

Таким образом, распределение $p(t)$ представляется в виде неотрицательной линейной комбинации векторов $e_i(t)$, являющихся отображением базисных векторов $e_i(a)$. Полученное равенство и доказывает утверждение леммы.

Лемма 2.2. Если начальные распределения $e_1(a), e_2(a), \dots, e_n(a)$ образуют положительный базис и $e_i(t) \geq \varphi_1(t)$, $t \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$, то для любого начального распределения $p(a)$ будет выполнено то же неравенство $p(t) \geq \varphi_1(t)$, $t \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $P(a,t)$ – матрица переходных вероятностей на отрезке времени $[a, t]$. Тогда $p(t) = p(a)P(a,t)$. Поскольку $e_1(a), e_2(a), \dots, e_n(a)$ образуют положительный базис, то любое начальное распределение представимо в виде

$$p(a) = \alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + \dots + \alpha_n e_n(a),$$

где $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Тогда в момент времени t :

$$\begin{aligned} p(t) &= (\alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + \dots + \alpha_n e_n(a))P(a,t) = \\ &= \alpha_1 e_1(a)P(a,t) + \alpha_2 e_2(a)P(a,t) + \dots + \alpha_n e_n(a)P(a,t) = \\ &= \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_n e_n(t). \end{aligned}$$

Так как $e_i(t) \geq \varphi_1(t)$, то

$$p(t) \geq \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_1(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \varphi_1(t) = \varphi_1(t).$$

Лемма доказана.

Совершенно аналогично доказывается утверждение о том, что если все элементы положительного базиса $e_i(t) \leq \varphi_2(t)$, $t \in [a, b]$, $i=1, 2, \dots, n$, то для любого начального распределения $p(a)$ будет выполнено неравенство $p(t) \leq \varphi_2(t)$, $t \in [a, b]$.

Очевидно, что векторы

$$\begin{aligned} e_1(a) &= (1, 0, \dots, 0), \\ e_2(a) &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ e_n(a) &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

образуют положительный базис в начальной точке a и, следовательно, векторы $e_m(t) = e_m(a)P(a, t)$ будут образовывать положительный базис в любой точке $t \in [a, b]$. Заметим, что указанный базис является единственным дающим все остальные возможные начальные распределения вероятностей. Из оценки (3.7) следует, что с течением времени векторы e_i положительного базиса будут сближаться, если только существует столбец матрицы $A(t)$, недиагональные элементы которого отличны от нуля.

Разобьем временной интервал на частичные отрезки $[t_k, t_{k+1}]$. Согласно леммам 2.1, 2.2, для выполнения условия $p^{k+1} \geq \varphi_1^{k+1}$ в точке t_{k+1} , необходимо и достаточно, чтобы оно было выполнено, когда в качестве начального распределения в точке t_k взяты векторы положительного базиса \square . Тогда из формулы (3.19) имеем

$$\square.$$

Для линеаризации полученного неравенства воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, \quad |q| < 1.$$

Тогда \square при достаточно малом значении \square , что может быть достигнуто выбором подходящего шага h_k . Тогда

$$\left(E + \frac{h_k}{2} A^{T(k+1)} \right) \left(E + \frac{h_k}{2} A^{T(k)} \right) e_m^{T(k)} \geq \varphi_1^{T(k+1)}.$$

Транспонируем неравенство и выделяем $\Lambda^{(k+1)}$:

$$e_m^{(k)} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k)} \right) \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k+1)} \right) \geq \varphi_1^{(k+1)},$$

$$\frac{h_k}{2} e_m^{(k)} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k)} \right) \Lambda^{(k+1)} + e_m^{(k)} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k)} \right) \geq \varphi_1^{(k+1)},$$

$$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}$$

Аналогичное соотношение выполнено и для φ_2 :

$$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}$$

Это приводит к задаче минимизации, аналогичной (3.21) -(3.24),

$$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}; \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{mi}^{(k+1)} x_{ij}^{(k+1)} \geq \frac{2}{h_k} \left(\varphi_{1j}^{(k+1)} - e_{mj}^{(k)} \right) - \sum_{i=1}^n e_{mi}^{(k)} x_{ij}^{(k)}; \quad (3.26)$$

$$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}} \quad j=1,2, \dots, n, m=1, 2, \dots, n; \quad (3.27)$$

где

$$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}, m=1,2, \dots, n; \quad (3.28)$$

$$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}, i=1,2, \dots, n; \quad (3.29)$$

$$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}, i \neq j. \quad (3.30)$$

Здесь, по-прежнему, $\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}$ - элементы искомой матрицы $X(t)$ в точке t_{k+1} ,

$\boxed{\phantom{\Lambda^{(k+1)}}}$ - элементы невозмущенной матрицы $\Lambda(t)$ в той же точке.

Задачи (3.21) -(3.24) и (3.25)-(3.30) сходны, за исключением того, что при переходе к рассмотрению случая с произвольным начальным распределением

условие (3.22) типа равенства заменяется условиями типа неравенств вида (3.26)-(3.27).

3.6. Компьютерное моделирование процесса фокусировки

Рассмотрим произвольный неоднородный марковский процесс с непрерывным временем, конечным множеством I состояний, $|I|=n$, и инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$. Вероятности нахождения процесса в i -м состоянии $i \in I$ в момент времени t обозначим $p_i(s_0, t)$.

Инфинитезимальная матрица марковского процесса является квазистохастической. Задача Коши в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} p'(t) &= \Lambda^T(t)p(t), \\ p(0) &= p^0, \end{aligned}$$

где $p(t) \in R^n$ – вектор вероятностей состояний процесса, p^0 – начальное распределение вероятностей.

Матрица Якоби для этой задачи совпадает с матрицей $\Lambda^T(t)$. Как было показано в [77], множество характеристических корней матрицы Якоби заключено в круге $|z + |\rho|| \leq |\rho|$ и имеет с окружностью $|z + |\rho|| = |\rho|$ общие точки $|\rho| e^{\frac{2\pi ia}{b}} - |\rho|$, где $0 \leq a < b \leq n$, где ρ – максимальный по модулю элемент инфинитезимальной матрицы марковского процесса. Его граница состоит из этих точек и соединяющих их в круговом порядке криволинейных дуг.

Отрезки границы множества характеристических корней матрицы Якоби, проходящие через точку комплексной плоскости $(0, 0)$, представляют собой отрезки прямых, соединяющих точки $|\rho| e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - |\rho|$ и $(0, 0)$, $(0, 0)$ и $|\rho| e^{\frac{2\pi i}{n}} - |\rho|$ соответственно. В окрестности полюса инфинитезимальной матрицы максимальный по модулю элемент ρ неограниченно растет, однако это не влияет на правую границу множества характеристических корней матрицы Якоби. Действительно, точки

$$|\rho| e^{\frac{2\pi i}{n}} - |\rho| = |\rho| \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1 \right)$$

лежат на одном луче, соединяющем точки $(0, 0)$ и $e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1$ независимо от величины ρ , а точки

$$|\rho| e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - |\rho| = |\rho| \left(e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - 1 \right)$$

лежат на луче, соединяющем точки $(0, 0)$ и $e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - 1$ независимо от величины $|\rho|$. Таким образом, все характеристические корни матрицы Якоби удовлетворяют условию $|\arg(-z)| < \frac{2\pi}{n}$.

Для численного решения уравнений Колмогорова была использована система Mathematica 4.0®. На сегодняшний день эта система является мировым лидером среди компьютерных систем символьной математики для персональных компьютеров и обеспечивает не только возможности выполнения сложных численных расчетов с выводом результатов в графической форме, но и проведение особо трудоемких аналитических вычислений и преобразований.

Опишем процесс построения инфинитезимальной матрицы Λ в предположении, что ее нулевой собственный вектор

$$\bar{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

известен. Задача отыскания Λ имеет бесконечное множество решений. Укажем одно из таких решений. Перепишем равенство $\Lambda^T \bar{\pi} = 0$ в виде:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \dots \\ \pi_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2,n-1} & \lambda_{2,n} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \dots & \lambda_{3,n-1} & \lambda_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{n,n-1} & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} = 0.$$

Вектор $(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{n1})$, составленный из элементов первого столбца матрицы Λ , должен быть ортогонален вектору $\bar{\pi}$. Кроме того, должны выполняться условия $\lambda_{11} < 0$, $\lambda_{k1} > 0$ ($k = 2, \dots, n$). Вектор $(\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{n2})$, компоненты которого есть элементы второго столбца матрицы Λ , также ортогонален вектору $\bar{\pi}$; в нем $\lambda_{22} < 0$, $\lambda_{12} > 0, \lambda_{32} > 0, \dots, \lambda_{n2} > 0$. Кроме того, должны выполняться условия $\lambda_{11} + \lambda_{12} < 0, \lambda_{21} + \lambda_{22} < 0$. Очевидно, что выбор величин $\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{n2}$ (предполагается, что первый столбец матрицы Λ уже выбран) производится неоднозначно. 3-й, ..., $(n-1)$ -й столбцы матрицы Λ также находятся неоднозначно: требуется лишь, чтобы каждый из них был ортогонален $\bar{\pi}$, элементы λ_{ii} ($i = 3, \dots, (n-1)$) этих столбцов должны быть отрицательны, а остальные элементы положительны. При построении очередного столбца следует сначала правильно выбрать его член, отвечающий диагональному элементу матрицы Λ . Остальные элементы этого столбца строятся без особого труда.

Если предположить, что все столбцы матрицы Λ , до $(n-2)$ -го столбца включительно, уже построены, то $(n-1)$ -й ее столбец строится так. Он должен быть ортогонален \vec{p} . Все его элементы $\lambda_{i, n-1}$, $i \neq n-1$, должны быть положительны, а элемент $\lambda_{n-1, n-1}$ отрицателен. Кроме того, суммы элементов каждой строки матрицы Λ (в которой n -й столбец еще не построен) должна быть отрицательна. Очевидно, $(n-1)$ -й столбец матрицы Λ , удовлетворяющий указанным условиям строится неоднозначно. Последний n -й столбец матрицы Λ равен сумме построенных ее столбцов, взятой с обратным знаком.

Из описанного выше способа построения матрицы Λ видно, что ее выбор может быть произведен неоднозначно.

Рассмотрим неоднородный марковский процесс с инфинитезимальной матрицей

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{0,5}{1-t} & \frac{0,5}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} & \frac{-3}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ \frac{0,5}{1-t} & \frac{0,5}{1-t} & \frac{-2}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{-3}{1-t} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Для этого процесса выполнены условия существования точки фокусировки и условия существования предельных вероятностей в этой точке, не зависящих от начального распределения вероятностей и момента времени, в который они заданы. Точкой фокусировки здесь является точка $t_0 = 1$. С процессами описываемыми матрицами вида (3.31) с неинтегрируемыми особенностями порядка t^{-1} , приходится сталкиваться в том случае, когда внешние воздействия на процесс возникают за счет точечных зарядов, величины которых быстро изменяются во времени.

Ниже приведены результаты численного моделирования данного марковского процесса, заключающегося в решении системы дифференциальных уравнений Колмогорова с инфинитезимальной матрицей (3.31).

Из таблицы 3.1. видно, что процесс выходит на свое стационарное распределение с момента времени, примерно равного $t = 0,99$. Динамика сходимости вероятности состояний к финальным вероятностям видна из таблицы 3.1.

Вероятности состояний для $t = 0,99$ совпадают с предельными вероятностями с точностью до 3-го знака после запятой.

Таблица 3.1.

Сходимость вероятности состояний к финальным вероятностям

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$
0,88	0,288337	0,214954	0,283349	0,213361
0,99	0,285719	0,214287	0,285709	0,214284
0,999	0,285714	0,214286	0,285714	0,214286

В рассмотренном выше примере сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям происходит достаточно быстро. Рассмотрим теперь процесс с инфинитезимальной матрицей вида

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\ln \frac{1}{1-t} & \frac{1}{3} \ln \frac{1}{1-t} & \frac{2}{3} \ln \frac{1}{1-t} \\ \ln \frac{1}{1-t} & -2 \ln \frac{1}{1-t} & \ln \frac{1}{1-t} \\ \ln \frac{1}{1-t} & 2 \ln \frac{1}{1-t} & -3 \ln \frac{1}{1-t} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Здесь $t_0 = 1$ является точкой фокусировки. Элементы матрицы (3.32) имеют при $t_0 = 1$ неинтегрируемые разрывы, однако соответствующие несобственные интегралы расходятся медленно из-за медленного стремления к ∞ (при $t \uparrow 1$) ее элементов. Поэтому вероятности состояний $p_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) при $t \uparrow 1$ стремятся к финальным вероятностям достаточно медленно. Динамика сходимости вероятности состояний к стационарному распределению приведена в таблице 3.2.

Таблица 3.2.

Сходимость вероятности состояний к стационарному распределению

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,630986	0,19109	0,177923
0,99	0,575686	0,23146	0,19285
0,999	0,568734	0,236751	0,194515
0,9999	0,567789	0,23474	0,194737
0,99999	0,567667	0,237567	0,194766
0,999999	0,567652	0,237578	0,194769
0,9999999	0,567651	0,23758	0,19477
0,9999999	0,567651	0,23758	0,19477
0,99999999	0,56765	0,23758	0,19477
0,999999999	0,56765	0,23758	0,19477

Элементы последней строки этой таблицы совпадают с компонентами предельного распределения. Рассмотрим теперь четыре процесса с инфинитезимальными матрицами

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\ln^2 \frac{1}{1-t} & \frac{1}{3} \ln^2 \frac{1}{1-t} & \frac{2}{3} \ln^2 \frac{1}{1-t} \\ \ln^2 \frac{1}{1-t} & -2 \ln^2 \frac{1}{1-t} & \ln^2 \frac{1}{1-t} \\ \ln^2 \frac{1}{1-t} & 2 \ln^2 \frac{1}{1-t} & -3 \ln^2 \frac{1}{1-t} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\ln^3 \frac{1}{1-t} & \frac{1}{3} \ln^3 \frac{1}{1-t} & \frac{2}{3} \ln^3 \frac{1}{1-t} \\ \ln^3 \frac{1}{1-t} & -2 \ln^3 \frac{1}{1-t} & \ln^3 \frac{1}{1-t} \\ \ln^3 \frac{1}{1-t} & 2 \ln^3 \frac{1}{1-t} & -3 \ln^3 \frac{1}{1-t} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\ln^4 \frac{1}{1-t} & \frac{1}{3} \ln^4 \frac{1}{1-t} & \frac{2}{3} \ln^4 \frac{1}{1-t} \\ \ln^4 \frac{1}{1-t} & -2 \ln^4 \frac{1}{1-t} & \ln^4 \frac{1}{1-t} \\ \ln^4 \frac{1}{1-t} & 2 \ln^4 \frac{1}{1-t} & -3 \ln^4 \frac{1}{1-t} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\ln^5 \frac{1}{1-t} & \frac{1}{3} \ln^5 \frac{1}{1-t} & \frac{2}{3} \ln^5 \frac{1}{1-t} \\ \ln^5 \frac{1}{1-t} & -2 \ln^5 \frac{1}{1-t} & \ln^5 \frac{1}{1-t} \\ \ln^5 \frac{1}{1-t} & 2 \ln^5 \frac{1}{1-t} & -3 \ln^5 \frac{1}{1-t} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Для каждой из них $t_0 = 1$ является точкой фокусировки. В этих матрицах показатель при логарифме (он принимает значения 2, 3, 4, 5 соответственно) задает порядок стремления к бесконечности их элементов при $t \uparrow 1$. Из приведенных ниже данных видно, как при этом изменяется динамика сходимости вероятностей состояний к финальным вероятностям. Для каждой из

этих матриц динамика сходимости вероятностей состояний к финальным вероятностям приведена в таблицах 3.3-3.6 соответственно.

Таблица 3.3.

Сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям для матрицы (3.33)

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,599091	0,214	0,186908
0,599	0,510391	0,283062	0,206547
0,99999	0,509177	0,284061	0,206762
0,9999999	0,509149	0,284084	0,206767
0,99999999	0,509148	0,284085	0,206767
0,999999999	0,509148	0,284085	0,206767

Таблица 3.4.

Сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям для матрицы (3.34)

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,544721	0,2554	0,199879
0,99	0,500151	0,29154	0,208308
0,999	0,500009	0,291659	0,208332
0,9999	0,500004	0,291663	0,208333
0,99999	0,500003	0,291664	0,208333

Таблица 3.5.

Сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям для матрицы (3.35)

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,508846	0,6284334	0,20682
0,99	0,5	0,291667	0,208333
0,999	0,5	0,291667	0,208333

Таблица 3.6.

Сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям для матрицы (3.36)

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,500363	0,291364	0,208273
0,99	0,5	0,291667	0,208333
0,999	0,5	0,291667	0,208333

Элементы последних строк в каждой из приведенных таблиц совпадают с компонентами соответствующего стационарного распределения.

Матрицы рассмотренных выше процессов с точностью до скалярных множителей, обращающихся в бесконечность при $t \uparrow 1$, постоянны. Может возникнуть ложное предположение о том, что именно это обстоятельство обеспечивает фокусировку. Приведем компьютерный анализ процесса, для которого инфинитезимальная матрица не обладает указанным свойством.

Рассмотрим процесс, матрица которого содержит элементы различных порядков роста. Инфинитезимальная матрица процесса имеет вид:

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1-t} - \ln \frac{1}{1-t} & \ln \frac{1}{1-t} & \frac{1}{3(1-t)} & \frac{2}{3(1-t)} \\ \ln \frac{1}{1-t} & -\frac{2}{1-t} - 3 \ln \frac{1}{1-t} & \frac{2}{1-t} & 2 \ln \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} + \ln \frac{1}{1-t} & \ln \frac{1}{1-t} & -2 \ln \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-t} & \frac{2}{1-t} & \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-t} & -\frac{3}{1-t} - \ln \frac{1}{1-t} \end{bmatrix}.$$

Точка $t=1$ является для него точкой фокусировки. Этот процесс промоделирован при различных начальных распределениях вероятностей.

Из результатов вычислений видно, что значения предельных вероятностей не зависят от начального распределения вероятностей. Стабилизация процесса наблюдается, начиная с момента времени $t = 0,99999999$.

Из таблицы 3.7 видно, что процесс стабилизируется, начиная с этой точки. Динамика сходимости вероятности состояний к стационарному распределению представлена в таблице 3.7.

Таблица 3.7.

Сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$
0,9	0,416145	0,182363	0,237695	0,163797
0,9999	0,393922	0,177583	0,28009	0,149594
0,9999999	0,392524	0,17757	0,280373	0,149533
0,999999999	0,392523	0,17757	0,280373	0,149533

Здесь элементы последней строки совпадают с компонентами предельного распределения, численные данные таблицы соответствуют начальному распределению вероятностей $(1, 0, 0, 0)$. Данные для других начальных распределений начиная с момента $t = 0,9999$ совпадают с приведенными выше.

Рассмотрим марковский процесс с конечным числом состояний n и инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$ ($s_0 \leq t \leq t_0$), распадающийся при $t \uparrow t_0$ на несвязанные фрагменты. Пусть Λ_{11} и Λ_{22} есть левый верхний и правый нижний диагональные блоки матрицы Λ размерностей $m \times m$ и $(n-m) \times (n-m)$. Обозначим через $\Lambda_{12}(t)$, $\Lambda_{21}(t)$ правый верхний и левый нижний блоки $\Lambda(t)$ (недиагональные блоки) размерностей $m \times (n-m)$ и $(n-m) \times m$. Элементы недиагональных блоков стремятся к нулю при $t \uparrow t_0$. В этом случае будем говорить, что при $t \uparrow t_0$ процесс распадается на несвязанные фрагменты. Представляет интерес случай, когда в момент распада $t = t_0$ происходит и фокусировка распределений процессов, отвечающих матрицам Λ_{11} и, Λ_{22} или фокусировка хотя бы одного из них. Приведем условия, при выполнении которых эти фокусировки имеют место.

Известно (см., например, [152]), что «близким» в смысле нормы матрицам двух линейных систем дифференциальных уравнений отвечают мало отличающиеся друг от друга решения этих систем. Предположим, что

$$\left\| X_k(t) - \hat{X}_k(t) \right\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.37)$$

Здесь $X_k(t)$ – матрицант распадающейся системы уравнений Колмогорова с матрицей $\Lambda(t)$, отвечающий отрезку $[t_k, t_{k+1}]$; $\hat{X}_k(t)$ – матрицант системы Колмогорова для этого же отрезка с матрицей $\hat{\Lambda}(t)$, полученной из $\Lambda(t)$ заменой нулями элементов из Λ_{12} , Λ_{21} с последующей коррекцией элементов λ_{ii} . Эта коррекция состоит в замене $\lambda_{ii}(t)$ величинами $\hat{\lambda}_{ii}(t) = \lambda_{ii}(t) + \Delta_i(t)$. Здесь

$$\Delta_i(t) = \sum_{j=m+1}^n \lambda_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \Delta_i(t) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}(t), \quad i = m+1, \dots, n.$$

Считаем, что процессы, описываемые матрицами $\hat{\Lambda}_{11}(t)$, $\hat{\Lambda}_{22}(t)$, удовлетворяют на $[s_0, t_0)$ условиям фокусировки.

Условие (3.37) будет выполняться, если убывание к нулю элементов блоков Λ_{12} , Λ_{21} будет достаточно быстрым (см. [65]). Матрица $\hat{\Lambda}(t)$ блочно-диагональная. Ее блоки $\hat{\Lambda}_{11}(t)$, $\hat{\Lambda}_{22}(t)$ являются инфинитезимальными матрицами. Соответствующие им процессы при $t \uparrow t_0$ фокусируют на векторы \vec{p}_1 и \vec{p}_2 .

Пусть матрица $\Lambda(t)$ распадающегося процесса удовлетворяет перечисленным выше условиям. Тогда для произвольного распределения вероятностей, заданного в точке $s \in [s_0, t_0)$, вероятности состояний $p_j(s, t)$ распадающегося процесса имеют пределы при $t \uparrow t_0$:

$$\lim_{t \uparrow t_0} p_j(s, t) = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.38)$$

Вектор \vec{p} с компонентами p_j имеет вид

$$\vec{p} = (\alpha \vec{p}_1, (1 - \alpha) \vec{p}_2). \quad (3.39)$$

Здесь $\alpha \in (0, 1)$, \vec{p}_1, \vec{p}_2 – векторы, на которые фокусируют при $t \uparrow t_0$ блоки $\hat{\Lambda}_{11}, \hat{\Lambda}_{22}$.

Если лишь один из диагональных блоков, для определенности, блок $\hat{\Lambda}_{11}$, удовлетворяет условиям фокусировки и условие (3.37) по-прежнему выполняется, то (3.38) будет иметь место лишь для $j = 1, \dots, m$. Равенство (3.39) сохраняется лишь частично: α и \vec{p}_1 те же, что и в (3.39), но \vec{p}_2 теперь не есть вектор, на который фокусирует блок $\hat{\Lambda}_{22}$.

Если каждый из блоков $\hat{\Lambda}_{11}, \hat{\Lambda}_{22}$ σ -фокусирует при $t \uparrow t_0$ на векторы распределений \vec{p}_1, \vec{p}_2 , то распадающийся процесс σ -фокусирует на $\vec{p} = (\alpha \vec{p}_1, (1 - \alpha) \vec{p}_2)$.

В перечисленных случаях скалярный множитель α в (3.39) зависит от начального распределения вероятностей, точки s , в которой оно задается, и быстроты убывания к нулю элементов блоков $\Lambda_{12}, \Lambda_{21}$.

Рассмотрим пример фокусировки для процесса, распадающегося на невзаимодействующие процессы. Инфинитезимальная матрица процесса имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2/(1-t) - 10(t-1)^4 & 2/(1-t) & 5(t-1)^4 & 5(t-1)^4 \\ 3/(1-t) & -3/(1-t) - 10(t-1)^4 & 5(t-1)^4 & 5(t-1)^4 \\ 5(t-1) & 5(t-1) & -2/(1-t) - 10(t-1) & 2/(1-t) \\ 5(t-1) & 5(t-1) & 2/(1-t) & -3/(1-t) - 10(t-1) \end{pmatrix}$$

Таким образом, точка фокусировки $t_0 = 1$ и момент распада совпадают. Результаты расчётов приведены при $s_0 = 0$ в таблице 3.8.

Таблица 3.8.

Сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям

t	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,551682	0,367788	0,048318	0,032212
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,551682	0,367788	0,048318	0,032212
0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000
1,000000	0,551134	0,367413	0,048866	0,032577
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000
1,000000	0,551134	0,367413	0,048866	0,032577

Результаты расчётов для того же процесса при $s_0 = 0,5$ приведены в таблице 3.9. Из приведенных данных видно, что при переносе точки задания начальных условий s_0 ближе к точке фокусировки, финальные распределения заметно изменяются.

Таблица 3.9.

Сходимость вероятностей состояний к финальным вероятностям

t	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
0,500000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,584468	0,389645	0,015532	0,010355
0,500000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,584468	0,389645	0,015532	0,010355
0,500000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000
1,000000	0,422980	0,281987	0,177020	0,118013
0,500000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000
1,000000	0,422980	0,281987	0,177020	0,118013

Компьютерный анализ σ – фокусировки был произведен в [38]. Поведение вероятностей $p_j(s_0, t)$ при $t \uparrow t_0$ (t_0 – точка σ -фокусировки) рассматривалось в зависимости от вектора начального распределения

вероятностей \vec{p}^{-0} , заданного при $t = s_0$. В [70] приведены значения верхних и нижних пределов $\overline{\lim}_{t \uparrow t_0} p_j(s_0, t)$, $\underline{\lim}_{t \uparrow t_0} p_j(s_0, t)$ для различных значений вектора \vec{p}^{-0} .

Множество всех этих значений выбиралось так, чтобы оно составляло достаточно плотную ε -сеть на поверхности Π , задаваемой условиями

$$p_i > 0, (i = 1, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Данные численного моделирования, полученные для матрицы

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \frac{-0,2}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} \\ \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{-0,3}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} \\ \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} & \frac{-0,2}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} \\ \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{-0,3}{(1-t)^{0,99}} \end{pmatrix},$$

приводить не будем. Отметим лишь, что они полностью согласуются с теоретическими выводами, приведенными в [38, 61]:

а) чем больше модули интегралов от возмущённых элементов инфинитезимальной матрицы, тем меньше величина σ , определяющая точность σ – фокусировки;

б) при $s_0 \rightarrow t_0$ σ возрастает; если разность $t_0 - s_0$ достаточно мала, то σ -фокусировка не имеет места.

Рассмотрим марковский процесс заданный инфинитезимальной матрицей, элементы которой имеют несовпадающие точки разрывов

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{4}}} & \frac{0,5}{(1-t)^{\frac{3}{4}}} & \frac{0,5}{(1-t)^{\frac{3}{4}}} \\ \frac{0,25}{(1-t+\delta_1)^{\frac{3}{4}}} & -\frac{0,5}{(1-t+\delta_1)^{\frac{3}{4}}} & -\frac{0,25}{(1-t+\delta_1)^{\frac{3}{4}}} \\ \frac{1}{(1-t+\delta_2)^{\frac{3}{4}}} & \frac{0,5}{(1-t+\delta_2)^{\frac{3}{4}}} & -\frac{1,5}{(1-t+\delta_2)^{\frac{3}{4}}} \end{bmatrix}.$$

Здесь во второй и третьей строках матрицы $\Lambda(t)$ ее элементы содержат добавки δ_1 и δ_2 . Эти добавки предполагаются малыми. Таким образом,

матрица $\Lambda(t)$ содержит три точки $t = 1, t = 1 + \delta_1, t = 1 + \delta_2$ ($\delta_1 \neq \delta_2$), в которых ее элементы имеют неинтегрируемые разрывы. Поэтому здесь не ясно, какая точка будет точкой σ -фокусировки (σ -фокусировка будет в том случае, если $\delta_1 = \delta_2 = 0$).

Если в рассматриваемой матрице положить $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и всюду заменить показатель $\frac{3}{4}$ на показатель $k > 1$, то $t_0 = 1$ будет точкой фокусировки.

Интересно выяснить, как выглядит динамика сходимости вероятностей состояний процесса и как происходит при этом их рассеяние с изменением величин δ_1, δ_2 . С процессами, элементы инфинитезимальных матриц которых имеют точки разрывов (интегрируемые или неинтегрируемые), вообще говоря, несовпадающие, приходится сталкиваться на практике. Часто приходится иметь дело с системами марковского типа, обладающими значительной пространственной протяженностью. Внешние факторы, воздействуя на такие процессы, возмущают различные их компоненты в различные моменты времени. Точнее, максимум возмущений, которые получают различные звенья возмущаемой системы, фиксируются в них в различные моменты времени. Но моменты времени, в которые максимумы возмущений достигают этих звеньев и есть точки разрывов соответствующих элементов матрицы $\Lambda(t)$. Отметим, что величины δ_1, δ_2 , вообще говоря, зависят от времени, поскольку различным положениям протяженной системы относительно источника возмущений отвечают разные промежутки времени, за которые возмущение, распространяясь от источника, достигает различных ее частей.

Численное моделирование процесса с «размытой» точкой фокусировки производилось при значениях δ_1, δ_2 , изменяющихся в промежутке значений от 0,1 до 10^{-15} . На временном промежутке, содержащем разрывы всех элементов инфинитезимальной матрицы, значения её элементов $\lambda_{ij}(t)$ подменялись постоянными Λ_{ij} . Эти постоянные равны максимальным значениям функций $\lambda_{ij}(t)$ вне указанного промежутка. Результаты численного моделирования описанной в этом подпункте ситуации приводить не будем в виду их громоздкости. Отметим лишь качественное различие полученных здесь данных с соответствующими данными для случая σ -фокусировки. В случае σ -фокусировки вероятности состояний $p_j(s_0, t)$ при $t \uparrow t_0$ (t_0 – точка σ -фокусировки) локализуются в малых окрестностях π_j – компонент предельного распределения. Поведение вероятностей $p_j(s_0, t)$ для ситуации этого подпункта несколько иное. Теперь величины $p_j(s_0, t)$ при различных значениях j претерпевают локализации в несовпадающие моменты времени.

3.7. Фокусировка распределений марковских процессов с континуальным множеством состояний.

Многие марковские процессы, с которыми приходится сталкиваться на практике, эволюционируют в реальной среде. Множество всех элементарных исходов вероятностного пространства, на основе которого строится такой процесс, часто является областью пространства одного или большего числа измерений. К таким процессам относятся, например, диффузионные процессы и процессы, исследуемые в экологии. Здесь для случая диффузии на прямой под состоянием процесса понимают отрезок или интервал прямой, а множество всех его состояний представляет семейство отрезков (интервалов) прямой. Часто для одномерного процесса диффузии под множеством всех его состояний понимают систему всех борелевских множеств прямой. Эта система множеств имеет достаточно сложное строение. Очевидно, что задача о введении множества всех состояний усложняется, если процесс диффузии происходит на плоскости или в пространстве большего числа измерений.

Понятно, что при рассмотрении процессов марковского типа, которые происходят в реальном пространстве, приходится сталкиваться с такой ситуацией, когда процесс эволюционирует в нескольких частях пространства, пересекающихся на множествах малой меры. При этом может возникнуть следующая задача: как будет протекать такой процесс, если в начальный момент времени возбуждена лишь одна из этих частей пространства? Очевидно, что эволюция процесса будет существенно зависеть от того, каковы меры указанных пересечений. В реальных задачах диффузии может возникнуть вопрос о том, как эволюционирует процесс, если меры этих пересечений стремятся к нулю. Исследование таких задач, вообще говоря, не может быть произведено в рамках теории марковских процессов с конечным или счетным числом состояний.

Оказывается, что при выполнении некоторых условий, которые приводятся ниже, исследование задач о фокусировке процессов с континуальным множеством состояний можно свести к рассмотрению процесса со счетным или даже конечным множеством состояний. Важным является то, что погрешность, возникающая при переходе от исходного процесса к процессу с конечным числом состояний, может быть сделана сколь угодно малой. В основе этого перехода лежит предположение о том, что множество всех элементарных исходов Ω содержит счетное всюду плотное множество. Это предположение, за редким исключением, выполняется для всех Ω .

Прежде чем переходить к строгому обоснованию схемы указанного перехода, введем некоторые определения, связанные с решением бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Бесконечной системой линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных называется система

$$\{P_{st}(x, B), s < t, (s, t) \in I \times I\}$$

Здесь $P_{st}(x, B) = P(s, x, t, B)$ – условная вероятность того, что в момент t система находится во множестве состояний из B , если в момент времени s система находилась в состоянии x . Для определенности будем полагать, что множество всех элементарных исходов $\Omega \subset R^n$ (это предположение можно ослабить) и что множество всех событий состоит из всех борелевских множеств $\{B\}$, $B \in \Omega$. Предполагается, что на множестве $\{B\}$ задана вероятностная мера P и условная вероятность удовлетворяет соотношению

$$P(\xi(t) \in A | \xi(s) \in B, \xi(s_1) \in B_1, \dots, \xi(s_n) \in B_n) = P(\xi(t) \in A | \xi(s) \in B), s_n < \dots < s_1 < s < t.$$

Таким образом, рассматриваемый нами процесс является обобщением неоднородного марковского процесса на случай континуального множества состояний. Ниже при изучении процессов фокусировки и σ -фокусировки будем, в основном, использовать счетную систему событий $\{B_j\}$, всюду плотную во множестве всех событий $\{B\}$. Это позволяет свести анализ процесса с континуальным множеством состояний к изучению марковского процесса со счетным числом состояний. Считаем, что $B_i \cap B_j = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Основным объектом анализа будет являться стохастическая матрица $P_{st} = \|P_{st}(B_i, B_j)\|$, $i, j = 1, 2, \dots$. Здесь $P_{st}(B_i, B_j)$ есть условная вероятность того, что исследуемая система в момент времени t попадает в состояние B_j , если в момент s она находилась в состоянии B_i . Эти вероятности легко вычисляются, если задано марковское семейство стохастических ядер $\{P_{st}(x, B), s < t, (s, t) \in I \times I\}$. Здесь I – интервал (полуинтервал, отрезок) временной прямой. Далее существенно используется техника получения неравенств, сходная с примененной в [61].

Пусть матрица $\|P_{st}(B_i, B_j)\|$, $s_0 < s < t < t_0$, удовлетворяет условиям:

1) существует такая последовательность индексов $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ и монотонная последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, $s_k \uparrow t_0$, $s_k < s_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(s_k, s_{k+1}) = \infty, \quad (3.43)$$

где $\delta(s_k, s_{k+1}) = \inf_i P_{s_k, s_{k+1}}(B_i, B_{j_k}) > 0$;

2) собственный вектор $\vec{p}(t)$ матрицы P_{st}^{τ} , отвечающий собственному числу равному единице, имеет предел при $t \uparrow t_0$:

$$\lim_{t \uparrow t_0} \vec{p}(t) = \vec{\pi}.$$

Если эти условия выполняются, то из теоремы 3.1 для любого начального распределения вероятностей $\bar{\pi}^0$, заданного в $s \in [s_0, t_0)$ следует

$$\lim_{t \uparrow t_0} \bar{p}(s, t) = \bar{\pi}. \quad (3.44)$$

Напомним, что в описанной ситуации точку t_0 будем называть точкой фокусировки. Условие (3.43) эквивалентно существованию неинтегрируемых особенностей в точке t_0 всех или некоторых элементов инфинитезимальной матрицы $\Lambda(t)$. Если же ряд (3.43) сходится, но сумма его достаточно велика, либо последовательность собственных векторов (3.44) не имеет предела, но ее верхний и нижний пределы отличаются незначительно при $t \uparrow t_0$, компоненты вектора $\bar{p}(s, t)$ будут локализоваться в σ -окрестностях компонент некоторого вектора $\bar{\pi}$. В такой ситуации точка t_0 называется точкой σ -фокусировки [61, 65].

Доказательство равенства (3.44) с некоторыми изменениями проводится по той же схеме, что и в [62, 147]. Эти изменения связаны с тем, что теперь число состояний $\{\xi \in B_i\}$ бесконечно (счетно), в то время, как доказательство, приведенное в [62, 147], годится лишь для конечного числа состояний. Покажем, что предложенный подход можно изменить так, чтобы он стал пригоден и для счетного числа состояний.

В [62, 147] исследование неоднородного марковского процесса с инфинитезимальной матрицей $\Lambda(s)$ было сведено к исследованию процесса с кусочно-постоянной инфинитезимальной матрицей $\tilde{\Lambda}(s)$ того же порядка, что и $\Lambda(s)$.

Такая аппроксимация исходного процесса процессом с надлежащим образом выбранной матрицей $\tilde{\Lambda}(s)$ позволила при доказательстве (3.44) использовать анализ, разработанный для однородных процессов. Кроме того, она давала возможность с любой степенью точности описать эволюцию исходного неоднородного процесса процессом с матрицей $\Lambda(s)$. Указанная схема позволила доказать следующее утверждение. Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и начальное распределение $\bar{\pi}^0$, заданное в любой точке $s \in [s_0, t_0)$, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{\pi}_0)$, что для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ и любого $j = 1, 2, \dots$

$$|p_j(s, t) - \pi_j| < \varepsilon.$$

Здесь π_j – компонента вектора $\bar{\pi}$ из (3.44). Модифицируем эту схему для процесса со счетным числом состояний.

Считаем, что инфинитезимальная матрица $\Lambda(s)$ исследуемого процесса $\xi(t)$ непрерывна на $[s_0, t_0)$ и что для всех s , таких, что $s_0 < s < t < t_0$, ее диагональные элементы удовлетворяют условию

$$|\lambda_{ii}(s)| \leq C(t) < \infty.$$

В этом случае исходный процесс $\xi(t)$ с матрицей $\Lambda(s)$, содержащей бесконечное число строк и столбцов, на любом отрезке $[s_0, t)$, $t < t_0$, можно с любой степенью точности аппроксимировать процессом $\hat{\xi}(t)$ с конечным числом состояний n . Инфинитезимальная матрица $\hat{\Lambda}(t)$ этого процесса есть левый верхний матричный блок матрицы $\Lambda(t)$, подвергнутый некоторой коррекции. Эта коррекция состоит в замене $\lambda_{ii}(t)$ величиной

$$\hat{\lambda}_{ii}(t) = \lambda_{ii}(t) + \Delta_i(t),$$

где $\Delta_i(t) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Известно, что такая аппроксимация возможна при соответствующем выборе n для любого однородного процесса с инфинитезимальной матрицей $\Lambda(s)$, являющейся значением матрицы-функции $\Lambda(s)$ при любом фиксированном $s \in [s_0, t) \subset [s_0, t_0)$. Отсюда нетрудно получить, что существует n , такое, что указанная выше аппроксимация исходного процесса $\xi(t)$ может быть реализована левым верхним диагональным блоком $\hat{\Lambda}(s)$ матрицы $\Lambda(s)$, имеющим для любого $s \in [s_0, t)$ одну и ту же размерность $n \times n$.

Очевидно, что выбор n , определяющий размерность матрицы $\hat{\Lambda}(s)$ зависит от точности аппроксимации исходного процесса с матрицей $\Lambda(s)$ процессом с матрицей $\hat{\Lambda}(s)$, содержащим n состояний.

Понятно, что с ростом n , вообще говоря, улучшается точность аппроксимации и что существует такая последовательность чисел $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$ ($n_m \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$), для которой аппроксимирующие процессы с числом состояний $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$, построенные по тому же правилу, что и процесс $\xi(t)$, при неограниченном росте n_m будут давать погрешность в аппроксимации, стремящуюся к нулю. Поскольку для каждого из аппроксимирующих процессов имеют место оценки, приведенные в [62], то они будут иметь место и для предельного процесса $\xi(t)$.

Отметим, что фокусировка и стабилизация марковского процесса могут быть реализованы за столь угодно малый промежуток времени путем сообщения инфинитезимальной матрице $\Lambda(t)$ сильных возмущений, выбранных специальным образом.

4. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НА ГРАФАХ

В этом разделе рассмотрены некоторые типы случайных блужданий на графах. Поскольку в приложениях приходится исследовать процессы блужданий на графах с изменяющимся числом вершин, в начале раздела поставлена задача о стабилизации распределений вероятностей для процессов с изменяющимся числом состояний. Приведены условия, при выполнении которых эта стабилизация имеет место. Далее изучены простейшие варианты случайных блужданий. Затем рассмотрена общая схема случайных блужданий на графах. При этом вводятся некоторые понятия (точки сброса, частичная стабилизация, зоны Саргасса), использование которых позволяет более полно описать особенности конкретного процесса блужданий. После этого с помощью специализированной программы, позволяющей моделировать процессы блужданий на графах различных видов, это моделирование реализуется для ряда конкретных графов. Процессы блужданий рассмотрены для графов, содержащих зоны частичной стабилизации и зоны Саргасса, графов с изменяющимся числом состояний и многослойных графов. Кроме того, рассмотрен процесс блужданий на парах графов, имеющих непустые пересечения.

При рассмотрении каждого конкретного случая в моделирующую программу вводятся те ограничения, которые накладываются на исследуемый процесс блужданий.

4.1. Процессы с изменяющимся числом состояний

При рассмотрении ряда прикладных задач приходится иметь дело с такими системами, эволюция которых может быть описана с помощью марковских процессов с изменяющимся числом состояний. При изучении таких процессов прежде всего возникает задача о их согласовании (стыковке). Она состоит в следующем. Пусть на временных промежутках $[s_0, s_1 - \delta]$, $[s_1 + \delta, s_2]$, $\delta > 0$, заданы инфинитезимальные матрицы $\Lambda_1(s)$, $\Lambda_2(s)$, определяющие процессы Π_1 , Π_2 с числом состояний n_1 и n_2 . Пусть, для определенности, $n_2 - n_1 = 1$. Предположим, что каждому состоянию процесса Π_1 поставлено в соответствие определенное состояние процесса Π_2 . Тогда процесс Π_2 содержит «лишнее» состояние E_0 – ему не соответствует ни одно состояние процесса Π_1 . При рассмотрении конкретных процессов (физических, биологических, экономических и др.), которые можно описать с помощью марковских процессов с переменным числом состояний, указанное соответствие обычно естественно определяется эволюцией процесса. В общем случае возникает вопрос: как следует определить инфинитезимальную матрицу Λ_{12} (матрицу согласования), непрерывную на $[s_1 - \delta, s_1 + \delta]$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned}\Lambda_{12}(s_1 - \delta) &= \Lambda_1(s_1 - \delta), \\ \Lambda_{12}(s_1 + \delta) &= \Lambda_2(s_1 + \delta),\end{aligned}\tag{4.1}$$

так, чтобы возникающий при этом на $[s_0, s_2]$ процесс Π являлся в каком-то смысле оптимальным (естественным) продолжением процесса $\Pi_1(t)$, $t \in [s_0, s_1 - \delta]$ на отрезок $[s_1 + \delta, s_2]$, на котором $\Pi = \Pi_2$. На $[s_1 - \delta, s_1 + \delta]$ процесс Π определяется матрицей Λ_{12} .

При рассмотрении конкретных процессов матрица Λ_{12} обычно является решением некоторой вариационной задачи. Так при рассмотрении экономических процессов эту матрицу часто ищут, исходя из ограничений, позволяющих минимизировать суммарные затраты на капиталовложения, максимизировать прибыль или обеспечить преимущественное развитие выделенных групп предприятий и пр. Рассмотрим две задачи о построении матрицы Λ_{12} .

Пусть распределение $\{p_j(s_0, t)\}$ процесса Π_1 , определяемое начальным распределением вероятностей $\{p_j(s_0)\}$, является по каким-то причинам наиболее предпочтительным по сравнению с остальными. Значит, в этом случае Λ_{12} следует строить так, чтобы с ее помощью преимущественно «пропускалось» распределение $\{p_j(s_0, t)\}$ и распределения близкие к нему в смысле близости их норм. Аналогично ставится задача отыскания Λ_{12} , если речь идет о преимущественном пропуске распределений $\{p_j(s_0, t)\}$, отвечающих некоторому множеству начальных распределений вероятностей $\{p_j(s_0)\}$. Под преимущественным пропуском некоторого множества распределений мы понимаем такую ситуацию, при которой вероятности реализации распределений из этого множества превосходят реализации вероятности реализации распределений, которые в него не входят.

При рассмотрении физических задач эволюция матрицы $\Lambda_{12}(t)$ обычно определяется процессом поглощения (или выделения) энергии. Мерой таких энергозатрат является некоторый функционал (часто квадратичный), зависящий от Λ_{12} . Если, например, этот функционал имеет вид $(\Lambda_{12}f, f)$ (символ (\cdot, \cdot) означает скалярное произведение), то отыскание Λ_{12} сводится к решению следующей вариационной задачи. Требуется найти матрицу Λ_{12} порядка $(n_1 + 1) \times (n_1 + 1)$, удовлетворяющую условиям (4.1) и условию

$$\int_{t_1 - \delta}^{t_1 + \delta} (\Lambda_{12}(s) \bar{p}_0(s_0, s), \bar{p}(s_0, s)) ds = \min$$

Здесь минимум находится по всем инфинитезимальным матрицам $(n_1 + 1) \times (n_1 + 1)$.

Рассмотрим задачу о стабилизации распределений процессов с изменяющимся числом состояний. Пусть $\Pi(t) (t \geq 0)$ – процесс с изменяющимся числом состояний, такой, что на каждом из непересекающихся отрезков

$$[s_k, t_k), k = 0, 1, \dots, s_0 = 0, t_k \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty), \quad (4.2)$$

число состояний процесса постоянно. Считаем, что процесс Π_k , совпадающий с $\Pi(t)$ на $[s_k, t_k)$ ($k = 0, 1, \dots$), является частью однородного процесса, имеющего стационарное распределение $\{\pi_{k,j}\}$. Пусть $\Lambda_{k,k+1}(t)$ – матрицы согласования процессов Π_k, Π_{k+1} . Из теоремы 1.14 следует, что матрицы $\Lambda_{k,k+1}(t)$ можно выбрать так, чтобы каждая из них фокусировала процесс $\Pi(t)$ (при изменении t на $[t_k, s_{k+1})$) на распределение $\{\pi_{k+1,j}\}$. Такой процесс $\Pi(t)$ обладает следующим свойством: каким бы ни было начальное распределение вероятностей $\{p_j(s_0)\}$, распределение вероятностей $\{p_j(s_0, t)\}$ процесса $\Pi(t)$ на промежутках $[s_{k+1}, t_{k+1})$ будет совпадать с соответствующим этому промежутку стационарным распределением $\{\pi_{k+1,j}\}$.

Матрицы $\Lambda_{k,k+1}(t)$ можно также выбрать так, чтобы распределения вероятностей $\{p_j(s_0, t)\}$ процесса $\Pi(t)$ на любом $[s_{k+1}, t_{k+1})$ удовлетворяли условиям

$$|p_j(s_0, t) - \pi_{k+1,j}| < \sigma, j = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$$

для любого начального распределения $\{p_j(s_0)\}$.

Если последовательность отрезков $[s_k, t_k)$ из (**) сгущается при $k \rightarrow \infty$ к точке $t^* < \infty$ и указанные выше предположения о процессе $\Pi(t)$ и фокусирующих возмущениях матриц $\Lambda_{k,k+1}(t)$ остаются в силе, то $\Pi(t)$ фокусирует (или σ -фокусирует) на распределения $\{\pi_{k+1,j}\}$ в точках s_k . Если дополнительно предположить, что

$$\{\pi_{k+1,j}\} \rightarrow \{\pi_j^*\} (k \rightarrow \infty),$$

то точка t^* является точкой фокусировки (σ -фокусировки) процесса $\Pi(t)$ на распределение $\{\pi_j^*\}$.

В настоящее время при рассмотрении многих конкретных процессов часто используют подход, основанный на теории марковских процессов. В ряде случаев решение задачи удастся получить при рассмотрении соответствующим образом выбранного процесса случайных блужданий на полупрямой или на графе.

4.2. Простейшие схемы случайных блужданий

1. Рассмотрим простейший вариант случайного блуждания по целочисленным точкам числовой прямой. Пусть частица переходит из точки $x=i$ в $x=i+1$ с вероятностью p_i ($0 < p_i < 1$) и с вероятностью $q_i = 1 - p_i$ попадает (возвращается) в точку $x=0$. Точки, в которые частица может возвращаться, далее будем называть точками "точками сброса". В рассматриваемом случае точка $x=0$ является точкой сброса. Здесь состояниями являются целочисленные точки прямой $x=0, 1, 2, \dots$; все состояния сообщающиеся.

Пусть в начальный момент времени частица находится в точке $x=0$. Вероятность цепочки переходов $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow \dots$ равна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_0 p_1 \dots p_n. \quad (4.3)$$

Если этот предел равен нулю, то состояние $x=0$ является возвратным (в этом случае и все остальные состояния возвратные). Если же предел (4.3) отличен от нуля, то все состояния невозвратны. В этом случае частица при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью 1 будет неограниченно смещаться вправо (стремиться к $+\infty$). Если состояние возвратно, то частица с вероятностью 1 будет бесконечное число раз возвращаться в каждое из состояний $x=0, 1, 2, \dots$. Среднее время возвращения в исходное состояние $x=0$ равно

$$T = (1 - p_0) + 2(1 - p_1)p_0 + \dots = 1 + p_0 + p_0 p_1 + \dots + p_0 p_1 \dots p_{n-1} + \dots \quad (4.4)$$

Если сумма (4.4) конечна и для всех i выполняется условие

$$q_i \geq \delta > 0, \quad (4.5)$$

то, [12, 44], существует единственное стационарное распределение $\{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$ и для любого начального распределения вероятностей $\{p_j^0\}_{j=0}^{\infty}$ ($p_j^0 = P(x=j, t=0)$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \pi_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Здесь $p_j(t)$ ($j=0, 1, 2, \dots$) – вероятность того, что частица находится в состоянии j в момент времени t . Нетрудно проверить, что

$$\pi_0 = T^{-1}, \pi_1 = p_0 T^{-1}, \dots, \pi_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1} T^{-1}. \quad (4.7)$$

Описанное случайное блуждание известно [123]. Приведем некоторые его модификации.

2. Рассмотрим случайное блуждание с изменяющимся числом состояний. Пусть при $t=0$ число состояний $x=i$, $i \leq n_0$, – конечно ($n_0 < \infty$).

Пусть, далее, в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots$ ($0 < t_1 < \dots < t_l < \dots$) число состояний процесса блужданий возрастает, принимая значения $n_1, n_2, \dots, n_l, \dots$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_l < \dots$). Пусть как и в рассмотренном выше варианте блужданий переход из $x = i$ в $x = i + 1$ происходит с вероятностью p_i , а сброс в нуль ($x = 0$) происходит с вероятностью $q_i = 1 - p_i$. Однако теперь при $t_k \leq t < t_{k+1}$ число состояний равно n_k и вероятности p_i, q_i следовало бы метить помимо индекса i еще и индексом k . Мы не будем этого делать для простоты записи. При $t \in [t_k, t_{k+1})$ начальное распределение вероятностей следует задавать в точках $x = 0, 1, 2, \dots, n_k$.

Пусть при $t \in [t_k, t_{k+1})$ имеет место (4.5). Тогда если бы случайные блуждания происходили при всех $t > t_k$ (т.е. неограниченно долго), то предельное равенство (4.6) выполнялось бы. Ограничение $t < t_{k+1}$ приводит к тому, что в (4.6) $t \in [t_k, t_{k+1})$, а за этот промежуток времени (4.4) может иметь место лишь для определенного класса начальных распределений вероятностей [192]. Если разность $t_{k+1} - t_k$ достаточно велика, то величины $p_j(t)$ из (4.4) при t близких к t_{k+1} будут локализованы в окрестностях предельных точек π_j :

$$\pi_j - \sigma < p_j(t) < \pi_j + \sigma.$$

Таким образом, при t близких к t_{k+1} имеет место σ -фокусировка.

3. Опишем случайное блуждание, отличающееся от рассмотренных выше числом точек сброса. В первых двух блужданиях точкой сброса являлось состояние $x = 0$. Теперь число таких точек будет больше единицы. Сначала рассмотрим блуждания с двумя точками сброса $x = 0$ и $x = a$. Вероятностная схема блужданий здесь такова. При $x \in [0, a]$ частица переходит из $x = i$ в $x = i + 1$ с вероятностью p_i и из $x = i$ в 0 с вероятностью $q_i = 1 - p_i$. Если же $x \in (a, \infty)$, то частица с вероятностью p_i переходит из $x = i$ в $x = i + 1$, с вероятностью q_{0i} – в 0 и с вероятностью q_{ai} – в точку a ($p_i + q_{0i} + q_{ai} = 1$). Если выполняется условие $q_{0i} \geq \delta > 0$, то данное случайное блуждание имеет стационарное распределение.

Если множество точек сброса $0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ равно n ($n > 2$), то вероятностная картина блужданий выглядит так. При $x \in [0, a_2]$ схема блужданий та же, что и для двух точек сброса. При $x \in [a_2, a_3]$ частица с вероятностью p_i переходит из $x = i$ в $x = i + 1$, с вероятностью q_{0i} – в точку 0 и с вероятностью $q_{a_j i}$ – в точку a_j ($j = 1, 2$); $p_i + q_{0i} + q_{a_1 i} + q_{a_2 i} = 1$. На полуинтервалах $(a_k, a_{k+1}]$ ($2 < k \leq n - 2$), (a_{n-1}, ∞) схемы случайного блуждания вводятся аналогично. Если число точек сброса бесконечно, то схема случайных блужданий определяется так же, как и для конечного их числа.

4. Случайные блуждания с конечным или бесконечным числом точек сброса и изменяющимся числом состояний вводятся так же как и для

блуждания 2. В моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots$ ($0 < t_1 < \dots < t_l < \dots$) число состояний процесса принимает значения $n_1, n_2, \dots, n_l, \dots$ ($t_l \rightarrow \infty, n_l \rightarrow \infty$). На каждом множестве состояний из $[0, n_l]$ при $0 \leq t < t_{l+1}$ процесс блужданий определяется так же, как и для случая постоянного (бесконечного) числа состояний. Как и в рассмотренных выше случаях условие существования стационарного распределения имеет вид

$$q_{0i} \geq \delta > 0. \quad (4.9)$$

4.3. Случайные блуждания на графах

Опишем процесс блужданий на графе, представляющем собой дерево. Считаем, что ребра графа имеют целочисленные длины, вообще говоря, различные. Занумеруем вершины ветвей дерева, его ребра и точки на ребрах, отстоящие от его концов на целочисленные расстояния. Случайные блуждания происходят по этим точкам и они рассматриваются как состояния определяемого нами процесса. Координаты состояний теперь, в отличие от блуждания вдоль прямой, имеют вид (n_1, n_2, n_3) . Здесь n_1 – номер вершины, n_2 – номер ребра, которое из этой вершины исходит, n_3 – целочисленная координата на ребре с номером n_2 . Существует много способов введения координат (n_1, n_2, n_3) . В ряде случаев вершины ветвей разумно нумеровать в зависимости от их расстояний до вершины дерева, а нумерация вершин ветвей, равноотстоящих от вершины дерева нумеровать, скажем, слева направо. Ребра, исходящие из одной и той же вершины, также разумно нумеровать слева направо, целочисленные координаты точек на ребрах должны совпадать с расстояниями от этих точек до начала ребра.

Пусть n_1, n_2, n_3 введены указанным способом. Перейдем к описанию процесса блужданий на дереве. Вершины всех ветвей считаем точками сброса. Рассмотрим множество состояний (n_1, n_2, n_3) на графе, для которых n_1, n_2 фиксированы, а n_3 принимает значения целочисленных координат на ребре n_2 . Пусть точка $(n_1, n_2, n_3 + 1)$ принадлежит ребру (n_1, n_2) (т.е. ребру с номером n_2 с началом в n_1). Тогда обозначим через p_{n_1, n_2, n_3, n_3+1} вероятность перехода из (n_1, n_2, n_3) в $(n_1, n_2, n_3 + 1)$. Если же точка (n_1, n_2, n_3) является концом ребра n_2 , который совпадает с вершиной m_1 , то следует задать вероятность перехода из (n_1, n_2, n_3) в $(m_1, m_2, 1)$. Здесь m_2 – номер ребра с началом в m_1 . Кроме того, следует задать вероятности перехода в точки сброса (вершины ветвей). Описанный способ нумерации состояний удобен и для случая, когда блуждания на графе является процессом с изменяющимся числом состояний. Такая нумерация удобна и тем, что дает возможность восстановить с её помощью топологию графа. В ряде случаев можно прибегать к такой нумерации, при которой координатой состояния является одно число. Но и в этом случае естественно нумеровать состояния, начиная от вершины дерева и производить

ее так, чтобы координаты состояний не убывали по мере удаления состояний от него.

Рассмотренные выше случайные блуждания можно изучать при неодинаковых длительностях переходов из состояния в состояние. Если при этом последовательность длительностей переходов образует расходящийся ряд, то при выполнении некоторых условий будет иметь место фокусировка или σ -фокусировка. Описанные случайные блуждания можно рассматривать и как дискретную цепь Маркова, порожденную марковским процессом с непрерывным временем. Этот процесс может быть и неоднородным с переменными длительностями переходов. Теперь при рассмотрении процесса блужданий на графе не предполагается, что ребра графа имеют целочисленные длины, а состояния (точки на ребрах) – целочисленные координаты. Сформулируем условия фокусировки для этого случая. При этом исследуемый процесс будем описывать его инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$. Рассмотренные варианты случайных блужданий содержат некоторые ограничения (за один шаг процесс переходит из исходного состояния в ближайшее к нему, все вершины ветвей дерева являются точками сброса). Они были введены, чтобы имела место преобладание с известными и хорошо изученными видами случайных блужданий. В случае непрерывного времени при исследовании процессов фокусировки и стабилизации от этих ограничений можно отказаться. Ниже состояния будем нумеровать одним индексом.

Пусть существует такая последовательность попарно непересекающихся интервалов

$$\{[s_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty}, \quad s_k < t_k < s_{k+1}, \quad s_k \uparrow t_0, \quad t_0 \leq \infty,$$

и такая последовательность индексов $j_k, k = 1, 2, \dots$ (j_k нумерует состояния), для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_i \left| \int_{s_k}^{t_k} \lambda_{ij_k}(s) ds \right| = \infty, \quad (4.10)$$

причем на множестве

$$[s_0, t_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [s_k, t_k)$$

норма матрицы $\Lambda(s)$ ограничена одной и той же константой.

Пусть, далее, $\Lambda(t)$ непрерывна на $[s_k, t_k)$ и существует предел

$$\lim_{t \uparrow t_0} \bar{p}(\tau_k) = \bar{p}, \quad (4.11)$$

где $\tau_k \in [s_k, t_k)$, $\vec{p}(\tau_k)$ – нулевой собственный вектор матрицы $\Lambda^*(\tau_k)$. Тогда для любого j и любого начального распределения вероятностей, заданного в точке $s \in [s_0, t_0)$

$$\lim_{t \uparrow t_0} p_j(s, t) = p_j.$$

Здесь p_j – j -я компонента вектора \vec{p} из (4.9).

Если ряд (4.10) сходится, но его сумма достаточно велика, то t_0 является точкой σ -фокусировки.

4.4. Фокусировка и σ -фокусировка распределений при случайных блужданиях на графах

Изучим явления фокусировки и σ -фокусировки для случайных блужданий на конкретном графе. Полученные результаты позволяют лучше уяснить многообразие встречающихся ситуаций. Рассмотрим граф Γ_1 (рис. 4.1), являющийся деревом. Процесс блужданий будем описывать с помощью некоторой цепи Маркова. Будем считать, что состояния этой цепи – вершины графа Γ_1 ; для каждой вершины с помощью программы, моделирующей процесс блужданий, задаются вероятности перехода во все соседние вершины и вероятности «сброса» (на рис. 4.1 точки сброса отмечены жирными кружками). Будем считать, что корень дерева (состояние 1) также является точкой сброса для любой другой вершины, т. е. $\forall i \ p_{i1} > 0$.

Зададим временную последовательность t_k , сходящуюся к точке t_0 , следующим образом:

$$t_k = t_0(1 - q^k).$$

Тогда

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = t_0 q^k (1 - q).$$

Предположим, что переходы из состояния в состояние возможны лишь в моменты времени t_k . Тогда процесс блужданий на графе будет описываться неоднородной цепью Маркова, т.к. длительности переходов из состояния в состояние различны.

Для расчетов в моделирующей процессы блужданий программе было выбрано $q = 0,9$ и $t_0 = 1$; процесс рассматривается на отрезке $[0, t_0)$.

Пусть в начальный момент времени блуждающая частица с вероятностью 1 находится в корне дерева, т.е. начальное распределение вероятностей p^0 имеет вид $p^0 = (1, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим динамику фокусировки для процесса блужданий на графе Γ_1 . Граф имеет 50 состояний, 8 из которых являются точками сброса. За момент наступления фокусировки примем момент времени, когда распределение вероятностей процесса с точностью 10^{-6} совпадает с финальным распределением.

С точностью до 10^{-6} финальное распределение для графа Γ_1 было достигнуто за 37 шагов. Рассмотрим стабилизацию по ветвям.

В ветви 1 быстрее всего стабилизировались вероятности состояний 12, 11 и 10 (соответственно за 17, 22 и 24 шага); а дольше всего – вероятности состояний 4, 7, 5, 13, 18 (первые два – за 37 и 31 шаг соответственно, а последние три – за 30 шагов).

В ветви 2 первыми стабилизировались состояния 21 (за два шага), 33 (за 18 шагов), 32 (за 19 шагов). Последними стабилизируются состояния 20 (за 31 шаг), 25 (за 28 шагов), 26 (за 27 шагов) и 28 (за 26 шагов).

В ветви 3 быстрее всего стабилизируются состояния 37, 38, 39, 40 (за 0 шагов). Быстрая стабилизация в них объясняется тем, что вероятности попадания в эти состояния очень малы. Дольше всего стабилизируются состояния 35 (за 36 шагов), 42 (за 35 шагов), 48 (за 32 шага).

В результате проведения численных экспериментов для различных начальных распределений p^0 , была установлена независимость финального распределения от p^0 . Кроме того, было выяснено, что чем ближе точка сброса к корню дерева, тем дольше в ней происходит стабилизация по сравнению с состояниями, удалёнными от корня дерева.

Для графа Γ_1 введем «перескоки» с ветви на ветвь, т.е. переходы между состояниями, принадлежащими соседним ветвям. Перескоки допускаются между состояниями 12 и 15, 12 и 30, 21 и 18, 17 и 24, 4 и 21, 34 и 38, 42 и 50, 20 и 35 (на рис. 4.1 эти перескоки изображены пунктиром). Динамика фокусировки процесса блужданий с перескоками была рассмотрена в [44]. Выход на финальное распределение с точностью до 10^{-6} происходит за 40 шагов. Анализ скорости сходимости по ветвям приводит к выводу, что внесение в исходный граф Γ_1 перескоков лишь незначительно ухудшает сходимость.

Исследуем процесс стабилизации на графе Γ_1 для случая, когда переходные вероятности получают возмущения. На каждом шаге будем добавлять к элементам матрицы $P(s, t) = \|p_{ij}(s, t)\|$ возмущения $\varepsilon_{ij}^{(k)}$. Тогда в момент времени t_k матрица перехода за один шаг будет иметь вид

$$\tilde{P}(t_k, t_{k+1}) = P(t_k, t_{k+1}) + \varepsilon^{(k)}.$$

Здесь $\tilde{P}(s, t) = \|\tilde{p}_{ij}(s, t)\|$ – возмущенная матрица; $\varepsilon^{(k)} = \|\varepsilon_{ij}^{(k)}\|$ – матрица возмущений на k -м шаге.

Возмущения $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, которые были введены в моделирующую программу, выбирались следующим образом. Моделировалась последовательность $\{b_k\}$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

Пусть

$$\alpha^{(k)} = \min\{p_{ij}(t_k, t_{k+1}), 1 - p_{ij}(t_k, t_{k+1}), b_k\}.$$

Если $p_{ij}(t_k, t_{k+1}) = 0$, то и $\varepsilon_{ij}^{(k)} = 0$; если же $p_{ij}(t_k, t_{k+1}) > 0$, то $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – случайное число, равномерное распределение на $[-\alpha^{(k)}, \alpha^{(k)}]$. Кроме того, требовалось, чтобы для всех i

$$\sum_j \varepsilon_{ij}^{(k)} = 0.$$

Результаты моделирования описанного выше процесса случайных блужданий таковы. Для всех состояний финальное распределение с точностью до 10^{-6} было достигнуто за 326 шагов. Приведем данные о блужданиях по каждой из ветвей.

В ветви 1 быстрее всего стабилизация достигается в состояниях 12, 11, 9, 10, 15 (соответственно за 24, 36, 49, 52 и 64 шага), а дольше всего – в состояниях 2 (за 290 шагов), 4 (за 278 шагов), 3 (за 184 шага), 13 (за 173 шага).

В ветви 2 первыми стабилизировались состояния 33 (за 8 шагов), 30, 32 (за 12 шагов), а последними – состояния 20 (за 225 шагов) и 19 (за 224 шага).

В ветви 3 быстрее всего стабилизировались состояния 37, 38, 39, 40 (на первом шаге), 44 (за 33 шага) и 46 (за 34 шага), а дольше всего – состояние 35 (за 299 шагов). Последним из состояний стабилизировался корень дерева Γ_1 (за 326 шагов).

Таким образом, случайные возмущения существенно замедляют процесс сходимости. Дольше всего фокусировка происходит в точках сброса (почти в два раза медленнее, чем в остальных состояниях).

4.5. Частичная фокусировка

Исследуем частичную фокусировку на графах. Под частичной фокусировкой в какой-либо фиксированной ветви будем понимать наступление стабилизации в во всех ее вершинах.

Для каждой точки сброса i введем величину δ_i как минимальную вероятность сброса в эту точку. Для исследования процесса частичной фокусировки возьмем граф Γ_2 , изображенный на рис. 4.2. Он имеет 55 состояний, из которых 8 являются точками сброса, стохастическая матрица этого процесса была промоделирована с помощью специальной программы.

На рис. 4.2 рядом с каждой из точек сброса приведена величина δ_i . Варьируя величинами δ_i , проследим за фокусировками в каждой из ветвей.

С помощью моделирующей программы были получены следующие данные. Выход на предельный вектор p^* (финальное распределение) с точностью до 10^{-6} произошел за 378 шагов. В среднем по ветвям фокусировки произошла: в ветви 1 за 314 шагов, в ветви 2 за 267 шагов, в ветви 3 за 296 шагов, в ветви 4 за 273 шага. Дольше всего стабилизировалось состояние 3, минимальная вероятность сброса в которое максимальна:

$$\delta_3 = \max\{\delta_1, \delta_3, \delta_{14}, \delta_{16}, \delta_{28}, \delta_{35}, \delta_{41}, \delta_{46}\}.$$

Изменение минимальной вероятности сброса в вершине 28, увеличение δ_{28} до 0,95 приводит к тому, что фокусировка происходит теперь за 580 шагов. При рассмотрении фокусировки по состояниям видно, что дольше всего стабилизация происходит в состоянии 28. В среднем же по ветвям фокусировка происходит: в ветви 1 за 497 шагов, в ветви 2 за 382 шага, в ветви 3 за 365 шагов, в ветви 4 за 398 шагов. Как видно, первой стабилизировалась ветвь, содержащая вершину 28.

Вернемся к исходному графу Γ_2 (рис. 4.2) и увеличим δ_3 до 0,82, а δ_{28} уменьшим до 0,15. Теперь фокусировка происходит за 737 шагов. При рассмотрении фокусировки по состояниям видно, что дольше всего фокусировка происходит в состоянии 3. В среднем же фокусировка по ветвям происходит: в ветви 1 за 429 шагов; в ветви 2 за 507 шагов; в ветви 3 за 493 шага; в ветви 4 за 512 шагов. Таким образом, увеличение минимальной вероятности сброса в какой-либо точке сброса приводит к улучшению сходимости (по сравнению с другими ветвями) в ветви, содержащей эту точку сброса. Значит, варьируя величинами δ_i можно управлять процессом сходимости к предельному распределению.

4.6. Случайные блуждания на графах с изменяющимся числом состояний

Рассмотрим несколько схем случайных блужданий на графах с изменяющимся числом состояний. При этом по-прежнему используется моделирующая программа процессов случайных блужданий. Для каждой из рассматриваемых ниже схем будут справедливы следующие предположения. Будем считать, что в начальный момент времени процесс с вероятностью 1 находится в состоянии с номером 1, т.е.

$$p^{(0)} = (1, 0, \dots, 0).$$

Опишем процесс роста начального графа Γ_1 (рис. 4.3 а) до графа Γ_4 (рис. 4.3 г). Пусть в начальный момент времени имеется граф Γ_1 . В результате моделирования процесса блужданий получаем результирующий вектор p_1 .

Затем дополняем вектор p_1 нулевыми координатами и берем его в качестве начального распределения после роста графа (число состояний изменяется в момент наступления σ -фокусировки). Далее описанная процедура повторяется для каждого из графов $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

Перейдем к рассмотрению различных схем блужданий.

1. Пусть блуждание частицы на графе, представляющем дерево, описывается однородной цепью Маркова. Будем считать, что корень дерева есть точка сброса. Пусть, далее, в некоторые, не обязательно определенные заранее, моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$ число состояний процесса изменяется, принимая значения $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ (т. е. изменяется число вершин и ребер графа, на котором происходит процесс блужданий). Способ передвижения частицы остается прежним: из любой вершины графа частица может перейти в любое из соседних состояний, остаться на месте либо с ненулевой вероятностью “сброситься” в корень дерева. В начальный момент времени происходит инициация процесса блужданий: задается первоначальный вид графа, начальное распределение вероятностей, вероятности переходов. За моменты времени τ_k ($k = 1, 2, \dots$), в которые происходит смена топологической структуры графа (изменение числа состояний, набора ребер) примем те значения времени, когда для графа Γ_k ($k = 1, 2, \dots$) начинается процесс σ -фокусировки.

На рис. 4.3 приведен рассматриваемый пример трехэтапной эволюции системы. Жирным шрифтом выделены те вершины и ребра, которые при смене в момент времени τ_k числа состояний остались прежними; рядом с каждым ребром графов $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ зафиксирован момент τ_k , в который данное ребро появилось (ребра исходного графа Γ_1 не помечены).

Далее исследуется процесс блужданий – на каждом промежутке $[s_0, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), [\tau_2, \tau_3), [\tau_3, t_0)$. Приведены экспериментально полученные значения векторов распределения в моменты времени $t \in [s_0, \tau_k)$. Здесь s_0 – начальный момент времени; $\tau_k, k = 1, 2, 3$, – моменты роста рассматриваемого графа.

В качестве моментов роста τ_k принималось время наступления σ -фокусировки в каждом из графов $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, т. е. такое τ_k , что для любого $\tau > \tau_k$

$$\max_{1 \leq i \leq n_k} |p_i(\tau_{k-1}) - p_i(\tau_k)| < \sigma.$$

Полученное распределение вероятностей $p(\tau_k)$, дополненное нулями, поступает на вход следующего процесса. При вычислениях было выбрано $\sigma = 10^{-7}$.

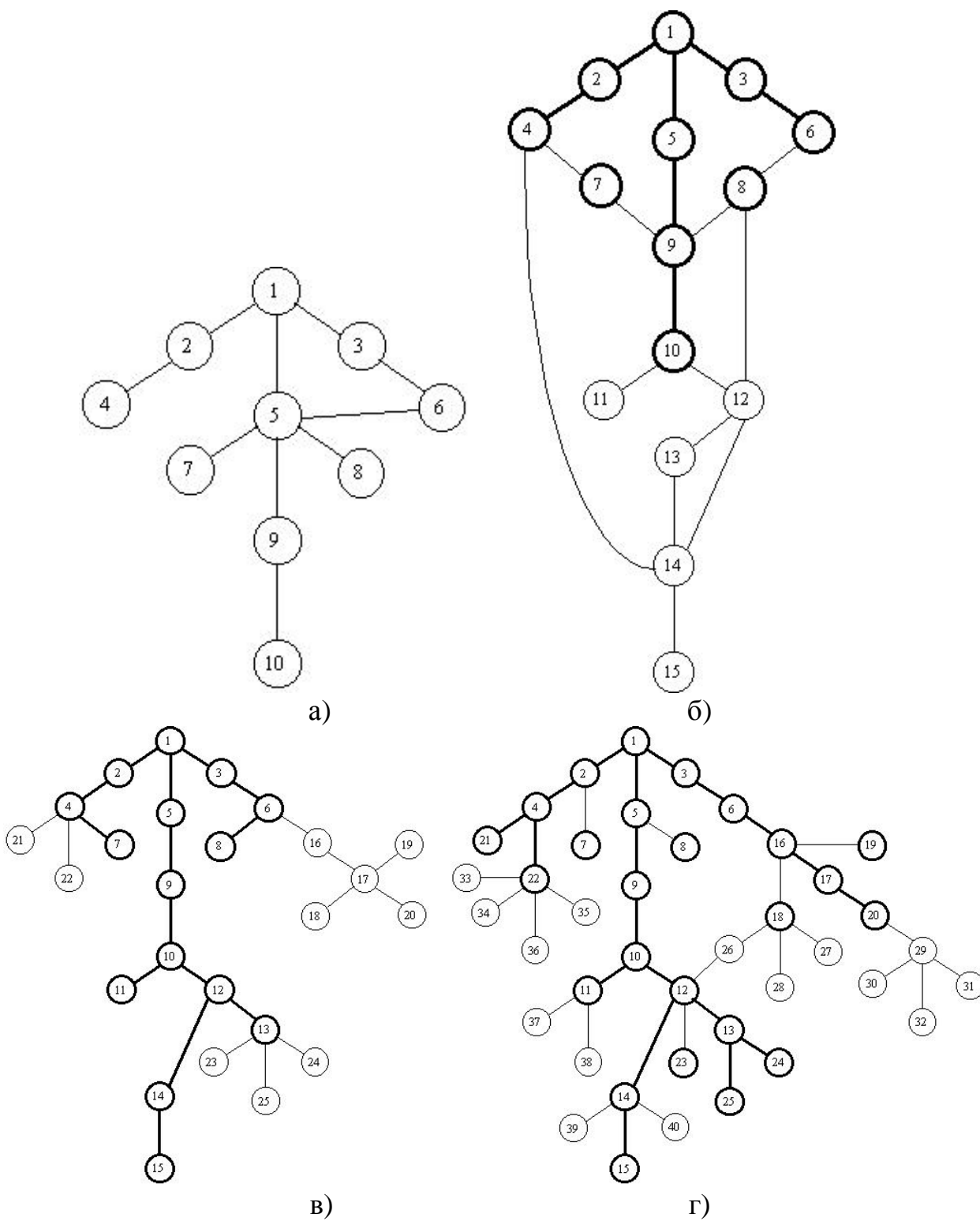


Рис. 4.3. Графы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$

Проанализируем полученные результаты. Переход от графа Γ_1 к графу Γ_2 произошел через 51 шаг. Стабилизация с точностью до 7 знака произошла примерно через 40 шагов в состояниях 2 и 10. Наименьшей скоростью сходимости обладали состояния 9 и 6 (наблюдались колебания около предельного значения и вектор распределения вероятностей с точностью до 7

знаков установился к 48-му шагу). Переход от графа Γ_2 к графу Γ_3 был осуществлен через 36 шагов. Частичная фокусировка наблюдалась уже на 27-м шаге. Максимальная скорость сходимости была отмечена для состояний 1, 2, 3, 5, 10; наиболее долго устанавливались вероятности состояний 12, 14 и 15. Переход от графа Γ_3 к графу Γ_4 произошел на 109-м шаге, при этом на графе Γ_3 наиболее долго стабилизировались состояния 18 и 21. Фокусировка на графе Γ_4 проходила в течение последующих 88 шагов. Процесс стабилизации частично завершился уже через 72 шага на состояния 1, 6, 8, 30, 31, 33; минимальная скорость сходимости имела место для состояний 2, 7, 16, 17, 18, 22, 34.

Отметим, что при одинаковой разреженности матриц переходных вероятностей, фокусировка на графе Γ_2 , имеющем 15 состояний, происходит быстрее, чем на графе Γ_1 , имеющем 10 состояний. Это же явление наблюдалось и для графов Γ_4 и Γ_3 . Как видно, графы Γ_2 и Γ_4 имеют замыкания (пути, по которым можно вернуться в исходное состояние). Для графа Γ_2 – это 1-3-8-9-5-1, а для графа Γ_4 – это 1-3-6-16-18-26-12-10-9-5-1. Эти замыкания объясняют более высокую скорость сходимости, чем в ситуациях без замыканий.

2. Рассмотрим теперь неоднородный случай. Отличие от однородного случая состоит в том, что вероятность перехода за один шаг из состояния i в состояние j зависит от момента времени, в который этот переход происходит. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$, как и в пункте 1, – моменты роста исследуемого графа. В неоднородном случае для каждого графа Γ_k , $k = 1, 2, \dots$, моменты роста определяются из условия

$$\tau_k = \min(\forall t', t'' : |p_j(\tau_{k-1}, t') - p_j(\tau_{k-1}, t'')| < 2\sigma, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$$

где σ – заданное положительное число (выбрано $\sigma = 10^{-6}$).

Пусть на каждом временном интервале $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ матрица переходных вероятностей P_k графа Γ_k , полученная с помощью моделирующей программы, на каждом шаге возмущается следующим образом: к каждому элементу $p_{ij}^{(k)}$ матрицы P_k добавляется некоторое возмущение $\delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l)$, при этом возмущения удовлетворяют условиям

а) при любом i

$$\sum_{j=1}^{n_k} \delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l) = 0;$$

б) равномерно по всем i и j с ростом t_l

$$\delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l) \rightarrow 0.$$

Таким образом, на каждом интервале $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ матрица вероятностей перехода в момент времени $t_l \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$ имеет вид

$$\tilde{P}(t_{l-1}, t_l) = P_k + \delta P(t_{l-1}, t_l).$$

Сравним полученные в пункте 2 результаты с результатами из пункта 1. Как видно, для однородного случая сходимость к предельному распределению была более быстрой. Замедление сходимости для неоднородного случая объясняется разрушающим действием на процесс возмущающей матрицы.

Проанализируем результаты пункта 2, полученные с помощью моделирующей программы. Процесс стабилизации на графе Γ_1 занял 372 шага. Максимальная скорость сходимости наблюдалась в состояниях 6, 9 и 10, а минимальная – в состояниях 1 и 5. Перед развитием графа Γ_2 до графа Γ_3 было произведено 120 шагов; в некоторых состояниях была замечена высокая скорость стабилизации (состояния 2, 7 и 11); практически во всех остальных состояниях стабилизация произошла на последних двух-трех шагах. От графа Γ_3 к графу Γ_4 перешли через 599 шагов. Наиболее быстро (к 545-му шагу) стабилизировались состояния 3, 13-15, 23-25; минимальная скорость сходимости наблюдалась в состояниях 11, 17 и 22. Для графа Γ_4 σ -фокусировка наступила за 521 шаг. Наиболее быстро сошлись к предельному распределению вероятности состояний 2, 13, 20, 21, 23, 24, 29-32, 36, 38-40; а наиболее медленно – вероятности состояний 1, 4, 5, 12 и 17. Как можно заметить, здесь наблюдается та же закономерность, что и в п. 1 (зависимость скорости сходимости от наличия замыканий (циклов) в графах Γ_2 и Γ_4).

3. Рассмотрим, как и в п.2, неоднородные случайные блуждания, однако теперь возмущения будем добавлять в соответствии со схемой Бернулли. Это означает, что на каждом шаге с вероятностью p стохастическая матрица испытывает малые возмущения, а с вероятностью $q = 1 - p$ эти возмущения отсутствуют. Расчеты приведены для $p = 0,3$.

Ниже приведены результаты реализации этой схемы для графов $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ (рис. 4.3). После реализации моделирующей программы было замечено следующее: при достаточно большом числе шагов при приближении к точке фокусировки t_0 скорость сходимости не зависит от вероятности p возмущения матрицы переходных вероятностей. Это объясняется тем, что стохастическая матрица процесса возмущена лишь в ряде случаев, а так же тем, что при приближении t_l к t_0 возмущения $\delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l)$ убывают.

Исследуя зависимость скорости сходимости от величины p , было установлено, что при уменьшении параметра p наблюдалось резкое увеличение скорости сходимости, а при стремлении параметра p к 1 скорость сходимости была медленной, почти такой же, как в п. 2. Опишем более подробно процесс стабилизации. Переход от графа Γ_1 к графу Γ_2 был осуществлен через 36 шагов. Наибольшей скоростью сходимости обладали

состояния 2 и 3; а наименьшей – состояния 1, 4, 8 и 10. Процесс стабилизации на графе Γ_2 занял 26 шагов, причем частичная фокусировка наблюдалась уже на 15-м шаге (состояния 2, 3, 5). Последними установились вероятности состояний 10, 12, 14. Переход от графа Γ_3 к Γ_4 произошел через 76 шагов. Максимальная скорость сходимости была в состояниях 2, 3, 9, 11 и 23; а минимальная – в состояниях 4, 5, 8 и 25. На графе Γ_4 σ -фокусировка была достигнута за 104 шага.

Отметим, что реализуемая схема, когда на вход “разросшегося” графа Γ_{k+1} подается дополненное нулями предельное распределение (с точностью до σ) для графа Γ_k , дает максимальную скорость сходимости. Это объясняется тем, что граф Γ_{k+1} “стартует” с распределением, являющимся уже в некотором смысле приближением к предельному распределению всего процесса.

Было также замечено, что наименьшую скорость сходимости давали, как правило, вероятности вновь возникших состояний.

4.7. Случайные блуждания на графах, имеющих саргассовы зоны

Под саргассовой зоной будем понимать подмножество S вершин графа, в каком-то смысле изолированных от всех остальных его вершин. Это означает, что вероятность перехода в зону достаточно мала, а вероятность выхода из нее такого же порядка, что и вероятность входа в зону, или на несколько порядков меньше. Пусть p_S – вероятность перехода в зону S , а δ_{Si} – вероятность выхода из состояния i саргассовой зоны (δ_{Si} определяется как сумма вероятностей сброса из вершины $i \in S$ в узлы графа, находящиеся на пути от корня к саргассовой зоне), $\delta_S = \sum_{i \in S} \delta_{Si}$ – вероятность выхода из саргассовой зоны.

Для исследования свойств сходимости введем следующие величины.

Пусть δ_j – минимальная вероятность сброса в узел j :

$$\delta_j = \min_{i \in M} p_{ij},$$

где M – множество вершин графа, принадлежащих ответвлениям узла j .

Пусть $\delta = \min_i p_{i1}$ – минимальная вероятность сброса в состояния 1 (корень дерева).

Мерой стабилизации или скоростью сходимости в момент времени t_k назовем величину

$$V_k = \sum_i V_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $V_{ki} = |p_i(t_k) - p_i(t_{k-1})|$ – скорость сходимости вероятности i -го состояния в момент времени t_k . Величина V_k характеризует изменение вектора распределения вероятностей на отрезке $[t_{k-1}, t_k)$.

Средней скоростью сходимости в момент времени t_k назовем величину

$$\langle V_k \rangle = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_i.$$

Оценкой сходимости в момент времени t_k назовем величину

$$R_k = \sum_i R_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $R_{ki} = |p_i^* - p_i(t_k)|$ – оценка сходимости вероятности i -того состояния в момент времени t_k . Величина R_k показывает насколько распределение вероятностей в момент времени t_k отличается от предельного распределения p^* .

Исследуем процесс стабилизации в системе с саргассовой зоной. Для исследования был выбран граф Γ_1 , изображенный на рис. 4.4 а); саргассова зона здесь обведена пунктирной линией. Она состоит из 6 вершин графа:

$$S = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}.$$

Её возникновение было промоделировано с помощью программы, имитирующей процессы случайных блужданий на графах.

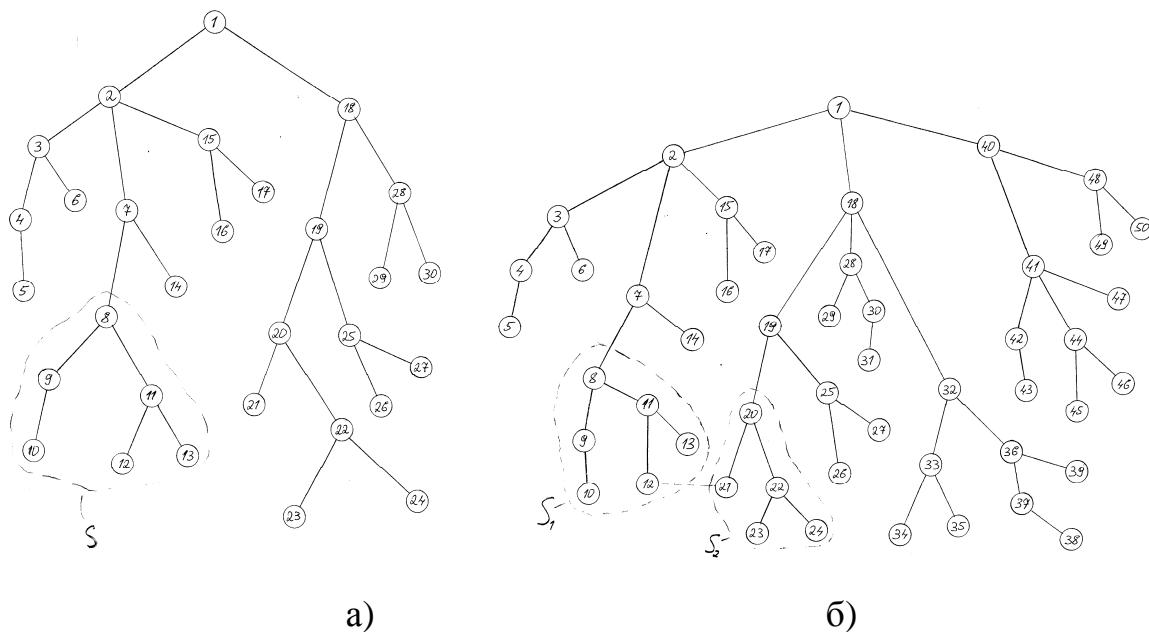


Рис. 4.4. Графы Γ_1 (а) и Γ_2 (б), имеющие саргассовы зоны

Саргассова зона имеет следующие характеристики: вероятность попадания в зону $p_s = 0,001$, вероятность выхода из нее $\delta_s = 0,0001$. В дальнейшем величину δ_s будем называть степенью изоляции саргассовой зоны S .

Приведём результаты моделирования процесса для графа Γ_1 (всего было произведено 10000 шагов).

Сначала процесс стремительно развивался, однако после 10-го шага наблюдалось значительное замедление и далее величина меры стабилизации, достигнув значения $V_{15} \approx 0,00022$, равномерно убывала до $V_{10000} \approx 0,000026$. При этом оценка сходимости R_k изменялась от $R_{15} \approx 0,76$ до $R_{10000} \approx 0,15$. Это говорит о том, что за один шаг вероятности состояний изменяются очень мало, в то время, как «расстояние» до предельного распределения ещё велико. Таким образом, мы имеем дело с медленно развивающимся процессом.

Опишем зависимость стабилизации от степени изоляции саргассовой зоны. Приведём характеристики стабилизации на 100-м шаге для $\delta_s^{(1)} = 0,001$, $\delta_s^{(2)} = 0,0001$, $\delta_s^{(3)} = 0,00001$ и $p_s = 0,001$. Во всех трех случаях величины V_k и $\langle V_k \rangle$ совпадают с точностью до 10^{-6} , однако оценки R_k сильно отличаются: $R_k^{(1)} = 0,10$, $R_k^{(2)} = 0,75$, $R_k^{(3)} = 1,71$. Таким образом, чем выше степень изоляции саргассовой зоны, тем дольше происходит сходимость к предельному распределению.

Приведём зависимость стабилизации от начального распределения для процесса с $p_s = 0,0001$, $\delta_s = 0,0001$. Результаты моделирования показывают, что если система в начальный момент времени находится в одном из состояний саргассовой зоны, то процесс сходимости протекает в 1,5-2 раза быстрее, чем для процесса, находящегося в начальный момент времени с вероятностью 1 в корне дерева.

Приведём результаты моделирования для процесса стабилизации при периодических включениях и выключениях механизма изоляции саргассовой зоны.

В начальный момент времени система с вероятностью 1 находится в корне дерева Γ_1 (состояние 1). В цепи Маркова без саргассовой зоны процесс стабилизации оборвался уже на 21-м шаге при $V_{21} \approx 0,0001$, при этом вероятности состояний были очень близки к своим предельным значениям ($R_{21} \approx 0,0005$). Затем включалась изоляция саргассовой зоны S и стабилизация доводилась до той же оценки 0,0001 за 1122 шага, однако расстояние до предельного значения было очень большим: $R_{1122} \approx 0,619$. Подобным образом две цепи Маркова сменяли друг друга несколько раз. Было замечено, что в отличие от системы без изоляции саргассовой зоны S сходимость сильно замедлялась, так как в период действия изоляции зоны S вектор распределения «не успевал» приблизиться к предельному значению.

Перейдем к рассмотрению неоднородного случая. Пусть процесс задан на временном отрезке $[s_0, t_0)$. Пусть, далее, $t_k, k = 1, 2, \dots$, – последовательность, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0.$$

Реализуем на $[s_0, t_0)$ схему поэтапного усиления изоляции саргассовой зоны.

Пусть P_1 – стохастическая матрица для графа Γ_1 без саргассовой зоны, а P_2 – стохастическая матрица для графа Γ_1 при наличии саргассовой зоны S (рис. 4.4 а)). Матрицы P_1, P_2 были промоделированы с помощью программы. В каждый момент времени t_k матрицу перехода за один шаг для неоднородного процесса определим так

$$P(t_k) = r_k P_1 + (1 - r_k) P_2, \quad (4.12)$$

где $0 \leq r_k \leq 1, r_k \rightarrow 0$ при $t_k \uparrow t_0$. Таким образом, при $t_k \uparrow t_0, P(t_k) \rightarrow P_2$.

Приведём результате о стабилизации при постепенном включении изоляции саргассовой зоны. Было проведено 2000 шагов. Вначале процесс сходимости протекал довольно быстро. Дальнейшее замедление сходимости вызывается снижением влияния возмущения (слагаемого $r_k P_1$ в (4.12)) на матрицу P_2 , что приводит к возрастанию влияния саргассовой зоны.

Приведём результаты процесса стабилизации при случайных возмущениях, моделируемых по формуле

$$P(t_k) = c_k P_1 + (1 - c_k) P_2,$$

где $c_k = r_k \xi_k, k = 1, 2, \dots$. Здесь P_1, P_2, r_k те же, что и в (4.10), а ξ_k – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Как видно, и в этом случае влияние саргассовой зоны сильно замедляет процесс сходимости.

Изучим процесс взаимодействия двух саргассовых зон. Для этого рассмотрим граф Γ_2 (рис. 4.4 б)), имеющий две саргассовы зоны S_1 и S_2 (стохастическая матрица была промоделирована). Саргассовы зоны заданы следующими характеристиками:

для зоны S_1 $p_{S_1} = 0,0001, \delta_{S_1} = 0,0001$;

для зоны S_2 $p_{S_2} = 0,00001, \delta_{S_2} = 0,00001$.

Опишем предельные распределения для различных связей между зонами S_1 и S_2 (односторонняя и двусторонняя). Установлено, что возникновение двусторонней связи при одинаковых вероятностях перехода из S_1 в S_2 и из S_2 в S_1 практически не изменяет характер сходимости. Наличие же односторонней связи (например, возможен лишь переход из S_1 в S_2) вызывает

перераспределение вероятностей: повышаются вероятности состояний зоны S_2 и, соответственно, понижаются вероятности состояний, не принадлежащих зоне S_2 , причем вероятности состояний саргассовой зоны S_1 уменьшаются на несколько порядков.

4.8. Многослойные графы

При исследовании производственных процессов на предприятиях, изготавливающих изделия, содержащие большое количество разнородных элементов и комплектующих изделий, различные его цеха и звенья обладают с точки зрения технологических циклов определенной автономией. Вместе с тем эти подразделения предприятия связаны друг с другом воедино общим для них производством выпускаемой продукции. Эти связи в определенные промежутки времени могут проявляться достаточно жёстко. Работу отдельного цеха (совокупность всех его производственных связей) удобно представлять в виде графа. Часть этих связей описывает внутрицеховые производственные связи и циклы. Часть же из них описывает связи между отдельными цехами. Объединение этих графов по всем цехам с учетом связей между цехами обычно образует достаточно сложный граф, который мы будем называть многослойным – каждый отдельный слой отвечает определенному цеху. В этом подразделе изучаются вопросы о стабилизации производственных процессов многослойных графов.

Опишем схему блужданий для многослойных графов. Пусть имеется некоторый граф, состоящий из двух подграфов: $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, причем Γ_1 и Γ_2 представляют собой деревья с n_1 и n_2 вершинами соответственно. Обозначим множество состояний каждого из подграфов Γ_i через N_i . Пусть $N = N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$. Будем считать, что множество N содержит все точки сброса, а также, быть может, и некоторые другие вершины. Таким образом, точки сброса для обоих подграфов Γ_1 и Γ_2 должны быть “общими”. Как и прежде, будем считать, что из любой вершины графа частица может перейти в любое из соседних состояний, остаться на месте либо с ненулевой вероятностью “сброситься” в корень дерева. В соответствии с указанной схемой случайных блужданий частицы, каждому из подграфов Γ_i с помощью программы, имитирующей процесс блужданий, поставим в соответствие матрицу вероятностей перехода P_k и начальную матрицу возмущений. Процесс будем предполагать неоднородным. В отличие от однородного случая, вероятность перехода за один шаг из состояния k в состояние j на графе Γ_i зависит от момента времени, в который этот переход происходит. Для этого на каждом шаге к стохастической матрице P_k , $k = 1, 2$, будем добавлять возмущения следующим образом. К каждому элементу $p_{ij}^{[k]}$ матрицы P_k добавляется в момент времени t некоторое возмущение $\delta p_{ij}^{[k]}(t)$. Возмущения удовлетворяют условиям

а) при любом i

$$\sum_{j=1}^{n_k} \delta p_{ij}^{[k]}(t) = 0, \quad k = 1, 2;$$

б) равномерно по всем i и j с ростом t

$$\delta p_{ij}^{[k]}(t) \rightarrow 0, \quad k = 1, 2,$$

Таким образом, в момент времени t матрица вероятностей перехода за один шаг для каждого из подграфов имеет следующий вид:

$$\tilde{P}_k(t) = P_k + \delta P^{[k]}(t).$$

Будем считать, что в начальный момент времени процесс на обоих графах с вероятностью 1 находится в состоянии 1 (корень дерева), т.е.

$$p_k^{(0)} = (1, 0, \dots, 0), \quad r = 1, 2.$$

Опишем способ достижения фокусировки на многослойном графе Γ . Пусть в начальный момент времени параметры процесса блужданий частицы на данном графе установлены таким образом, что производится фокусировка на подграфе Γ_1 , а процесс на подграфе Γ_2 пущен на “самотек”. Это достигается следующим образом: возмущающие элементы $\delta p_{ij}^{[1]}$ подграфа Γ_1 в каждый момент времени t уменьшаются (т. е. выполняется условия б) для возмущений), а для подграфа Γ_2 возмущения $\delta p_{ij}^{[2]}$ носят случайный характер. Пусть τ_k – момент наступления σ -фокусировки на подграфе Γ_1 (определяется из следующего условия: $|p_j^{[1]}(\tau_k) - \pi_j| \leq \underline{\sigma}$). Тогда с момента τ_k начинается стабилизация процесса на подграфе Γ_2 (т. е. возмущения стохастической матрицы теряют случайный характер и уменьшаются с течением времени). В это же время процесс блужданий на Γ_1 пущен на самотек (возмущающие добавки становятся случайными, что приводит к скорой “расстабилизации”). За момент расстабилизации принимается такой момент времени τ_m , при котором для вектора распределения вероятностей $p^{[1]}$ подграфа Γ_1 выполняется условие:

$$|p_j^{[1]}(\tau_m) - \pi_j| > \bar{\sigma}.$$

Тогда в момент τ_m процесс на Γ_2 передается под управление единичной матрице E до того момента времени, пока не будет восстановлена σ -фокусировка на Γ_1 (на подграфе Γ_1 возмущающие добавки теряют свой случайный характер и с течением времени уменьшаются). Как только будет выполнено условие σ -фокусировка для Γ_1 , процесс стабилизации на Γ_2

“пробуждается” (процесс блужданий передается под управление матрице, отличной от единичной). В качестве момента времени, которому отвечает окончание проведения процесса блужданий, примем момент τ_0 , в который будет наблюдаться σ -фокусировка на всем многослойном графе Γ . То есть для каждого из подграфов должно выполняться следующее условие:

$$\pi_j - \sigma \leq p_j^{[k]}(\tau_0) \leq \pi_j + \sigma, k = 1, 2.$$

На рис. 4.5 приведена структура подграфов Γ_1 и Γ_2 . Жирным шрифтом выделены точки сброса; знаком "штрих" отмечены номера тех состояний, которые являются общими для Γ_1 и Γ_2 . Стохастические матрицы для каждого из этих подграфов были промоделированы.

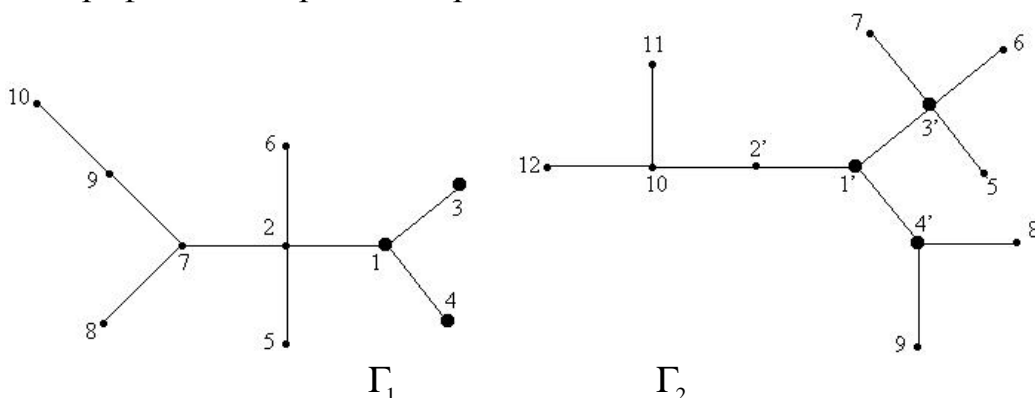


Рис. 4.5. Двухслойный граф $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

Приведём результаты процесса блужданий на многослойном графе Γ . Частичная фокусировка на подграфе Γ_1 имеет место уже к 90-му шагу. Затем наблюдаются колебания значений координат вектора распределений, соответствующего подграфу Γ_1 , в то время, как координаты вектора $p^{[2]}$ приближаются к соответствующему стационарному распределению $\pi^{[2]}$. На рис. 4.6 – 4.9 наглядно продемонстрированы тенденции процесса сходимости.

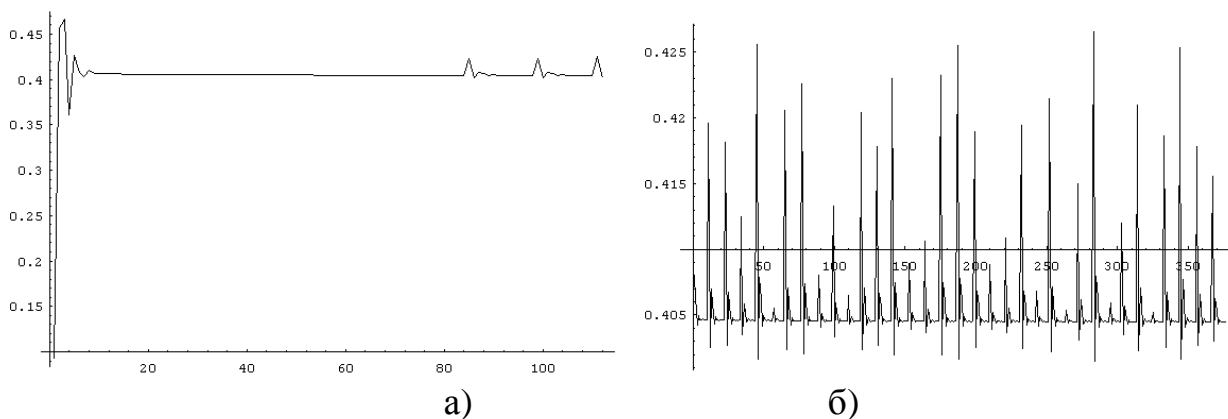


Рис. 4.6. Анализ компоненты $p_1^{[1]}$
(графики при $t \in [0, t_{100})$ (а) и при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

Здесь приведены графики изменения значений некоторых компонент векторов распределений вероятностей в течение всего процесса стабилизации. В качестве исследуемых вершин взяты состояния из множества N : точка сброса и вершина без особенностей (не точка сброса). Из представленных графиков можно так же определить момент первой σ -фокусировки на подграфе Γ_1 . Как видно, для состояний подграфа Γ_1 характерно постепенное приближение процесса к σ -фокусировке (примерно до 85-го шага), а затем наблюдается хаотическое колебание компонент вектора распределения вблизи их предельных значений до наступления σ -фокусировки на подграфе Γ_2 . Для компонент вектора распределений подграфа Γ_2 характерным было другое поведение: до наступления σ -фокусировки на Γ_1 наблюдались хаотические колебания вероятностей состояний, однако после произошло постепенное ступенчатое приближение к моменту τ_0 . Наблюдаемый эффект можно объяснить тем, что при расстабилизации процесса после наступления первой σ -фокусировки на графе Γ_1 процесс блужданий на Γ_2 приостанавливается и производится дополнительная обработка подграфа Γ_1 .

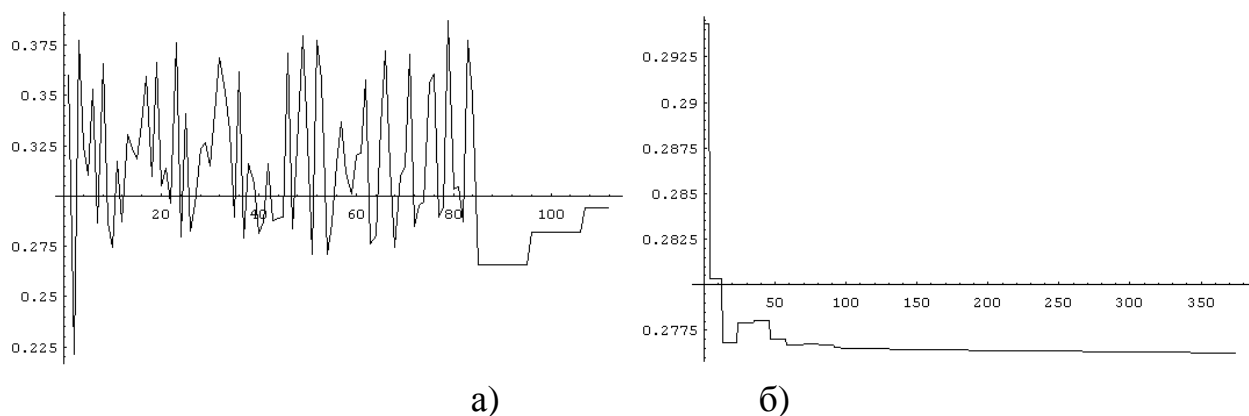


Рис. 4.7. Анализ компоненты $p_1^{[2]}$
(графики при $t \in [0, t_{100})$ (а) и при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

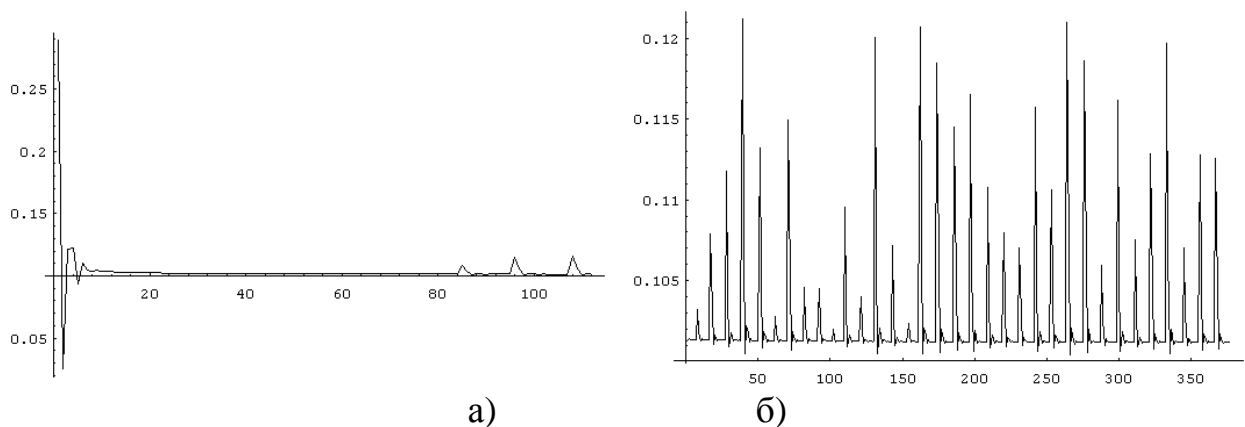


Рис. 4.8. Анализ компоненты $p_2^{[1]}$
(графики при $t \in [0, t_{100})$ (а) и при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

Дополнительно были произведены вычисления с целью сравнения скоростей сходимостей на каждом из двух графов в отдельности со скоростью сходимости на многослойном графе. Стабилизация на графе Γ занимала приблизительно 495 шагов, а стабилизации на подграфах Γ_1 и Γ_2 – 123 и 100 шага соответственно.

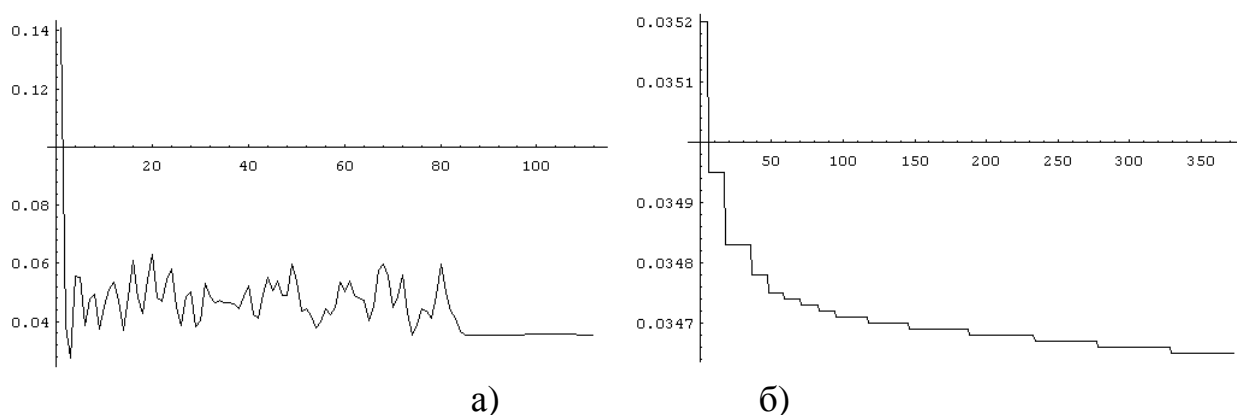


Рис. 4.9. Анализ компоненты $p_2^{[2]}$
(графики при $t \in [0, t_{100})$ (а) и при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

4.9. Стабилизация на пересекающихся графах

Рассмотрены процессы случайных блужданий с непрерывным временем на множестве $\{\Gamma_k\}$ ($k=1,2,\dots$), элементами которого являются графы Γ_k . Предполагается, что: среди элементов из $\{\Gamma_k\}$ есть графы, имеющие непустые пересечения (общие вершины и рёбра); процесс случайных блужданий на любом графе $\Gamma_i \in \{\Gamma_k\}$ не зависит от процессов блужданий на остальных графах из $\{\Gamma_k\}$.

Приведём условия, при выполнении которых имеет место стабилизация процесса блужданий на графе $\bigcup_k \Gamma_k$. Пусть L – любая замкнутая кривая, находящаяся в том же пространстве R , что и графы из $\{\Gamma_k\}$ такая, что $L \cap \{\Gamma_k\} = 0$ (0 – пустое множество). Потребуем выполнения условия: любую указанную кривую можно с помощью непрерывных деформаций стянуть в точку так, чтобы при стягивании выполнялись условия $\Gamma \subset R$, $\Gamma \cap \{\Gamma_k\} = 0$.

Пусть перечисленные условия выполнены и на всех графах из $\{\Gamma_k\}$ имеет место фокусировка. Обозначим через $\vec{\pi}_i$ вектор распределения, на который фокусирует процесс, происходящий на графе Γ_i . Пусть Γ_i, Γ_j любые графы из $\{\Gamma_k\}$ такие, что $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq 0$, а $\vec{\pi}_i, \vec{\pi}_j$ – векторы распределений, на которые эти графы фокусируют. Если для любой такой пары Γ_i, Γ_j общие компоненты

векторов $\vec{\pi}_i, \vec{\pi}_j$ одинаковы, то на графе $\bigcup_i \Gamma_i$ возможна фокусировка. Для произвольного начального распределения вероятностей фокусировка на $\bigcup_i \Gamma_i$ будет иметь место, если на каждом графе из $\{\Gamma_k\}$ фокусировка произойдет бесконечное число раз. При достаточно большом числе фокусировок на каждом $\Gamma_i \in \{\Gamma_k\}$ на графе $\bigcup_i \Gamma_i$ будет иметь место σ -фокусировка. Если различия между общими компонентами векторов $\vec{\pi}_i, \vec{\pi}_j$ достаточно малы, то на графе $\bigcup_i \Gamma_i$ возможна σ -фокусировка.

Для конкретных графов $\{\Gamma_k\}$ было произведено численное моделирование процесса случайных блужданий на графе $\bigcup_i \Gamma_i$ и изучена динамика сходимости к предельному распределению. Рассмотрим один из этих примеров.

Рассмотрим два графа. Пусть множество вершин (состояний) первого графа равно I_1 , множество вершин второго графа равно I_2 . Пусть эти графы имеют общий подграф, множество вершин которого равно $I = I_1 \cap I_2$. Будем считать, что на временном интервале $[s_0, t_0)$, $t_0 \leq \infty$, бесконечное число раз происходит попеременное "включение" первого и второго графов, причем вероятности "включения" каждого из графов равны $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Для математического моделирования такого процесса первому графу поставим в соответствие инфинитезимальную матрицу $\Lambda_1(t)$, элементами которой будут $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$ – плотности вероятностей переходов из точки i в точку j ($i, j \in I_1$) за промежуток времени t . Аналогично поставим в соответствие второму графу инфинитезимальную матрицу $\Lambda_2(t)$. Пусть в некоторые моменты времени t_k^1 процесс блуждания, описываемый матрицей $\Lambda_1(t)$, фокусирует на распределение вероятностей π^1 состояний $i \in I_1$. Пусть в другие моменты времени t_k^2 , отличные от t_k^1 , процесс, описываемый матрицей $\Lambda_2(t)$, фокусирует на распределение вероятностей π^2 состояний $i \in I_2$. Необходимо определить предельное распределение вероятностей по всем состояниям $i \in I_1 \cup I_2$.

Рассмотрим множество состояний I общего подграфа. С одной стороны, эволюция блужданий на множестве I_1 описывается подматрицей $\Lambda_{12}(t)$ матрицы $\Lambda_1(t)$. Эта подматрица составлена из элементов $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$, $i, j \in I_1$. С другой стороны, эти же блуждания описываются подматрицей $\Lambda_{21}(t)$, составленной из элементов $\lambda_{ij}^{(2)}(t)$, $i, j \in I_2$ матрицы $\Lambda_2(t)$.

Рассмотрим вектор π^{12} , составленный из $\pi_i^1, i \in I$ и вектор π^{21} , составленный из $\pi_i^2, i \in I$. Оба эти вектора описывают распределение вероятностей состояний множества I для блуждания на первом и втором графе соответственно.

Если выполняется условие параллельности векторов π^{12} и π^{21} , то процесс блуждания по объединенному графу с множеством вершин $I_1 \cup I_2$ с вероятностью 1 фокусирует на распределение π^* , которое не зависит от начального распределения, заданного в начальный момент времени s_0 . При $t \rightarrow \infty$ векторы π^{12} и π^{21} имеют совпадающие пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi^{12}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi^{21}(t) = \pi_{12}^*,$$

где π_{12}^* – подвектор вектора π^* , составленный из элементов $\pi_i^*, i \in I$.

Приведем пример такого процесса для двух полных графов. Пусть первый граф содержит вершины $I_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, второй граф – вершины $I_2 = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Тогда пересечением графов будет множество $I = I_1 \cap I_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Пусть блуждания на первом графе описываются матрицей $\Lambda_1(t)$:

$$\Lambda_1(t) = \frac{1}{t_k^1 - t} \begin{pmatrix} -12 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -12 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -12 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -12 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -10 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -11 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -11 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Множитель $\frac{1}{t_k^1 - t}$ обеспечивает фокусировку процесса в точках t_k^1 .

Предельное распределение, вычисляемое как левый собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению матрицы $\Lambda_1(t)$, равно

$$\pi^1 = \{0,0769, 0,0828, 0,0833, 0,0833, 0,0903, 0,1667, 0,0833, 0,0833, 0,0833, 0,1667\}.$$

Пусть блужданиям на втором графе соответствует матрица $\Lambda_2(t)$:

$$\Lambda_2(t) = \frac{1}{t_k^2 - t} \begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -11 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -11 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -11 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & -13 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -13 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -13 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -13 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Предельное распределение, вычисляемое как левый собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению матрицы $\Lambda_2(t)$, равно

$$\pi^2 = \{0,1667, 0,0833, 0,0833, 0,0833, 0,1667, 0,0714, 0,0816, 0,0831, 0,0833, 0,0972\}.$$

При численном моделировании получено предельное распределение вероятностей состояний для всех пятнадцати вершин объединенного графа:

$$\pi^* = \{0,054, 0,058, 0,059, 0,059, 0,064, 0,118, 0,059, 0,059, 0,059, 0,118, 0,050, 0,058, 0,059, 0,059, 0,069\}.$$

Интересно отметить, что для данных матриц $\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$ процесс выходит на стационарное распределение уже после 30 "включений". При этом характер сходимости для вершин $i \in I$ отличается от характера сходимости для вершин $i \in I_1 \cup I_2 \setminus I$ (рис. 4.10).

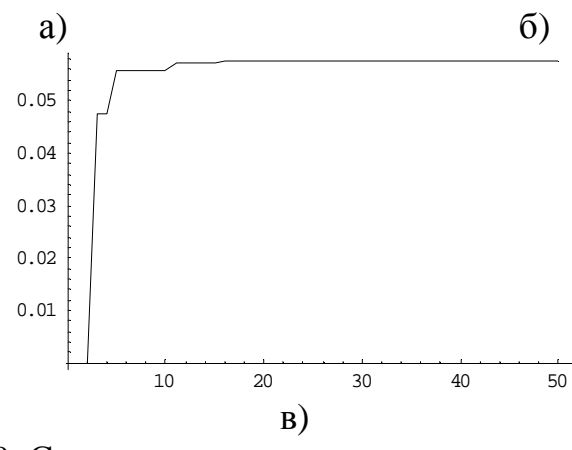
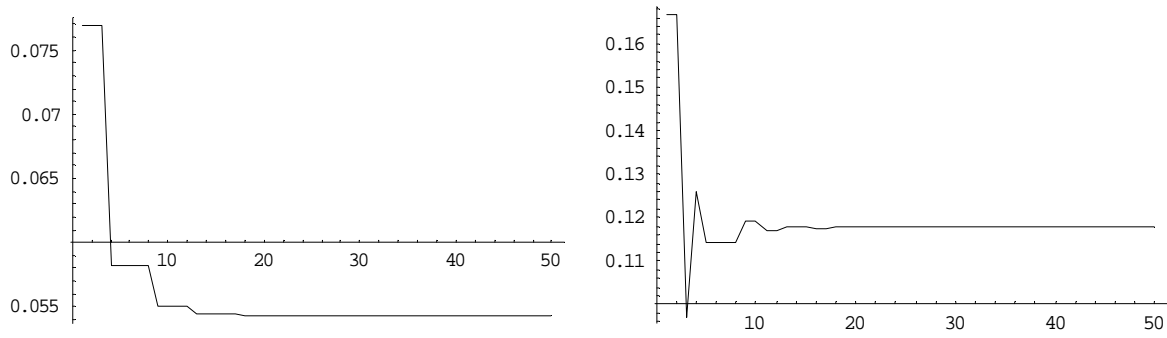


Рис. 4.10. Сходимость к предельному распределению компонент $p_1(t)$ (а), $p_6(t)$ (б), $p_{11}(t)$ (в)

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОКУСИРУЮЩИХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ЛЕКАРСТВЕННЫХ ФОРМ

В этом разделе описана схема, позволяющая свести исследование процесса диффузии, происходящей в жидкой смеси, к решению системы уравнений Колмогорова для процесса с конечным числом состояний. Описаны методы фокусировки и стабилизации, которые могут быть использованы при формировании лекарственных сиропов. Эти методы при определённом воздействии на фармакологический сироп на последней стадии его приготовления позволяют получить лекарственную форму, удовлетворяющую всем нормативным требованиям.

5.1. Методы обработки фармакологических смесей

Интенсификация основных процессов в химико-фармакологической промышленности связана с ускорением массообмена в системе твёрдое тело – жидкость. Под твёрдым телом здесь подразумеваются истинно твёрдые вещества, имеющие кристаллическую структуру, а также анизотропные тела – растительные или животные ткани, аморфные соединения.

В настоящее время имеется большой опыт по внедрению новейших методов, интенсифицирующих массообмен в системе твёрдое тело – жидкость, в основе которых лежит метод передачи системе вибраций, пульсаций или колебаний различных амплитуд, частот и интенсивностей [5, 6, 19, 20, 52, 105]. При всех положительных качествах основным недостатком этих методов являются большие энергозатраты, так как в каждом случае интенсификации массообмена электрическая энергия преобразуется в кинетическую энергию жидкости многоступенчато и коэффициент полезного действия таких установок, создающих в жидкости пульсации, вибрации и т. д., меньше, чем у одноступенчатых.

Исходя из этого, перспективно использование устройств с минимумом ступеней преобразования. К ним относятся, кроме механических и гидравлических, электроимпульсные, магнитоимпульсные, оптикоимпульсные (лазерные) устройства.

При механическом способе наложения на среду колебательных силовых полей ускорение диффузионного механизма массопереноса хорошо проявляется в области достаточно низких частот колебаний 3 – 50 Гц при малых размерах частиц.

При электроимпульсном способе интенсификации процесса колебательное движение жидкости получается при создании в ней высоковольтного заряда, который образуется в результате накопления (аккумуляции) электрической энергии, а затем её выделения в очень короткие промежутки времени. Высокое значение мгновенной мощности, которая выделяется в импульсном электрическом пробое жидкости при разряде конденсатора, создаёт в быстрорасширяющемся искровом канале ряд явлений, обуславливающих электрогидравлический эффект. Среди них: мощное

импульсное электромагнитное излучение, сопровождающее разряд, высокое импульсное давление, возникающее в среде в результате образования ударных волн и достигающее десятков тысяч атмосфер и вызывающее перемещение жидкости со скоростью сотен метров в секунду; полидисперсное ультразвуковое излучение, создающее пульсации газовых включений и полости, импульсную кавитацию в большом объеме среды; воздействие плазмы искры, несущей в своём спектре широкий диапазон инфракрасного, ультрафиолетового, жёсткого излучения.

Электрогидравлические удары внутри обрабатываемой смеси следуют один за другим достаточно часто. Эта частота регулируется в зависимости от течения технологического процесса и вида обрабатываемой смеси. При электрогидравлической обработке полученная в результате смесь изменяет и свою молекулярную структуру. При этом в ней возникают статические и квазистационарные поля, характеристики которых могут быть определены специальными способами, в частности, с помощью зондирующих графов.

Одно из свойств электрогидравлического удара заключается в том, что в результате переориентации ионов, приведением их в возбужденное состояние, вода, обработанная электроимпульсным способом, теряет способность образовывать посторонние примеси и накипь. Изменение свойств воды – явление временное и зависит от приложенного напряжения, т. е. свойства воды можно регулировать искусственным путем.

Фактически электрогидравлический удар искрового разряда следует относить к типу микровзрыва и механизм его воздействия в области гидродинамики следует рассматривать с этих позиций. Влияние плазмы разряда в связи с её специфичностью может быть использовано в области ускорения химических процессов при получении новых веществ, полимеризации, для стерилизации и обеспложивания среды и т. д.

Аналогично электрогидравлическому эффекту существует светогидравлический эффект. Сильные гидравлические волны возникают внутри жидкости при поглощении ею светового луча квантового генератора (лазера). Эффект усиливается, если жидкость не бесцветна, а тела, погружённые в неё, способны поглощать свет сфокусированного луча.

При этом отмечается не только интенсивная турбулизация жидкости, вплоть до выброса её из ёмкости, но и значительная деформация погружённых в жидкость частиц сырья с разрывом клеток, вызванным возникновением избыточного давления в ударной волне – порядка миллиона атмосфер. Эффект проявляется в ещё более короткие промежутки времени, чем при электрическом разряде, что обусловлено малой длительностью светового импульса, несущего заряд энергии большой мощности [1, 53].

Использование квантовых генераторов в химико-фармацевтическом производстве – совершенно новая мало изученная область, требующая тщательного исследования. В настоящее время лазерная техника достаточно уверенно используется в отдельных отраслях медицины и биологии при облучении различных органов и тканей, биологических субстратов. Выявлены параметры излучения, влияющие на технологические процессы, мощность

падающего светового луча, длины волны, плотность энергии и т. д. [79, 96]. Была сделана попытка использования энергии квантового генератора (гелий-неонового лазера) с длиной волны 633 нм и мощностью на выходе из генератора трубки 25 МВт и 2 МВт при стерилизации инъекционных растворов и порошков: спазмолитина, апрофена, тифена. Исследования состава лекарств путём тонкослойной хроматографии и микробиологическая оценка их стерильности дали обнадеживающие результаты [106].

Имеются сведения о действии лазерного излучения (гелий-неонового лазера) при экспозиции от 10 до 40 мин на наиболее распространённые микроорганизмы: стафилококк патогенный, кишечную палочку, вульгарный протей, синегнойную палочку и др. Известно также, что лазерный луч оказывает бактериостатический эффект, причём степень последнего зависит от мощности излучения и продолжительности воздействия. Выявлено и некоторое ингибирующее действие лазерного излучения на микроорганизмы, являющиеся возбудителями раневой инфекции.

Из сказанного следует, что современные методы производства требуют применения процессов переработки сырья в экстремальных условиях, значительно интенсифицирующих общий процесс. Среди многочисленных факторов внешнего воздействия ведущими являются скоростные изменения температуры и давления. Изменение этих параметров может быть достигнуто с помощью различных физических и электрофизических приёмов, химического взрыва, создающего давление до 1×10^{10} Па, импульсного магнитного поля (1×10^9 Па), термического и механического действия лазерного излучения на жидкость ($2 - 3 \times 10^{22}$ Па), акустического излучения и импульсного электрического разряда (до 10^9 Па.) [106, 155]. Преимущество электрогидравлического эффекта по сравнению с любым из перечисленных методов заключается в большей надёжности и воспроизводимости процесса, возможности его автоматизации, т. е. использования в поточных линиях и системах, хотя каждый из них в отдельности имеет и свои специфические преимущества.

В области малых энергий (единичное воздействия в пределах 1-1000 Дж), когда возникает необходимость применения очень коротких (до десяти наносекунд) импульсов воздействия, преимущественно имеет светогидравлический эффект, создаваемый лазерным импульсом [117], а при обработке проводящих электрический ток материалов преимущество следует отдавать высокоинтенсивным импульсным полям [53, 121]. В связи с ограниченностью сведений о применении лазерной технологии в фармации этот вопрос специально не рассматривается.

Из вышеизложенного следует, что процесс импульсной обработки лекарственного сырья складывается из сильных воздействий – ударов, следующих один за другим через короткие промежутки времени. Каждый из этих ударов локализован в пределах достаточно малого объёма обрабатываемой смеси. Суммарный эффект при указанном способе воздействия на жидкую смесь приводит к однородности её свойств после окончания процесса обработки. На

последнем этапе этой операции обрабатываемый экстракт не содержит твёрдых фрагментов и происходящие в нём процессы – это процессы диффузии.

5.2. Марковский подход при описании процессов, происходящих в жидких смесях

Если оборудование качественное и внешних воздействий практически нет и технологический режим протекает без нарушений, то процесс изготовления лекарственной формы происходит в соответствии с паспортным режимом. Это означает, что промежуток времени $[s_0, t_0)$, на котором происходит изготовление лекарственного препарата, можно разбить на части, например, n частей, $[s_0, s_1), [s_1, s_2), \dots, [s_{n-1}, t_0)$, в каждой из которых формируемая масса находится в определённом нормативном состоянии. Под нормативным состоянием понимается такая ситуация, при которой основные характеристики фармакологического сиропа (его внутренняя температура, химический состав, содержание катализаторов и т. д.) находятся в заданных границах.

Чем больше n – число промежутков времени, на которые разбит интервал $[s_0, t_0)$ – тем точнее описание процесса изготовления лекарственной формы. Обозначим состояния формируемой массы в промежутках времени $[s_0, s_1), [s_1, s_2), \dots, [s_{n-1}, t_0)$ через E_1, E_2, \dots, E_n . С каждым состоянием $E_k, (k = 1, \dots, n)$, свяжем осреднённое значение основной характеристики фармакологической массы – степень чистоты эталонного лекарственного препарата, находящегося в состоянии E_k .

Если процесс изготовления лекарственной формы протекает в соответствии с паспортным режимом и уровень высокочастотных вибраций и шумов низок, то на каждом из интервалов $[s_{k-1}, s_k)$ фармакологическая масса находится в состоянии E_k с вероятностью p_{kk} , лишь незначительно отличающейся от единицы. Если же высокочастотные вибрации и случайные воздействия представлены достаточно массивно, то p_{kk} заметно отличны от единицы, т. к. на временных промежутках $[s_{k-1}, s_k)$ фармакологическая масса может находиться (помимо состояния E_k) и в состояниях близких к E_k , в частности, в состояниях E_{k-1}, E_{k+1} , в которых она бы находилась с вероятностью близкой к нулю в том случае, если бы высокочастотных вибраций и случайных воздействий на процесс не было.

Рассмотрим подробнее исследуемый процесс на любом из промежутков $[s_{k-1}, s_k)$. Для $t \in [s_{k-1}, s_k)$ обозначим через $\dots, p_{k,k-2}(t), p_{k,k-1}(t), p_{k,k+1}(t), p_{k,k+2}(t), \dots$ вероятности нахождения формируемой массы в состояниях $\dots, E_{k-2}, E_{k-1}, E_{k+1}, E_{k+2}, \dots$. Если число n всех временных промежутков $[s_{k-1}, s_k)$ не очень велико и, вместе с тем, таково, что с их помощью процесс описывается достаточно точно, то тогда стохастическая матрица процесса будет трёхдиагональной. При больших значениях n и значительном фоне высокочастотных и случайных воздействий стохастическая матрица процесса

будет содержать меньше нулевых элементов, чем для случая трёхдиагональной матрицы.

Таким образом, при наличии вибраций и случайных воздействий исследование процесса изготовления лекарственной формы можно свести к изучению марковского процесса с конечным числом состояний, в частности, к исследованию марковского процесса с трёхдиагональной матрицей.

Более точный анализ процесса приготовления фармакологического сиропа основывается на его описании с помощью пятидиагональной матрицы. Если технологический режим протекает в соответствии с заданными ограничениями, то элементы этой матрицы, наиболее удалённые от её главной диагонали, малы и пренебрежение ими не приводит к грубым погрешностям в описании процесса.

В заключение этого пункта напомним, что процесс приготовления лекарственного сиропа протекает в результате воздействия на него возмущений, локализованных на малых промежутках времени и следующих друг за другом достаточно часто. Их согласованное воздействие на жидкую смесь позволяет удерживать основные характеристики процесса в заданных границах в течение всего времени его изготовления.

В практике приготовления лекарственных форм часто ставится задача о реализации такого процесса, когда фармакологический сироп удовлетворяет всем нормативным требованиям лишь на последнем этапе его приготовления. На промежуточных этапах (в частности, когда происходит измельчение твёрдых фракцийготавливаемой смеси) допускается отступление от нормативных средних.

В следующих пунктах будут описаны методы стабилизации распределений марковских систем, реализация которых позволяет произвести приготовление лекарственного сиропа по указанной схеме.

5.3. Распределённые фокусирующие факторы

Явления точной фокусировки и σ -фокусировки были описаны в разделах 1, 2. В случае точной фокусировки и σ -фокусировки среди элементов матрицы $\Lambda(s)$ есть элементы, которые при $s \uparrow t_0$ быстро возрастают. Такой рост обычно возникает из-за воздействия на процесс быстро изменяющихся факторов, локализованных чаще всего на малых промежутках времени. Часто бывает, что такие факторы, многократно воздействуя на процесс на некотором промежутке времени, всякий раз вызывают сильные «почти неинтегрируемые» возмущения элементов матрицы Λ , что приводит к многократному появлению точек σ -фокусировки. На практике приходится иметь дело с такими факторами, которые, систематически воздействуя на процесс в промежутке $a \leq t \leq b$, приводят к многократному появлению на нем точек σ -фокусировки, распределённых на $[a, b]$ почти «непрерывно». Такие факторы называют фокусирующими [12, 65]. В этом случае для всех измеримых по Лебегу

множеств из $[a, b]$ можно ввести меру F фокусировки. Достаточно ввести эту меру на множестве всех полуинтервалов $[t', t''] \subset [a, b]$. Положим

$$F[t', t''] = \sup_j \{R_j(t', t'') - r_j(t', t'')\}, \quad (5.1)$$

где $R_j(t', t'') = \sup_i p_{ij}(t', t'')$, $r_j(t', t'') = \inf_i p_{ij}(t', t'')$, $p_{ij}(t', t'')$ – переходные вероятности.

Таким образом, величина $F(t', t'')$ из (5.1) определяет суммарный фокусирующий эффект, возникающий за счет всех точек фокусировки, «размазанных» на $[t', t'']$.

Если точек фокусировки на $[a, b]$ достаточно много и вклад каждой из них в суммарный фокусирующий эффект на $[a, b]$ мал, можно ввести понятие плотности распределения $p_F(t)$ таких точек на $[a, b]$. При этом следует использовать макроскопическое описание понятия плотности, когда пренебрегают «микроскопическими» значениями усредняемых величин. Если среди точек фокусировки есть точки, вклад которых в суммарный фокусирующий эффект существенен, при описании плотности $p_F(t)$ следует использовать δ -функции. В случае, когда плотность фокусировки $p_F(t)$ постоянна на $[a, b]$ для любого $[t', t''] \subset [a, b]$, мера $F(t', t'')$ зависит лишь от разности $t'' - t'$ и на любом $[t', t'']$ фокусировка производится на одно и то же распределение.

Описанные выше фокусирующие факторы, обычно действуют на фоне некоторой стохастической (инфинитезимальной) матрицы, которая от них не зависит. Такие матрицы будем называть фоновыми. Если возмущения, порождающие фокусирующие факторы, локализованы на малых промежутках времени $\Lambda_i(t)$ и норма фоновой матрицы невелика, то ее вклад в процесс фокусировки на временных интервалах малой длительности мал.

Рассмотрим простейший случай распределения фокусирующих факторов на $[a, b]$ – случай, когда они сосредоточены на равноотстоящих друг от друга непересекающихся интервалах $(t_i, t_i + \delta t_i)$, $(i = 1, \dots, n)$. Предполагается, что каждому $(t_i, t_i + \delta t_i)$ отвечает (с точностью до сдвига) одна и та же инфинитезимальная матрица $\Lambda_i(t)$, обращающаяся в нуль при $t \notin \bigcup_{i=1}^n (t_i, t_i + \delta t_i)$. Считаем, что матрица $\Lambda_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) такова, что эволюция процесса на $(t_i, t_i + \delta t_i)$ приводит к σ -фокусировке его распределения к моменту $t_i + \delta t_i$; δt предполагается настолько малым, что вкладом фоновой матрицы в процесс фокусировки за промежуток δt можно пренебречь. Изменение вектора распределения процесса $\vec{p}(t)$ на $[a, b]$ зависит от того, насколько близко расположены друг к другу фокусирующие интервалы

$(t_i, t_i + \delta t_i)$. Если расстояния между ними достаточно малы, то σ -фокусировка будет иметь место при $t \in [a + \Delta, b]$. В противном случае моменты времени, в которые σ -фокусировка имеет место, будут локализованы лишь в некоторых окрестностях точек $t_i + \delta t_i$.

Рассмотрим случай равноотстоящих фокусирующих интервалов, которые могут быть получены в результате дробления заданного фокусирующего фактора на n одинаковых частей. Пусть на интервале $(t, t + \delta t) \subset [a, b]$ распределены факторы, обеспечивающие σ -фокусировку процесса, который реализуется матрицей $\Lambda(t)$. Вне $(t, t + \delta t)$ $\Lambda(t) = 0$. Построим n интервалов $(t_i, t_i + \delta t)$ ($i = 1, \dots, n$), равноотстоящих друг от друга и равномерно заполняющих $[a, b]$. Нумерация этих интервалов производится слева направо. Считаем, что $n \cdot \delta t \leq b - a$. С каждым $(t_i, t_i + \delta t)$ свяжем фокусирующие факторы, которые определяются матрицей $\Lambda_i(t)$; любая $\Lambda_i(t)$ может быть получена из $\Lambda(t)$ уменьшением ее в n раз с последующим смещением: матрица $n^{-1}\Lambda(t)$ после соответствующего смещения имеет своим носителем один из интервалов $(t_i, t_i + \delta t)$. Если фокусирующая сила матрицы $\Lambda(t)$ на $(t, t + \delta t)$ была достаточно велика, то каждая из матриц $\Lambda_i(t)$ будет фокусировать при изменении t на $(t_i, t_i + \delta t)$. Если при этом фоновая матрица $P(s, t)$ – единичная на (a, b) (или мало отличается от нее), то σ -фокусировка исследуемого процесса на $[a, b]$ будет достигнута уже после фокусировок на нескольких первых интервалах $(t_1, t_1 + \delta t)$, $(t_2, t_2 + \delta t)$, ... Если же фоновая матрица значительно отличается от единичной, то σ -фокусировки на $[a, b]$ может и не быть.

Все вышесказанное о равноотстоящих фокусирующих интервалах с незначительными изменениями переносится на временную полуось $s_0 < t$. Теперь, однако, множество интервалов $(t_i, t_i + \delta t_i)$, на которых распределены фокусирующие факторы, должно быть бесконечным (счетным). Если расстояния между интервалами $(t_i, t_i + \delta t_i)$ изменяются и некоторые их подмножества группируются друг относительно друга достаточно плотно, то на временных промежутках, которые эти подмножества заполняют, процесс фокусировки протекает быстрее, чем в случае менее плотного их расположения. Если на конечном временном отрезке $a \leq t \leq b$ содержится бесконечное (счетное) множество интервалов $(t_i, t_i + \delta t_i)$, то $[a, b]$ содержит хотя бы одну точку сгущения для них (отметим, что в этом случае нумерация интервалов $(t_i, t_i + \delta t_i)$ в порядке роста t_i , вообще говоря, невозможна). Если фоновая матрица единичная, то в этих точках фокусирующий эффект проявляется наиболее резко.

Рассмотрим случай, когда $s_0 \leq t < \infty$ и фокусирующие факторы, распределенные на интервалах $(t_i, t_i + \delta t_i)$, появляются случайно. Обозначим через p_i вероятность того, что фактор, обеспечивающий σ -фокусировку,

распределен на $(t_i, t_i + \delta t_i)$. Считаем, что множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, t_i + \delta t_i)$ может иметь точки сгущения. При исследовании описанной ситуации часто можно использовать леммы Бореля-Кантелли. Так, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится, то с вероятностью 1 фокусировка может быть реализована лишь на конечном множестве интервалов $(t_i, t_i + \delta t_i)$. Если же этот ряд расходится и фокусировки на интервалах $(t_i, t_i + \delta t_i)$ являются независимыми случайными величинами, то с вероятностью 1 фокусировка происходит на бесконечном множестве интервалов $(t_i, t_i + \delta t_i)$.

В [44] приводятся условия фокусировки и σ -фокусировки, реализуемых при локальных возмущениях марковского процесса с непрерывным временем и конечным, счетным и континуальным множеством состояний. Каждое отдельно взятое возмущение воздействует лишь на некоторое подмножество фазового пространства. Согласованное воздействие таких возмущений приводит к стабилизации процесса в целом. Предполагается, что фазовое пространство наделено некоторой топологией, в частности, является метрическим пространством. Если некоторое состояние (или группа состояний) получит сильное возмущение, то возмущения получат и состояния, близкие к нему. Множество всех возмущенных состояний порождает инфинитезимальную матрицу, которую называют фрагментом. Предполагается, что пересекающиеся фрагменты определенным образом согласованы между собой [12, 44, 57]. Если условия согласования выполнены, то при некоторых естественных ограничениях на последовательность моментов времени, в которые происходят возмущения, процесс стабилизируется: вероятности его состояний с ростом времени либо принимают некоторые предельные значения, либо локализуются вблизи них.

Реализация процесса стабилизации в каждом конкретном случае требует проведения предварительных исследований. Пусть, для определенности, речь идет о таких воздействиях на процесс растворения твердых примесей в жидкой среде, при которых к моменту времени t_0 скорость растворения твердой примеси Π_k , $k = 1, 2, \dots$ должна быть равна V_k . Тогда, зная массу каждой растворяемой примеси Π_k , можно найти ее относительную плотность p_k во всем растворе к моменту t_0 . На практике описанный процесс является лишь частью некоторого технологического процесса и требуется выбрать такие внешние воздействия на него, чтобы в моменты $t > t_0$ относительные плотности $p_k(t)$ принимали заданные значения $p_k(t)$, например, не изменялись: $p_k(t) = p_k$. В такой ситуации приходится решать несколько задач. Следует разбить рабочее пространство D , в котором происходит растворение, на несколько частей D_k , в каждой из которых нужно расположить источники возмущений, порождающие фокусирующие фрагменты. Эти источники следует

выбрать так, чтобы выполнялись условия согласования из [57, 44] и чтобы при $t > t_0$ $p_k(t)$ принимали заданные значения (или мало отличались от них). Разбиение рабочего пространства на области D_k может быть произведено многими способами. Здесь возникает задача об оптимальном выборе областей D_k . Если момент t_0 фиксирован, то ставится задача о таком выборе D_k , при котором реализация процесса связана с минимальным расходом энергии. Речь может идти также о таком выборе D_k , при котором для фиксированного объема энергозатрат и заданном начальном моменте процесса растворения s_0 разность $t_0 - s_0$ принимала минимальное значение. С изменением времени физические характеристики рабочей смеси изменяются, в связи с чем требуется определенным образом изменить мощности источников возмущений в каждой области D_k . Эти изменения выбираются так, чтобы соответствующие энергозатраты были минимальны и основные рабочие характеристики процесса мало отличались от паспортных. Из перечисленных задач видно, что управление процессом растворения требует проведения дополнительных исследований и решения ряда вспомогательных задач.

5.4. Стабилизация распределений вероятностей марковского процесса при локальных возмущениях его частей

Опишем подробнее метод стабилизации, схема которого была намечена в предыдущем пункте. Считаем, что: каждое очередное возмущение локализовано в некоторой окрестности момента времени τ_k , отделяющей τ_k от промежутков, на которых действуют другие возмущения; моменты τ_k являются точками фокусировки для процессов с инфинитезимальными матрицами-фрагментами, возникающими при этих возмущениях; каждый фрагмент после момента τ_k обращается в нуль за малый промежуток времени. Это означает, что результаты фокусировки не изменятся за промежуток (τ_k, t) , на котором данный фрагмент еще отличен от нуля. Эволюция процесса рассматривается на промежутке $[s_0, t_0)$, $t_0 \leq \infty$. Если $t_0 = \infty$, считаем, что при отсутствии возмущений стохастическая матрица $P(s, t)$ процесса совпадает с единичной матрицей. Если $t_0 < \infty$, то $P(s, t)$ предполагается лишь непрерывной.

Сначала рассмотрим случай, когда $t_0 = \infty$ и фокусировка, реализуемая фрагментами, точная. Опишем изменение вектора $\vec{\pi}(t)$ распределения вероятностей состояний всего процесса, происходящее при каждой очередной фокусировке. Пусть фрагмент Δ_i в момент τ_k фокусирует на $\vec{\pi}_i = \vec{\pi}_i(\tau_k)$. Рассмотрим вектор $\vec{\pi}'_i(t)$, координаты которого состоят из всех координат $\vec{\pi}(t)$, находящихся в тех же строках, что и строки Δ_i . Пусть (t', t'') – любой интервал, содержащий τ_k , в котором никакой фрагмент, кроме Δ_i , не фокусирует. Тогда, чтобы получить вектор распределения $\vec{\pi}(t)$ процесса при $t \in (\tau_k, t'')$, следует подвектор $\vec{\pi}'_i(t')$ вектора $\vec{\pi}_i(t')$ заменить на $\vec{\pi}_i(\tau_k)$. В результате получим $\vec{\pi}(t)$.

Каждому элементу любого фрагмента отвечает определенный элемент матрицы $P(s, t)$. Пусть Δ_i, Δ_j – произвольные фрагменты. Выделим из них все элементы, которые соответствуют одному и тому же элементу из $P(s, t)$. Множество всех таких элементов из Δ_i и Δ_j будем называть их пересечением: $\Delta_{ij} = \Delta_i \cap \Delta_j$. Прямоугольная матрица Δ_{ij} принимает, вообще говоря, разные значения в окрестностях моментов фокусировки фрагментов Δ_i, Δ_j . Вне этих окрестностей $\Delta_{ij} = 0$.

Сделаем следующие предположения.

а) Любой момент τ_k фокусировки произвольного фрагмента Δ_i (а значит, и возмущение, которое его порождает) не зависит от эволюции процесса до τ_k . Существует последовательность интервалов

$$\{[s_k, s_{k+1})\}_{k=0}^{\infty}, \bigcup_{k=0}^{\infty} [s_k, s_{k+1}) = [s_0, \infty), \quad (5.2)$$

такая, что любой фрагмент $\Delta_i, (i=1, \dots, N)$ в моменты $\tau_k \in [s_k, s_{k+1})$, $k=0, 1, 2, \dots$, фокусирует с вероятностью $p_i(\tau_k)$,

$$0 < p_0 \leq p_i(\tau_k) \leq p_i < 1. \quad (5.3)$$

Любой фрагмент при каждом очередном его возмущении фокусирует на одно и то же распределение $\bar{\pi}_i$.

б) Пусть

$$M = \bigcup_{i=1}^N \Delta_i$$

– объединение всех фрагментов. Считаем, что: M покрывает всю диагональ матрицы $P(s, t)$; возможна такая нумерация фрагментов, при которой

$$\Delta_{i, i+1} \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\Delta_{i, N} = \emptyset, \quad i = 1, \dots, N-2,$$

диагональные элементы $P(s, t)$, принадлежащие $\Delta_i \setminus \Delta_{i, i+1}$, лежат левее диагональных элементов $P(s, t)$ из $\Delta_{i+1} \setminus \Delta_{i, i+1}$.

Далее используется такая нумерация фрагментов.

в) Условия согласования. Пусть Δ_i, Δ_j – любые фрагменты, для которых $\Delta_{ij} \neq \emptyset$ и Δ_i, Δ_j фокусируют на $\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j$. Рассмотрим векторы

$$\bar{\pi}_{ij}, \bar{\pi}_{ji}, \quad (5.4)$$

координаты которых состоят из тех координат $\vec{\pi}_i, \vec{\pi}_j$, которые лежат в тех же строках, что и строки фрагмента Δ_{ij} . Потребуем, чтобы $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$ были параллельны.

Если выполняются все перечисленные условия, то такой процесс с вероятностью 1 фокусирует на распределение $\vec{\pi}^*$, которое не зависит от начального распределения вероятностей, заданного в момент s_0 . При $t \rightarrow \infty$ векторы $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$ из (5.4) имеют совпадающие пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\pi}_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\pi}_{ji}(t) = \vec{\pi}_{ij}^*. \quad (5.5)$$

Доказательство этого утверждения сводится к проверке следующих утверждений.

1. После каждой фокусировки любого фрагмента сумма

$$\sum_{i,j} \left| \vec{\pi}_{ij} - \vec{\pi}_{ji} \right| \quad (5.6)$$

не возрастает. Проверка этого утверждения основывается на предположении о параллельности векторов $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$.

2. Существуют такие цепочки (системы) фрагментов, при последовательной фокусировке которых сумма (5.6) убывает. К их числу, в частности, относится цепочка

$$\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}, \Delta_N\}. \quad (5.7)$$

Здесь фрагменты расположены в том порядке, в котором они фокусируют. Если все фрагменты такой цепочки последовательно фокусировать в указанном порядке бесконечное число раз, то сумма (5.6) обратится в нуль. При проверке этого утверждения существенную роль играет условие $\Delta_{i,N} = \emptyset$ ($i = 1, \dots, N-2$) из б). Если такой фрагмент Δ_N не существует, то указанное стремление к нулю суммы (5.6) не имеет места без дополнительных предположений о связях между векторами $\vec{\pi}_i$, на которые фокусируют фрагменты.

3. Вероятность того, что все фрагменты цепочки (5.7) за промежуток $[s_0, \infty)$ будут возмущены (в порядке их нумерации) бесконечное число раз, равна единице. Это утверждение проверяется с помощью (5.3)

Опишем строение вектора $\vec{\pi}^*$. Обозначим через $\vec{\pi}_i^*$ пределы (при $t \rightarrow \infty$) векторов $\vec{\pi}_i(\tau_k)$, на которые фокусируют фрагменты Δ_i ($i = 1, \dots, N$). Заменяем нулями все координаты вектора $\vec{\pi}_i^*$ ($i = 2, \dots, N$), которые принадлежат $\vec{\pi}_{i-1,i}^*$ из (5.2). Отбросив в этом новом векторе полученные таким образом нулевые координаты, получим вектор $\vec{\pi}_{ii}^*$. Вектор $\vec{\pi}^*$ имеет вид

$$\bar{\pi}^* = (\bar{\pi}_1^*, \bar{\pi}_{22}^*, \dots, \bar{\pi}_{NN}^*). \quad (5.8)$$

Случай $t_0 < \infty$ имеет место при лавинообразном нарастании мощности факторов, порождающих фокусирующие фрагменты. Сформулированное выше для случая $t_0 = \infty$ утверждение здесь имеет место, когда матрица $P(s, t)$ непрерывна и t_0 не является ее точкой фокусировки. Доказательство этого утверждения с незначительными изменениями проводится также, как и для случая $t_0 = \infty$. Равенство (5.2) теперь имеет вид

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} [s_k, s_{k+1}) = [s_0, t_0);$$

по-прежнему, $\tau_k \in [s_k, s_{k+1})$.

Пусть выполняются перечисленные выше условия, но теперь все фрагменты σ -фокусируют. Тогда при $t \uparrow t_0$ имеет место σ -фокусировка на $\bar{\pi}^*$. Это утверждение верно и для случая, когда часть фрагментов σ -фокусирует, а остальные – фокусируют.

Если векторы $\bar{\pi}_{ij}$, $\bar{\pi}_{ji}$ из (5.8) удовлетворяют условиям согласования с точностью до слагаемых, длины которых достаточно малы, то имеет место σ -фокусировка.

Полученные результаты справедливы и в случае, когда множество всех состояний исследуемого процесса Π является счётным или континуальным. Для каждого из этих случаев число возможных фрагментов бесконечно. Условия согласования здесь такие же, как и в случае конечного числа состояний. Доказательство сходимости к финальному распределению проводится сначала для процессов Π_n ($n = 1, 2, \dots$), в каждом из которых число возможных фрагментов конечно и неограниченно возрастает с ростом n . Каждый процесс Π_n при $t \uparrow t_0$ фокусирует на распределение $\bar{\pi}_n^*$ и аппроксимирует с заданной точностью процесс Π . С ростом n точность аппроксимации возрастает. Далее устанавливается, что $\bar{\pi}_n^* \rightarrow \bar{\pi}^*$ ($n \rightarrow \infty$).

К числу локальных возмущений, посредством которых производится управление процессом приготовления жидкой смеси, мы относим и последовательное введение в раствор реагентов. Реагенты вводятся малыми порциями; моменты их введения определяются на основе анализов жидкой смеси. Эти анализы производятся достаточно часто.

Пусть локальные возмущения процесса Π таковы, что векторы распределений на которые фокусируют фрагменты, являются случайными. Мощность множества всех состояний процесса Π по-прежнему не более чем континуально. Предполагается, что любой фрагмент при каждом очередном его возмущении фокусирует на один и тот же случайный вектор. Условия согласования теперь состоят в том, чтобы были параллельны векторы

математических ожиданий $\vec{M}\bar{\pi}_{ij}$, $\vec{M}\bar{\pi}_{ji}$. Остальные предположения об исследуемом процессе остаются прежними (см. условия а), б)). Тогда процесс Π с вероятностью 1 фокусирует на случайный вектор $\vec{\pi}^*$. Равенство (5.5) теперь имеет вид

$$\lim_{t \uparrow t_0} \vec{M}\bar{\pi}_{ij}(t) = \lim_{t \uparrow t_0} \vec{M}\bar{\pi}_{ji}(t).$$

Описанная в этом пункте схема фокусировки применима к процессам, инфинитезимальные матрицы которых трёхдиагональны. Если инфинитезимальная матрица процесса пятидиагональна и её элементы, максимально удалённые от главной диагонали, достаточно малы (это требование в практике приготовления лекарственных форм обычно выполняется), то векторы согласования $\vec{\pi}_{ij}$, $\vec{\pi}_{ji}$ из (5.4) будут с точностью до малых слагаемых параллельны и σ -фокусировка будет иметь место.

Фармакологический сироп в конце его приготовления должен представлять однородную смесь – её свойства должны быть одинаковы во всех точках занимаемого ею объёма. Поэтому описанный выше процесс стабилизации, реализуемый с помощью согласованных локальных возмущений, должен представлять собой фокусировку на равномерное распределение. При реализации фокусировки на равномерное распределение фармакологический раствор можно подвергать перемешиванию. Требуется лишь, чтобы локальные возмущения, воздействующие на раствор во всех частях занимаемого им объёма, были идентичны с точки зрения их воздействия на раствор. Соблюдение этого условия приводит к тому, что каждое такое локальное возмущение фокусирует на фрагмент равномерного распределения. Финальное распределение также будет однородным.

5.5. Уравнения для высокочастотных колебаний, возникающих при воздействии детерминированных и случайных факторов

К числу сильных возмущений, воздействующих на процесс и позволяющих управлять им, относятся высокочастотные вибрации, воздействующие на всю фармакологическую массу или отдельные её части и многократно повторяемые электрогидравлические удары, равномерно распределённые во всём рабочем пространстве на последнем этапе её приготовления. Когда твёрдые фракции смеси уже полностью измельчены, основными факторами воздействия на жидкую смесь являются последовательно вводимые в неё реактивы, интенсивное перемешивание, а для многих видов смесей и высокочастотные вибрации [121]. Все эти способы воздействия на фармакологический сироп приводят к возникновению в нём фокусирующих факторов, описанных в п. 5.4, 5.5.

Рассмотрим фармакологический сироп, содержащий добавки, растворение которых инициируется искусственно создаваемыми вибрациями. Предполагается, что эти вибрации содержат высокочастотные колебания,

которые, как известно [105, 106], наиболее активно участвуют в процессе растворения. Кроме вибраций растворению добавок способствует перемешивание, представляющее собой равномерное или почти равномерное вращение фармакологической смеси. Выясним, какой вклад вносят высокочастотные гармоники в суммарную силу, воздействующую на частицы, находящиеся в фармакологическом сиропе (растворе).

Рассмотрим случай, когда частицы находятся одновременно под действием медленно изменяющегося поля U , отвечающего равномерному вращению сиропа, и силы

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \cos \omega t + \vec{f}_2 \sin \omega t, \quad (5.9)$$

изменяющейся со временем с большой частотой ω . Предполагается, что \vec{f}_1, \vec{f}_2 – функции только от пространственных координат. Сила \vec{f} отвечает высокочастотной гармонике. Таким образом, здесь предполагается, что высокочастотные вибрации сводятся лишь к этой гармонике (5.9). Под «большой» частотой понимается такая частота ω , которая удовлетворяет условию $\omega \gg \frac{1}{T}$, где T – время, за которое поле U заметно изменяет свое значение. Сила \vec{f} не предполагается малой по сравнению с силами, действующими в поле U . Будем, однако, предполагать, что под действием силы \vec{f} частица совершает колебательные смещения ξ малой амплитуды. Это предположение верно, так как $\omega \gg \frac{1}{T}$. Для простоты записи считаем, что движение частицы одномерное. Это будет в том случае, если U и f зависят лишь от одной пространственной координаты x . Переход к трехмерному случаю не представляет особых трудностей. Уравнение частицы имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \quad (5.10)$$

Из сделанных выше предположений следует, что движение частицы представляет собой перемещение вдоль некоторой плавной траектории, обусловленной равномерным вращением сиропа, с одновременными малыми колебаниями с частотой ω вокруг нее. Таким образом,

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad (5.11)$$

где $\xi(t)$ – смещение частицы за счет быстрых осцилляций. Заменяем все величины в (5.11) их средними значениями за период $\frac{2\pi}{\omega}$. Средним значением

функции $f(t)$ на промежутке $\left[t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2} \right]$ называется величина

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau. \quad (5.12)$$

Предполагается, что результаты усреднений, производимые с помощью (5.12), устраняют фактор случайности и позволяют перейти от уравнения (5.11) к уравнению с неслучайными членами.

Учитывая, что среднее значение функции $\xi(t)$ за время ее периода $\frac{2\pi}{\omega}$ равно нулю и что $X(t)$ за это время почти не изменяется, получим

$$\bar{x} = X(t).$$

Это означает, что $X(t)$ описывает усредненное по быстрым осцилляциям, плавное движение частицы. Выведем уравнение для этой функции. Подставим (5.11) в (5.10) и разложим слагаемые полученного равенства по степеням ξ . Пренебрегая членами $o(\xi)$, получим

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (5.13)$$

Это уравнение содержит члены двух типов – быстро осциллирующие и медленно изменяющиеся. Они должны взаимно уничтожаться в каждой из этих двух групп в отдельности. Для осциллирующих членов имеем

$$m\ddot{\xi} = f(X, t). \quad (5.14)$$

Остальные осциллирующие члены малы, так как содержат малый множитель ξ . Производная $\ddot{\xi}$ пропорциональна большой величине ω^2 и поэтому малой не является. Решая уравнение (5.14) с функцией f из (5.10) и принимая X за постоянную, получим

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \quad (5.15)$$

Теперь усредним уравнение (5.13) по тому же временному промежутку $\frac{2\pi}{\omega}$, что и выше. Учитывая, что средние значения средних степеней f и ξ равны нулю, получим

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi \frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} \overline{f \frac{\partial f}{\partial X}}.$$

Это уравнение относительно функции X . Перепишем его так

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{эфф}}}{dX},$$

где

$$U_{\text{эфф}} = U + \frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2} = \frac{1}{4m\omega^2} (f_1^2 + f_2^2).$$

Предполагается, что масса m частицы за период $\frac{2\pi}{\omega}$ не изменяется.

Сравнивая это уравнение с (5.15), приходим к выводу, что дополнительный к полю U член есть ни что иное, как средняя кинетическая энергия осцилляционного движения:

$$U_{\text{эфф}} = U + \frac{m}{2} \overline{\xi^2}. \quad (5.16)$$

Из (5.16) следует, что усреднение по осцилляциям движения частицы происходит так, как если бы, помимо постоянного поля U , действовало еще и дополнительное постоянное поле, которое определяется слагаемым $\frac{m}{2} \overline{\xi^2}$.

Из проведенного анализа видно, что уравнение (5.14) для колебательного смещения $\xi(t)$ и его решение не зависит от причин, которые его порождают: из (5.15) следует, что $\xi(t)$ зависит лишь от \vec{f} и ω , при этом несущественно, чем порождается сила \vec{f} , детерминированными или случайными факторами. К этому же выводу приходим, используя описанный выше метод усреднения для случая нескольких частиц, движущихся в поле U и претерпевающих быстрые осцилляции под воздействием дополнительной силы

$$\vec{f} = \sum_k f_{1k} \cos \omega_k t + f_{2k} \sin \omega_k t. \quad (5.17)$$

Каждый член в (5.17) отвечает высокочастотной осцилляции с частотой ω_k . При получении уравнений для осцилляционных смещений каждой частицы усреднения следует производить последовательно для каждой ω_k .

5.6. Применение зондирующих графов при исследовании динамики формирования фармакологических сиропов

Описанные выше методы воздействия на исходную фармакологическую массу, имеющие своей целью ускорение естественно протекающего процесса, чаще всего повторяются многократно. При этом фармакологический сироп на различных этапах его изготовления приходится подвергать зондированию с тем, чтобы убедиться в однородности его свойств и отсутствии в нем примесей,

наличие которых не соответствует паспортным данным. К числу таких примесей относятся, в частности, макромолекулы противоположной ориентации по отношению к нормальной ориентации основной массы макромолекул сиропа, получаемых при завершении действующего технологического режима. Чаще всего выявление молекул противоположной ориентации и их удаление из фармакологической массы представляет достаточно сложную техническую задачу. Вместе с тем присутствие таких молекул (наряду с нормальными молекулами) в готовой лекарственной форме может заметно снизить ее фармакологические свойства.

В последнее время при контрольном зондировании фармакологического сиропа предпринимаются попытки использовать зондирующие графы (ЗГ). Так называют графы, ребра которых представляют собой проводники, допускающие распространение вдоль них электрических импульсов, распространяющихся в них либо в обоих направлениях, либо в одном из них, а вершинами являются миниатюрные конденсаторы, на обкладки которых могут «натекать» заряды, находящиеся в фармакологическом сиропе. С помощью такого графа, помещенного в сироп, можно проследить за распределением в нем электрических зарядов и динамикой изменения их плотности во времени.

В фармакологическом сиропе в процессе его обработки возникают электростатические или квазистационарные электрические поля, наличие которых оказывает определенное влияние на формирование лекарственной формы. Наличие таких полей приводит к изменению термодинамических зависимостей между компонентами фармакологической смеси и изменению ее диэлектрических свойств. С помощью ЗГ, размещенных в различных участках рабочего пространства, в котором формируется лекарственная форма, можно выявить наличие указанных полей и зафиксировать их характеристики в различных точках пространства и их эволюцию во времени. Чаще всего ЗГ закрепляют в определенных точках рабочего пространства. Используются и ЗГ, свободно мигрирующие в фармакологической массе или перемещающиеся в ней лишь на незначительные расстояния.

С помощью ЗГ фиксируются перепады потенциала, возникающего в сиропе поля между точками, в которых расположены вершины ЗГ. Когда разность потенциалов между соседними вершинами (т. е. вершинами, соединенными проводящим ребром) достигает порогового уровня происходит разряд: от вершины А к вершине В (с меньшим, чем в А, потенциалом) распространяется порция заряда (импульс). Его попадание в вершину В может привести к тому, что потенциал в В будет превышать пороговый уровень по отношению к потенциалам вершин С, D, ..., которые соединены ребрами с В. Тогда импульсы из В будут распространяться из В в С, D, ... (или хотя бы в одну из этих вершин). Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока разность потенциалов между всеми вершинами графа не станет ниже порогового уровня. Так будет продолжаться до тех пор, пока новые порции зарядов, притекающие из фармакологического сиропа на конденсаторы вершин ЗГ не нарушат это равновесие. Описанный процесс достижения пороговых уровней и распространения импульсов в ЗГ носит случайный характер. Этот

процесс является неоднородным марковским процессом и помимо времени зависит и от положения точек, в которых находятся вершины ЗГ. Те варианты неоднородных случайных блужданий на графах, которые были рассмотрены, при соответствующей их адаптации к конкретному процессу могут быть использованы для зондирования фармакологической массы. При этом могут быть использованы разработанные алгоритмы и программы для исследования процессов случайных блужданий на графах. Лабораторные испытания, проведенные на основе этих программ, дали положительные результаты.

6. СИНТЕЗ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО ФРАГМЕНТАМ

При исследовании физических и экономических процессов в качестве математической модели часто используются марковские процессы. Обычно марковский процесс выбирается таким образом, что его распределение вероятностей в каждый момент времени соответствует параметрам, характеризующим рассматриваемую систему. Матрица переходных вероятностей описывает эволюцию системы во времени.

Метод синтеза, состоящий в построении модели исследуемого объекта по моделям его частей, для систем марковского типа означает восстановление матрицы переходных вероятностей марковского процесса по матрицам переходных вероятностей ее подсистем – фрагментов.

6.1. Разбиение марковского процесса на фрагменты

На непрерывном или дискретном множестве T , играющем роль времени, зададим марковский процесс $x(t)$, принимающий значения из множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$, называемом в дальнейшем множеством состояний. Через $p_j(t)$ будем обозначать вероятность нахождения системы в состоянии j в момент времени t . Поведение процесса определяется вероятностями перехода между состояниями i, j

$$p_{ij}(s, t) = P\{x(t) = j / x(s) = i\}, \quad i, j \in I.$$

Матрица $P(s, t) = \|p_{ij}(s, t)\|$, размерности $n \times n$, составленная из переходных вероятностей, называется переходной (или стохастической) матрицей марковского процесса. В дальнейшем будем опускать зависимость матрицы от времени и обозначать её P . Рассмотрим событие B , состоящее в том, что в момент времени t процесс будет находиться в классе состояний $\{1, 2, \dots, n-1\}$, являющимся подмножеством всего множества возможных состояний I :

$$B = (x(t) \in \{1, 2, \dots, n-1\}).$$

Будем рассматривать только такие события B , вероятность которых отлична от нуля: $P(B) > 0$. Это позволяет ввести на исходном вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ условные вероятности $P_B(A) = P(A/B) \quad \forall A \in F$ [37, 51] и, тем самым, перейти к пространству $\langle \Omega, F, P_B \rangle$. Проверим, что функция $P(A)$, задающая вероятность (меру) на F , действительно удовлетворяет всем требованиям вероятности:

1. $P_B(A) = P(AB)/P(B) \geq 0$ для любого события $A \in F$;

$$2. P_B(\Omega) = P(\Omega B) / P(B) = P(B) / P(B) = 1;$$

$$3. P_B(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = P((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m)B) / P(B) = \\ = (P(A_1 B) + P(A_2 B) + \dots + P(A_m B)) / P(B) = P_B(A_1) + P_B(A_2) + \dots + P_B(A_m)$$

для любых попарно непересекающихся событий $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Тогда условные переходные вероятности примут вид:

$$P_B(x(t) = j / x(t-1) = i) = P(x(t) = j / B, x(t-1) = i) = \\ = \frac{P(x(t) = j, B, x(t-1) = i)}{P(B, x(t-1) = i)} = \frac{P(x(t) = j, x(t-1) = i)}{P(x(t-1) = i)P(B / x(t-1) = i)} = \\ = \frac{P(x(t) = j / x(t-1) = i)}{P(B / x(t-1) = i)} = \frac{P_{ij}}{\sum_{k=1}^{n-1} P_{ik}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, мы можем построить стохастическую матрицу P' размерности $(n-1) \times (n-1)$, которая получена из исходной исключением состояния n . Аналогично, можно исключать любое состояние $k, 1 \leq k \leq n$, или группу состояний. При этом из стохастической матрицы исключаются строки и столбцы, соответствующие удаленным состояниям, а затем каждая из строк нормируется. Таким образом, мы снова получим стохастическую матрицу, но уже меньшей размерности.

Введём следующие обозначения. Пусть, по-прежнему, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество состояний. Под матрицей $P^{I_1}, I_1 \subset I$, будем понимать стохастическую матрицу, полученную из исходной стохастической матрицы P путём исключения тех строк и столбцов, индексы которых не содержатся в I_1 , с последующим делением оставшихся элементов строки на их сумму.

Исследуем, в каких случаях возможно по заданной системе фрагментов восстановить стохастическую матрицу P исходного марковского процесса.

6.2. Синтез процесса по двум фрагментам

Для решения задачи о синтезе стохастической матрицы по её фрагментам рассмотрим сначала объединение двух фрагментов, а затем обобщим полученные результаты и установим необходимые и достаточные условия указанного синтеза.

Пусть даны два фрагмента P^{I_1} и $P^{I_2}, I_1 \subset I, I_2 \subset I$. Предположим, что $I_1 \cap I_2 = I_0 \neq \emptyset, I_1 \cup I_2 = I$.

В таком случае мы можем вычислить элементы строк матрицы P , имеющие номера из множества I_0 (рис. 6.1). Покажем, как это можно сделать.

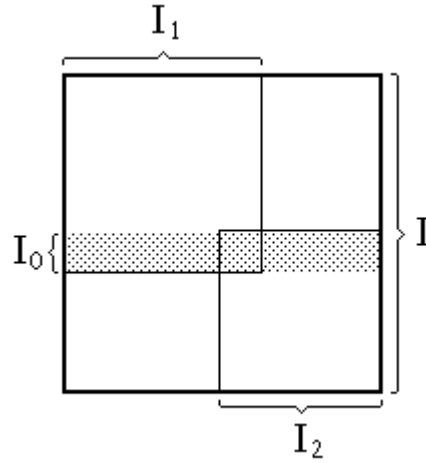


Рис. 6.1. Восстановление строк из пересечения фрагментов

Для каждой строки $i \in I_0$ обозначим

$$S'_{1i} = \sum_{j \in I_1 \setminus I_0} p_{ij},$$

$$S'_{2i} = \sum_{j \in I_2 \setminus I_0} p_{ij},$$

$$S_{1i} = \sum_{j \in I_1 \setminus I_0} p_{ij}^{I_1}, \quad (6.1)$$

$$S_{2i} = \sum_{j \in I_2 \setminus I_0} p_{ij}^{I_2}. \quad (6.2)$$

Поскольку

$$p_{ij}^{I_1} = \frac{p_{ij}}{1 - S'_{2i}}, \quad j \in I_1, \quad (6.3)$$

$$p_{ij}^{I_2} = \frac{p_{ij}}{1 - S'_{1i}}, \quad j \in I_2, \quad (6.4)$$

то, просуммировав равенства (6.3) по $j \in I_1 \setminus I_0$ и (6.4) по $j \in I_2 \setminus I_0$, получим следующую систему

$$S_{1i} = \frac{S'_{1i}}{1 - S'_{2i}},$$

$$S_{2i} = \frac{S'_{2i}}{1 - S'_{1i}}.$$

Это система уравнений относительно S'_{1i} и S'_{2i} . Решив ее, найдем

$$S'_{1i} = S_{1i} \frac{1 - S_{2i}}{1 - S_{1i} S_{2i}},$$

$$S'_{2i} = S_{2i} \frac{1 - S_{1i}}{1 - S_{1i} S_{2i}}.$$

Тогда переходные вероятности синтезируемой матрицы находятся из (6.3)-(6.4):

$$p_{ij} = p_{ij}^{I_1} \frac{1 - S_{2i}}{1 - S_{1i} S_{2i}}, \quad i \in I_0, j \in I_1, \quad (6.5)$$

$$p_{ij} = p_{ij}^{I_2} \frac{1 - S_{1i}}{1 - S_{1i} S_{2i}}, \quad i \in I_0, j \in I_2, \quad (6.6)$$

где S_{1i} , S_{2i} определены в (6.1)-(6.2). Таким образом, по формулам (6.5)-(6.6) можно вычислить элементы строк I_0 матрицы P .

Замечание 1. Для элементов p_{ij} , $i \in I_0$, $j \in I_0$, формулы (6.5)-(6.6) должны давать одинаковый результат, т.е. фрагменты P^{I_1} и P^{I_2} не являются независимыми:

$$p_{ij}^{I_1} (1 - S_{2i}) = p_{ij}^{I_2} (1 - S_{1i}), \quad i \in I_0, j \in I_0. \quad (6.7)$$

Это означает, что ij -й элемент достаточно задать только в одном из фрагментов P^{I_1} , P^{I_2} , $i \in I_0$, $j \in I_0$ (блоки $I_0 \times I_0$ матриц P^{I_1} и P^{I_2} могут быть известны не полностью). Фрагменты P^{I_1} и P^{I_2} будут независимы тогда и только тогда, когда множество $I_0 = I_1 \cap I_2$ содержит всего один элемент. В этом случае условие согласования (6.7) будет всегда выполнено.

Замечание 2. В определении элементов строк I_0 матрицы P участвовали только элементы строк I_0 фрагментов P^{I_1} и P^{I_2} , причем для нахождения i -ой строки матрицы P используются элементы той же строки фрагментов P^{I_1} и P^{I_2} .

Замечание 3. Если $I_1 \cup I_2 = I_3 \neq I$, то, проведя аналогичные рассуждения, по формулам (6.5)-(6.6) найдём элементы строк I_0 матрицы P^{I_3} .

Лемма 6.1. Если $I_2 \subset I_1$, то по матрице P^{I_1} можно найти P^{I_2} .

Доказательство.

Элементы фрагмента P^{I_1} , получены из P следующим образом:

$$p_{ij}^{I_1} = \frac{p_{ij}}{1-S_i}, \quad i, j \in I_1,$$

где $S_i = \sum_{k \in I \setminus I_1} p_{ik}$, $i \in I_1$.

Обозначим $S'_i = \sum_{k \in I_1 \setminus I_2} p_{ik}^{I_1} = \sum_{k \in I_1 \setminus I_2} \frac{p_{ik}}{1-S_i}$.

Теперь для каждого $i, j \in I_2$ рассмотрим отношение

$$\frac{p_{ij}^{I_1}}{1-S'_i} = \frac{\frac{p_{ij}}{1-S_i}}{1 - \frac{\sum_{k \in I_1 \setminus I_2} p_{ik}}{1-S_i}} = \frac{p_{ij}}{1-S_i - \sum_{k \in I_1 \setminus I_2} p_{ik}} = \frac{p_{ij}}{1 - \sum_{k \in I \setminus I_1} p_{ik} - \sum_{k \in I_1 \setminus I_2} p_{ik}}.$$

Так как $I_2 \subset I_1 \subset I$, то $(I \setminus I_1) \cup (I_1 \setminus I_2) = I \setminus I_2$, тогда

$$\sum_{k \in I \setminus I_1} p_{ik} + \sum_{k \in I_1 \setminus I_2} p_{ik} = \sum_{k \in I \setminus I_2} p_{ik}.$$

Значит $\frac{p_{ij}^{I_1}}{1-S'_i} = p_{ij}^{I_2}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что в нахождении элементов матрицы P^{I_1} принимают участие только элементы строк I_1 матрицы P^{I_2} .

6.3. Необходимые и достаточные условия синтеза

Пусть даны множества состояний I_1, I_2, \dots, I_m . Обозначим через I_Σ их объединение: $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m$. Введём множество

$$B_k = \{i : k \in I_i, 1 \leq i \leq m\}. \quad (6.8)$$

В этом множестве содержатся номера i тех множеств I_i , которые включают в себя индекс k (то есть номера тех фрагментов, которые содержат состояние k).

Лемма 6.2. Если для каждой пары состояний i, j существует фрагмент I_r , содержащий их одновременно, $\forall i, j \in I_\Sigma \exists r : i, j \in I_r, 1 \leq r \leq m$, и, кроме того, $I_r \neq I_\Sigma$, $r = 1, 2, \dots, m$, то каждое из множеств B_k , $k \in I_\Sigma$, содержит не менее двух элементов.

Доказательство.

Поскольку $k \in I_\Sigma$, то существует некоторое множество I_r , содержащее k . Тогда $r \in B_k$. Так как $I_r \neq I_\Sigma$, то существуют состояние j из множества $I_\Sigma \setminus I_r$, а также фрагмент I_s , содержащий состояния j и k одновременно: $\exists j \in I_\Sigma \setminus I_r \exists s : j, k \in I_s$.

Значит, множество B_k содержит также и элемент s . Лемма доказана.

Пусть условия леммы выполнены, и множество B_k содержит не менее двух элементов. Тогда существует его собственное подмножество A_k :

$$A_k \subset B_k, A_k \neq B_k, A_k \neq \emptyset. \quad (6.9)$$

При сделанных в лемме предположениях оно существует, поскольку B_k содержит не менее двух элементов. Рассмотрим объединение множеств $\bigcup_{i \in A_k} I_i$,

в которое включим те множества I_i , номера i которых содержатся во множестве A_k . Отметим, что каждое из множеств, попавших в объединение, содержит, по крайней мере, элемент k . То же самое справедливо и для объединения множеств вида $\bigcup_{i \in B_k \setminus A_k} I_i$. Тогда их пересечение

$$M_{A_k} = \left(\bigcup_{i \in A_k} I_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in B_k \setminus A_k} I_i \right). \quad (6.10)$$

также будет содержать элемент k .

Найдём необходимые и достаточные условия того, что по фрагментам $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ можно произвести синтез матрицы P^{I_Σ} , где $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m$.

Будем предполагать, что $I_r \neq I_\Sigma$, $r=1,2,\dots,m$, т.е. ни один фрагмент не совпадает с искомой матрицей, иначе задача окажется уже решённой.

Теорема 6.1. Пусть $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m = I_\Sigma$. Для того, чтобы по фрагментам $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ можно было произвести синтез матрицы P^{I_Σ} , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) любые два пересекающихся фрагмента (в том числе любые фрагменты, которые возникают из исходных путем синтеза) должны быть согласованы, т.е. для них должно выполняться условие согласования (6.7);

2) любой ij -й элемент восстанавливаемой матрицы P^{I_Σ} должен содержаться хотя бы в одном из фрагментов $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$: $\forall i, j \in I_\Sigma \exists k : i, j \in I_k, 1 \leq k \leq m$;

3) В пересечении фрагментов должен присутствовать хотя бы один неравный нулю элемент: $\forall k \in I_\Sigma \forall A_k \subset B_k \exists j \in M_{A_k} p_{kj}^{I_r} > 0, r \in B_k$, где A_k, B_k определены в (6.9)-(6.8).

Доказательство.

Необходимость.

1) Необходимость первого условия очевидна. Как было показано выше, фрагменты, вообще говоря, не являются независимыми.

2) Условие 2 докажем от противного. Предположим, что $\exists r, s \in I_\Sigma \forall I_k r \notin I_k \vee s \notin I_k$. Обозначим $I_0 = \{r, s\}$.

Введём произвольную стохастическую матрицу

$$P^{I_0} = \begin{bmatrix} p_{rr}^{I_0} & p_{rs}^{I_0} \\ p_{sr}^{I_0} & p_{ss}^{I_0} \end{bmatrix}.$$

Условие согласования выполнено для любого фрагмента P^{I_0} , т.к. пересечение I_0 с любым другим множеством из набора I_1, I_2, \dots, I_m будет содержать не более одного элемента. С другой стороны, фиксированной матрице P^{I_Σ} соответствует единственная матрица P^{I_0} . Значит, предположение неверно, и условие 2 теоремы является необходимым.

3) Условие 3 докажем от противного. Предположим, синтез произвести можно, но условие 3 не выполнено, т.е.

$$\exists k \in I_\Sigma \exists A_k \subset B_k \forall j \in M_{A_k} p_{kj}^{I_r} = 0, r \in B_k.$$

Обозначим $M = \bigcup_{i \in A_k} I_i, N = \bigcup_{i \in B_k \setminus A_k} I_i, M \cap N = M_{A_k}$.

Тогда элементы k -ой строки матрицы P^{I_Σ} имеют вид:

$$p_{kj}^{I_\Sigma} = \alpha p_{kj}^M, j \in M,$$

$$p_{kj}^{I_\Sigma} = (1 - \alpha) p_{kj}^N, j \in N,$$

где α – любое число из отрезка $[0; 1]$. Таким образом, однозначно определить k -ую строку матрицы P^{I_Σ} не удаётся. Полученное противоречие доказывает необходимость 3-го условия.

Достаточность.

Найдём k -ую строку матрицы P^{I_Σ} . Множество B_k , ввиду условия 2 теоремы и леммы, содержит не менее двух элементов. Возьмём $r \in B_k$ и рассмотрим множество

$$M_1 = I_r \cap \left(\bigcup_{i \in B_k \setminus \{r\}} I_i \right).$$

Согласно условию 3, существует $p_{kj}^{I_s} > 0$, $j \in M_1$, $s \in B_k \setminus \{r\}$.

Поскольку $k \in I_r \cap I_s$, то мы можем определить k -ую строку матрицы $P^{I_r \cup I_s}$ по формулам (6.5)-(6.6).

Если $I_r \cup I_s \neq I_\Sigma$, то $\{r, s\}$ является собственным подмножеством множества B_k , так как существует $j \in I_\Sigma \setminus (I_r \cup I_s)$ и, в силу условия 2, существует множество $I_t : k, j \in I_t$. Тогда $t \in B_k$, $t \neq r$, $t \neq s$.

Рассмотрим множество

$$M_2 = (I_r \cup I_s) \cap \left(\bigcup_{i \in B_k \setminus \{r, s\}} I_i \right).$$

Согласно условию 3, существует $p_{kj}^{I_q} > 0$, $j \in M_2$, $q \in B_k \setminus \{r, s\}$.

Поскольку $k \in (I_r \cup I_s) \cap I_q$, то мы можем определить k -ую строку матрицы $P^{I_r \cup I_s \cup I_q}$ по формулам (6.5)-(6.6).

Продолжаем эти действия до тех пор, пока не окажется, что $I_r \cup I_s \cup \dots = I_\Sigma$. Это будет означать, что мы полностью нашли k -ую строку матрицы P^{I_Σ} . Аналогичным образом найдём и другие строки. Доказательство завершено.

Отметим, что доказательство достаточности даёт метод синтеза матрицы P^{I_Σ} по её фрагментам.

Поясним условия теоремы.

Подчеркнем, что условие 1 теоремы распространяется и на любые фрагменты, которые возникают в ходе синтеза. Согласованности одних лишь исходных фрагментов оказывается недостаточно, что показывает следующий пример, предложенный Александром Лобасом (рис. 6.2). Пустые клетки означают, что данное состояние не вошло в рассматриваемый фрагмент.

	1	2	3	4
1	0,5	0,2		0,3
2	0,4	0,3		0,3
3				
4	0,75	0,25		0

а)

	1	2	3	4
1	0,1		0,8	0,1
2				
3	0,3		0,3	0,4
4	0,25		0,75	0

б)

	1	2	3	4
1				
2		0,5	0,2	0,3
3		0,3	0,3	0,4
4		0,75	0,25	0

в)

Рис. 6.2. Фрагменты марковского процесса, содержащие состояния:
а) $I_1 = \{1, 2, 4\}$; б) $I_2 = \{1, 3, 4\}$; в) $I_3 = \{2, 3, 4\}$

Попытаемся восстановить элементы строки 4. Несложно проверить, что условия 2 и 3 для нее выполнены: система фрагментов полностью покрывает строку 4, и в пересечении фрагментов имеются отличные от нуля элементы. Попарная согласованность также имеет место. В тоже время синтез фрагментов P^{I_1} и P^{I_2} дает четвертую строку в виде $(0,231 \quad 0,077 \quad 0,692 \quad 0)$, которая уже не будет согласована с фрагментом P^{I_3} .

Условие 2 говорит о том, что каждый ij -й элемент должен присутствовать хотя бы в одном из фрагментов $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$, другими словами, система фрагментов должна полностью покрывать синтезируемую матрицу. В предыдущем примере (рис. 6.2) система фрагментов полностью покрывала матрицу – любая клетка ij принадлежит хотя бы одному из фрагментов. В следующем же примере (рис. 6.3) первый элемент четвертой строки и четвертый элемент первой строки не содержатся ни в одном из фрагментов. Ввиду этого удастся провести лишь синтез строк 2 и 3, строки же 1 и 4 матрицы $P^{I_1 \cup I_2}$ не могут быть восстановлены.

	1	2	3	4
1	0,75	0	0,25	
2	0,3	0,3	0,4	
3	0,5	0,3	0,2	
4				

а)

	1	2	3	4
1				
2		0,15	0,2	0,65
3		0,45	0,3	0,25
4		0,4	0,4	0,2

б)

Рис. 6.3. Фрагменты марковского процесса, содержащие состояния:

$$\text{а) } I_1 = \{1, 2, 3\}; \text{ б) } I_2 = \{2, 3, 4\}$$

Условие 3 теоремы связано с тем, что в пересечении фрагментов должны существовать отличные от нуля элементы. Невыполнение этого условия иллюстрирует такой пример (рис. 6.4).

	1	2	3	4
1	0,3	0,2	0,5	
2	0,3	0,3	0,4	
3	0,75	0,25	0	
4				

а)

	1	2	3	4
1				
2				
3			0	1
4			0,4	0,6

б)

Рис. 6.4. Фрагменты, содержащие состояния:
а) $I_1 = \{1, 2, 3\}$; б) $I_2 = \{3, 4\}$

Объединение фрагментов P^{I_1} и P^{I_2} не дает возможности однозначно восстановить строку 3 фрагмента $P^{I_1 \cup I_2}$ ввиду того, что P^{I_1} и P^{I_2} пересекаются нулевым элементом.

Следствие. Для того, чтобы по фрагментам $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ можно было произвести синтез матрицы P , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись все условия доказанной выше теоремы и $I_\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$.

6.4. Невыполнение условия согласования фрагментов

Рассмотрим подробнее случай, когда условие 1 теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза не выполняется, а условия 2, 3 выполнены. Это может быть в том случае, когда во фрагменты $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ были внесены ошибки, связанные, например, с погрешностями измерений. Будем искать такую матрицу P , которая бы в некотором смысле минимально отклонялась от своих фрагментов.

Найдем k -ую строку матрицы P . В дальнейшем будем опускать индекс строки k и обозначать

$x_j = p_{kj}$ – искомые элементы k -ой строки матрицы P ;

$p_j^{I_i} = p_{kj}^{I_i}$ – заданные элементы k -ой строки фрагмента P^{I_i} .

Введём множество $B_{kj} = B_k \cap B_j = \{i : k, j \in I_i, 1 \leq i \leq m\}$. Это множество содержит номера i тех множеств I_i , которые включают в себя индексы k, j

одновременно. Заметим, что условие 2 теоремы эквивалентно тому, что $B_{kj} \neq \emptyset$ для любых $k, j \in I_\Sigma$.

Если бы условие согласования выполнялось, то элементы k -ой строки i -го фрагмента были бы пропорциональны соответствующим элементам k -ой строки исходной матрицы:

$$x_j = \beta_i p_j^{I_i}, i \in B_{kj}, j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$\beta_i = \sum_{j \in I_i} x_j, i \in B_k.$$

Будем искать такие x_j , сумма квадратов отклонений которых от величин $\beta_i p_j^{I_i}$ была бы минимальной. Это приводит к задаче минимизации:

$$y(x, \beta) = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i} (x_j - \beta_i p_j^{I_i})^2 \rightarrow \min_{x, \beta}; \quad (6.11)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1; \quad (6.12)$$

$$\sum_{j \in I_i} x_j = \beta_i, i \in B_k; \quad (6.13)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.14)$$

Это есть задача квадратичного программирования. Она имеет единственное решение, которое всегда можем найти. Целевая функция (6.11) при ограничениях (6.12)-(6.14) имеет единственный и притом глобальный минимум. Функция (6.11) неотрицательна при любом значении x_j . Очевидно, что в случае, когда условие согласования выполнено, решение задачи минимизации x^* будет совпадать с решением x^{**} , найденным по методу, приведенному в доказательстве теоремы. Действительно, x^{**} обращает целевую функцию (6.11) в ноль, являющийся, в силу свойств целевой функции, глобальным минимумом.

В задаче (6.11)-(6.14) временно уберем условие (6.14): $x_j \geq 0$. Оно будет выполняться в большинстве случаев. Тогда полученная задача будет иметь ограничения только в виде равенств и для (6.11)-(6.13) можем записать функцию Лагранжа:

$$L(x, \beta, \lambda, \mu) = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i} (x_j - \beta_i p_j^{I_i})^2 + \lambda \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{i \in B_k} \mu_i \left(\beta_i - \sum_{j \in I_i} x_j \right) \rightarrow \min_{x, \beta}.$$

Необходимым условием экстремума является равенство нулю частных производных по x , β от функции Лагранжа L :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 2 \sum_{i \in B_{kj}} (x_j - \beta_i p_j^{I_i}) + \lambda - \sum_{i \in B_{kj}} \mu_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = -2 \sum_{j \in I_i} p_j^{I_i} (x_j - \beta_i p_j^{I_i}) + \mu_i = 0, \quad i \in B_k.$$

Обозначим через $|B_{kj}|$ – количество элементов, содержащихся во множестве B_{kj} , и получим систему линейных уравнений относительно x , β , λ , μ .

$$x_j |B_{kj}| - \sum_{i \in B_{kj}} p_j^{I_i} \beta_i + \sum_{i \in B_{kj}} \mu_i + \lambda = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (6.15)$$

$$\sum_{j \in I_i} p_j^{I_i} x_j - \sum_{j \in I_i} (p_j^{I_i})^2 \beta_i - \mu_i = 0, \quad i \in B_k; \quad (6.16)$$

$$\sum_{j \in I_i} x_j - \beta_i = 0, \quad i \in B_k; \quad (6.17)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1. \quad (6.18)$$

Это есть необходимое условие минимума; оно же является и достаточным ввиду выпуклости целевой функции и ограничений. Сократим количество уравнений. Выразим β_i из (6.17) и подставим в (6.15):

$$x_j |B_{kj}| - \sum_{i \in B_{kj}} p_j^{I_i} \sum_{m \in I_i} x_m + \sum_{i \in B_{kj}} \mu_i + \lambda = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.19)$$

Теперь подставим β_i в (6.16)

$$\sum_{j \in I_i} p_j^{I_i} x_j - \sum_{j \in I_i} (p_j^{I_i})^2 \sum_{m \in I_i} x_m - \mu_i = \sum_{j \in I_i} x_j \left(p_j^{I_i} - \sum_{m \in I_i} (p_m^{I_i})^2 \right) - \mu_i = 0.$$

Из полученного соотношения выразим μ_i и подставим в (6.19):

$$\begin{aligned}
& x_j |B_{kj}| - \sum_{i \in B_{kj}} p_j^{I_i} \sum_{m \in I_i} x_m + \sum_{i \in B_{kj}} \sum_{r \in I_i} x_r \left(p_r^{I_i} - \sum_{m \in I_i} (p_m^{I_i})^2 \right) + \lambda = \\
& = x_j |B_{kj}| - \sum_{i \in B_{kj}} \left[p_j^{I_i} \sum_{r \in I_i} x_r + \sum_{r \in I_i} x_r \left(p_r^{I_i} - \sum_{m \in I_i} (p_m^{I_i})^2 \right) \right] + \lambda = 0.
\end{aligned}$$

Окончательно получим систему $(n+1)$ линейных уравнений относительно $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$:

$$x_j |B_{kj}| - \sum_{i \in B_{kj}} \sum_{r \in I_i} x_r \left(p_j^{I_i} + p_r^{I_i} - \sum_{m \in I_i} (p_m^{I_i})^2 \right) + \lambda = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (6.20)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1. \quad (6.21)$$

Если будут выполнены условия 2, 3 теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза, то, решив систему, найдем элементы k -ой строки матрицы P . Если же хотя бы одно из этих условий не будет выполнено, то однозначно восстановить k -ю строку будет невозможно, и система будет иметь бесконечно много решений. Таким образом, полученная система уравнений будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда выполнены условия 2, 3 теоремы.

Оценим сложность вычислений. Для синтеза матрицы размерности $n \times n$ необходимо решить n линейных систем размерности $n \times n$. Решение ищем методом Гаусса, сложность которого имеет порядок n^3 . Таким образом, общее время вычислений растет пропорционально n^4 .

В большинстве случаев решение системы уравнений (6.20)-(6.21) будет давать решение задачи (6.11)-(6.14), то есть неравенство (6.14) будет выполнено. Может, однако, оказаться, что мы получим некоторые $x_j < 0$. Тогда будем применять общий подход к решению задачи (6.11)-(6.14). Для решения могут быть использованы такие методы условной оптимизации, как метод Кели, штрафных функций, проекций градиента, модифицированных функций Лагранжа [145], но ввиду квадратичности функции цели и линейности ограничений, целесообразно применять специальные методы решения задач квадратичного программирования [69, 145]. Для нахождения оптимального решения задачи квадратичного программирования будем применять дифференциальный алгоритм [69], представляющий собой модификацию метода покоординатного спуска. Иной подход, основанный на решении двойственной задачи, приведен в [145]. Однако, его недостатком является более сложная организация вычислений.

Пусть x_q – зависимая переменная, а x_r – независимые переменные ($r=1,2,\dots,q-1,q+1,\dots,n$). Тогда из (6.12) имеем

$$x_q = 1 - \sum_{r \neq q} x_r.$$

Запишем частные производные минимизируемой функции $y(x, \beta)$ по независимым переменным x_r , рассматривая их как производные сложной функции $y(x, x_q(x), \beta(x))$, где $x = (x_1, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_n)$ – вектор независимых переменных. При этом учтем, что

$$\partial x_q / \partial x_r = -1,$$

$$\partial \beta_i / \partial x_r = \begin{cases} 1, & i \in B_{kr}; \\ 0, & i \notin B_{kr}. \end{cases}$$

Тогда условные производные [69] примут вид:

$$\begin{aligned} \delta y / \delta x_r &= \partial y / \partial x_r + \sum_{i=1}^m (\partial y / \partial \beta_i) (\partial \beta_i / \partial x_r) + (\partial y / \partial x_q) (\partial x_q / \partial x_r); \\ \delta y / \delta x_r &= \partial y / \partial x_r + \sum_{i \in B_{kr}} \partial y / \partial \beta_i - \partial y / \partial x_q, \quad r \neq q. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Аналогично, можем получить соотношение для второй условной производной ($r \neq q$):

$$\delta^2 y / \delta x_r^2 = 2|B_{kr}| - 2 \sum_{i \in B_{kr}} \left(2p_r^{I_i} - \sum_{j \in I_i} (p_j^{I_i})^2 \right) + 4 \sum_{i \in B_{kr}} p_q^{I_i} + 2|B_{kq}|.$$

В [69] показано, что необходимым условием минимума для задачи (6.11)-(6.14) является равенство нулю условных производных (6.22) по положительным независимым переменным и неотрицательность условных производных (6.22) по нулевым независимым переменным (условие Куна-Такера):

$$\partial y / \partial x_r = 0, \text{ если } x_r > 0, \quad r \neq q,$$

$$\partial y / \partial x_r \geq 0, \text{ если } x_r = 0, \quad r \neq q.$$

Кроме того, ввиду выпуклости целевой функции и области ограничений, для всякого допустимого решения необходимые условия будут также и

достаточными. Это означает, что если выполнено условие Куна-Такера и $x_q \geq 0$, то полученное решение x является оптимальным.

Дифференциальный алгоритм относится к итерационным методам и состоит в том, что на k -ом шаге изменяется только одна из независимых переменных:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)},$$

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}, \quad j \neq r, \quad j \neq q.$$

Причем значение $\Delta x_r^{(k)}$ выбирается из анализа условий Куна-Такера. Нарушение этих условий в точке $x^{(k)}$ может произойти по двум причинам:

1) если $(\delta y / \delta x_r)^{(k)} > 0$, $x_r > 0$,

то полагаем $\Delta x_r^{(k)} = \max \left\{ -x_r; -(\delta y / x_r)^{(k)} / (\delta^2 y / x_r^2)^{(k)} \right\}$;

2) если $(\delta y / \delta x_r)^{(k)} < 0$,

то полагаем $\Delta x_r^{(k)} = \min \left\{ x_q; -(\delta y / x_r)^{(k)} / (\delta^2 y / x_r^2)^{(k)} \right\}$.

Вычисляем новые значения независимой и зависимой переменных:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)},$$

$$x_q^{(k+1)} = x_q^{(k)} - \Delta x_r^{(k)}.$$

Если значение $\Delta x_r^{(k)}$ выбиралось из соображений обращения в нуль независимой переменной x_r или условной производной по ней, то система зависимых и независимых переменных остается прежней, в противном случае независимая переменная x_r и зависимая x_q меняются ролями. После этого переходим к $(k+1)$ итерации. Алгоритм завершается, если условия Куна-Такера выполнены, либо после некоторого наперед заданного числа итераций (в [69] приведены примеры, когда применение данного алгоритма приводит к последовательности точек $x^{(k)}$, асимптотически приближающейся к оптимальному решению x^* , но не достигающей его). Как правило, условия Куна-Такера оказываются выполненными через конечное число шагов. Достоинством метода является и то, что все точки последовательности $x^{(k)}$ принадлежат области допустимых решений.

Таким образом, для решения задачи (6.11)-(6.14) мы сначала решаем систему линейных уравнений (6.20)-(6.21) и, если полученное решение не является допустимым, то полагаем отрицательные элементы равными нулю:

$$x'_r = x_r, \text{ если } x_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, n,$$

$$x'_r = 0, \text{ если } x_r < 0, r = 1, 2, \dots, n.$$

А затем применяем дифференциальный алгоритм квадратичного программирования, беря в качестве начальной точки $x^{(0)}$:

$$x_r^{(0)} = \frac{x'_r}{\sum_{j=1}^n x'_j}, r = 1, 2, \dots, n.$$

Мы не применяем алгоритм квадратичного программирования сразу, потому что, как правило, оптимальное допустимое решение удастся найти из линейной системы (6.20)-(6.21).

6.5. Достоверность синтезируемой матрицы

После того, как найдено решение $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, возникает вопрос о том, насколько существенным является отличие от нуля целевой функции (6.11), другими словами, являются ли на самом деле стохастические матрицы $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ фрагментами некоторого марковского процесса или нет. Ведь решение задачи (6.11)-(6.14) может быть найдено для любых исходных данных $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$, не обязательно являющихся фрагментами какого-либо марковского процесса. Для ответа на этот вопрос построим статистический критерий.

Пусть наблюдаемые значения фрагментов $p_j^{I_i}$, подставляемые в задачу минимизации (6.11)-(6.14), представляют собой реализации нормально распределенных случайных величин $\xi_j^{I_i}$ с неизвестным математическим ожиданием $a_j^{I_i} = M\xi_j^{I_i}$ и известной дисперсией $(\sigma_j^{I_i})^2$. Будем предполагать также, что наши наблюдения несмещенные: величины $a_j^{I_i}$ совпадают с истинными значениями соответствующих элементов стохастических матриц фрагментов.

Выдвинем гипотезу, состоящую в том, что наблюдаемые нами значения $p_j^{I_i}$ представляют собой реализации элементов матриц P^{I_i} , являющихся фрагментами некоторого марковского процесса P . Проверим эту гипотезу. Рассмотрим случайные величины

$$\zeta_{ij} = \left(\frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right) / \sigma_j^{I_i}.$$

Случайные величины ζ_{ij} нормально распределены. Найдем их математические ожидания и дисперсии.

$$M\zeta_{ij} = \left(\frac{p_j}{\beta_i} - a_j^{I_i} \right) / \sigma_j^{I_i}.$$

Заметим, что $\frac{p_j}{\beta_i} - a_j^{I_i} = 0$, так как подстановка $a_j^{I_i}$ в задачу минимизации (6.11)-(6.14) дает решение p_j , $j = 1, 2, \dots, n$, причем $y(p, \beta, a) = 0$ ввиду того, что $a_j^{I_i}$ – точные значения фрагментов. Равенство же $y(p, \beta, a) = 0$ достижимо тогда и только тогда, когда

$$p_j - \beta_i a_j^{I_i} = 0, \quad j \in I_i, \quad i \in B_k.$$

Следовательно, $M\zeta_{ij} = 0$.

Дисперсия ζ_{ij} равна $D\zeta_{ij} = 1$.

Обозначим через m_i количество элементов, содержащихся во множестве I_i и рассмотрим вопрос о независимости случайных величин ζ_{ij} . Величины ζ_{ij} и ζ_{kl} являются независимыми при $i \neq k$, т.к. принадлежат различным фрагментам. Среди случайных величин ζ_{ij} , $j \in I_i$, принадлежащих одному фрагменту I_i только $m_i - 1$ случайных величин будут независимы. Действительно, для каждой строки стохастической матрицы фрагмента выполнено равенство

$$\sum_{j \in I_i} \xi_j^{I_i} = 1, \quad i \in B_k,$$

а, следовательно, и величины ζ_{ij} также будут линейно зависимыми. Из каждого набора ζ_{ij} , $j \in I_i$, выбросим элемент ζ_{ir_i} , чтобы оставшиеся величины были независимы, и построим сумму:

$$\eta = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i \setminus \{r_i\}} \zeta_{ij}^2. \quad (6.23)$$

Мы имеем дело с суммой независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. В этом случае построенная нами случайная величина η имеет χ^2 распределение с $N - 1$ степенями свободы [123], где N – число слагаемых в сумме (6.23):

$$N = \sum_{i \in B_k} (m_i - 1).$$

Таким образом, следуя приведенному выше алгоритму, мы сможем найти критическое значение χ_{kp}^2 , соответствующее распределению χ^2 с $N - 1$ степенями свободы и выбранной доверительной вероятности p_0 , и, сравнив его со значением, вычисленным по формуле (6.23), проверить гипотезу о том, что наблюдаемые нами величины являются фрагментами некоторого марковского процесса. Если $\eta < \chi_{kp}^2$, то выдвинутая гипотеза принимается. Если же $\eta \geq \chi_{kp}^2$, то гипотеза отклоняется. Это говорит о том, что, либо ζ_{ij} не являются элементами фрагментов некоторого марковского процесса, либо погрешности наблюдений слишком велики.

Примеры обработки конкретных данных приведены в приложении А. В 1-ом примере иллюстрируется случай, когда не выполнено условие 1 (условие согласования) теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза. Для этого в исходные данные вносились нормально распределённые ошибки с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0,01$. Значение функции цели составило $F = 0,0004$. Проверка гипотезы о том, являются ли исходные данные фрагментами некоторого марковского процесса, показала, что для выбранной доверительной вероятности $p = 0,95$ опытные данные не противоречат выдвинутой гипотезе.

На примере 2 показан случай невыполнения условий 2 и 3 теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза. Для строк 1, 6 не было выполнено 2-е условие – не было полной информации по всем состояниям (по имеющимся данным, например, для строки 1 можно восстановить лишь соответствующую строку фрагмента $\{1, 2, \dots, 5\}$). Для строк 3, 4 не было выполнено 3-е условие теоремы – система фрагментов оказалась недостаточна для проведения синтеза. В результате удалось успешно восстановить только строки 2, 5 синтезируемой матрицы P .

В примере 3 рассмотрен случай выполнения необходимых и достаточных условий синтеза. Решение задачи минимизации, полученное из линейной системы, даёт то же значение, что и непосредственное применение метода, изложенного в доказательстве теоремы. Это видно из того, что целевая функция $F = 0$. В этом также можно убедиться непосредственным разложением синтезированной матрицы на фрагменты.

6.6. Синтез процесса со счетным числом состояний

Предложенный выше подход к синтезу марковского процесса по фрагментам применим и в случае счетного числа состояний. Будем предполагать, что фрагменты могут содержать счетное число состояний, и что для каждой строки сумма ряда из ее элементов равна 1. Если выполнены все условия теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза, то мы можем провести синтез всей матрицы (возможно, за счетное число шагов), применяя алгоритм, описанный выше. При этом конечный фрагмент мы можем получить за конечное число шагов.

Последовательность элементов, стоящих на одном и том же месте "расширяющихся" фрагментов (последовательность $p_{ij}^{I_1}, p_{ij}^{I_1 \cup I_2}, p_{ij}^{I_1 \cup I_2 \cup I_3} \dots$) всегда сходится к некоторому пределу p_{ij}^∞ , т.к. эта последовательность монотонно не возрастает (при синтезе элементы не возрастают) и ограничена снизу ($p_{ij} \geq 0$).

Предположим, состояние i содержится в счетном множестве фрагментов. Восстановим элементы i -ой строки стохастической матрицы, соответствующей всему процессу.

Если выполнены все условия теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза, то, используя метод, приведенный в ее доказательстве, можем построить последовательность расширяющихся фрагментов для каждого ij -го элемента строки i . Отличие от конечного случая состоит в том, что возникающие суммы будут бесконечными (это будут подряды абсолютно сходящихся рядов с равной 1 суммой).

При этом возможны случаи, когда получаемые предельные значения p_{ij}^∞ не будут давать решения. Например, i -я строка может иметь вид

$$p_i^{\{1,2,\dots,n\}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right).$$

Такая строка может быть получена при синтезе фрагментов конечной размерности, у которых элементы i -ой строки одинаковы:

$$p_i^{I_k} = \left(\frac{1}{|I_k|}, \frac{1}{|I_k|}, \dots, \frac{1}{|I_k|} \right),$$

где $|I_k|$ – размерность конечного фрагмента. В этом случае предельные значения $p_{ij}^\infty = 0$ для всех элементов i -ой строки.

Поэтому для синтеза марковских процессов со счетным числом состояний оказывается необходимым следующее дополнительное условие.

Если в i -ой строке существует конечное или бесконечное множество элементов, сходящихся к положительным пределам

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{ij}^{I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m} = p_{ij}^{\infty} > 0,$$

$$\sum_{j: p_{ij}^{\infty} > 0} p_{ij}^{\infty} = 1,$$

то строка может быть восстановлена полностью. В противном случае, могут быть найдены только те элементы, пределы которых положительны. При этом утрачивается смысл стохастичности матрицы.

Заметим, что если состояние i содержится лишь в конечном числе фрагментов, то i -я строка синтезируемой матрицы будет полностью восстановлена за конечное число шагов, а сумма ее элементов будет равна 1. Следовательно, в такой ситуации указанное выше условие будет всегда выполнено.

6.7. Марковские процессы в широком смысле

Рассмотрим марковский процесс в широком смысле, заданный в фазовом пространстве $\{X, \mathbf{B}\}$ с вероятностями перехода

$$P(s, x, t, B) = P\{\xi(t) \in B / \xi(s) = x\}, \quad x \in X, \quad B \in \mathbf{B}, \quad s < t,$$

где \mathbf{B} – борелевская σ -алгебра [49]. В дальнейшем будем опускать зависимость от s, t и писать $P(x, B)$. Пусть $A, B \in \mathbf{B}$, обозначим $P^A(x, B)$ – вероятность перехода из x в B при условии, что процесс остается в A :

$$P^A(x, B) = P(x, B / \xi(t) \in A) = \frac{P(x, B \cap A)}{P(x, A)}, \quad x \in A.$$

Случайный процесс в фазовом пространстве $\{A, \mathbf{A}\}$, описываемый переходной функцией $P^A(x, B)$, $B \in \mathbf{A}$, будем называть фрагментом исходного марковского процесса $P(x, B)$. Отметим, что полученный фрагмент не является марковским процессом, так как для него, вообще говоря, соотношение Чепмена-Колмогорова [49] может быть не выполнено. Изучим вопрос о том, в каком случае удастся провести синтез всего процесса по его фрагментам, т.е. восстановить (полностью или частично) вероятности перехода $P(x, B)$ в фазовом пространстве $\{X, \mathbf{B}\}$. Приводимые ниже рассуждения опираются на аналогичные, проведенные для марковских процессов с конечным или счетным числом состояний [10].

Найдем стохастическое ядро $P(x, B)$ [50], если известны стохастические ядра $P^{A_1}(x, B)$ и $P^{A_2}(x, B)$, где

$$A_1 \cup A_2 = X, \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset.$$

Введем следующие обозначения

$$S_1 = P(x, A_1 \setminus A_2) = \int_{A_1 \setminus A_2} P(x, dy),$$

$$S_2 = P(x, A_2 \setminus A_1) = \int_{A_2 \setminus A_1} P(x, dy),$$

$$S'_1 = P^{A_1}(x, A_1 \setminus A_2) = \int_{A_1 \setminus A_2} P^{A_1}(x, dy),$$

$$S'_2 = P^{A_2}(x, A_2 \setminus A_1) = \int_{A_2 \setminus A_1} P^{A_2}(x, dy), \quad x \in A_1 \cap A_2.$$

Тогда

$$P^{A_1}(x, B) = \frac{P(x, B \cap A_1)}{1 - P(x, A_2 \setminus A_1)} = \frac{P(x, B \cap A_1)}{1 - S_2}, \quad (6.24)$$

$$P^{A_2}(x, B) = \frac{P(x, B \cap A_2)}{1 - P(x, A_1 \setminus A_2)} = \frac{P(x, B \cap A_2)}{1 - S_1}. \quad (6.25)$$

Подставляя вместо множества B частичное множество dy , получим

$$P^{A_1}(x, dy) = \frac{P(x, dy)}{1 - S_2}, \quad dy \in A_1;$$

$$P^{A_2}(x, dy) = \frac{P(x, dy)}{1 - S_1}, \quad dy \in A_2.$$

Проинтегрировав первое равенство по $A_1 \setminus A_2$, а второе по $A_2 \setminus A_1$, получим

$$S'_1 = \frac{S_1}{1 - S_2},$$

$$S'_2 = \frac{S_2}{1 - S_1}.$$

Выражая отсюда S_1 и S_2 и подставляя в (6.24)-(6.25), находим переходные вероятности синтезируемого процесса:

$$\begin{aligned}
 P(x, dy) &= P^{A_1}(x, dy) \frac{1 - S_2'}{1 - S_1' S_2'}, \quad dy \in A_1, \\
 P(x, dy) &= P^{A_2}(x, dy) \frac{1 - S_1'}{1 - S_1' S_2'}, \quad dy \in A_2, \\
 P(x, B) &= P(x, B \cap A_1) + P(x, B \cap (A_2 \setminus A_1)) = \\
 &= \frac{P^{A_1}(x, B \cap A_1)(1 - S_2') + P^{A_2}(x, B \cap (A_2 \setminus A_1))(1 - S_1')}{1 - S_1' S_2'}, \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

где $x \in A_1 \cap A_2$. Таким образом, мы можем восстановить значения стохастического ядра для $x \in A_1 \cap A_2$. Если $A_1 \cup A_2 \neq X$, то проведя аналогичные рассуждения, мы найдем значения стохастического ядра $P^{A_1 \cup A_2}(x, B)$.

Отметим, что фрагменты P^{A_1} , P^{A_2} не являются независимыми – для того, чтобы синтезируемое стохастическое ядро было восстановлено однозначно, необходимо выполнение условия согласования:

$$P^{A_1}(x, B)(1 - S_2') = P^{A_2}(x, B)(1 - S_1'), \quad (6.27)$$

где $x \in A_1 \cap A_2$, $B \subset A_1 \cap A_2$.

Далее применимы все те подходы и результаты, что и для цепей Маркова с конечным или счетным множеством состояний, изложенные выше. Пусть имеется конечная или счетная система множеств: $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$ такая, что

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_{\Sigma}$. Введем множество

$$V_x = \{i : x \in A_i, i = 1, 2, \dots, m, \dots\}. \quad (6.28)$$

В это множество включаются номера фрагментов, содержащих точку x . Будем предполагать, что для любых двух точек x, y существует множество A_i , содержащее эти точки одновременно. Тогда, как было показано в лемме 2, множество V_x содержит не менее двух элементов. Пусть U_x – собственное подмножество множества V_x :

$$U_y \subset V_y, U_x \neq V_x, U_x \neq \emptyset. \quad (6.29)$$

При сделанных выше предположениях оно существует. Обозначим

$$M_{U_x} = \left(\bigcup_{i \in U_x} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in V_x \setminus U_x} A_i \right).$$

Из определения следует, что $y \in M_{U_x}$. Действительно, если выполнено (6.29), то каждое объединение состоит из множеств, содержащих, по крайней мере, точку x . Имеет место следующая теорема о необходимых и достаточных условиях синтеза по фрагментам марковского процесса в широком смысле.

Теорема 6.2. Для того, чтобы по фрагментам $P^{A_1}, P^{A_2}, \dots, P^{A_m}, \dots$ можно было провести синтез процесса P^{A_Σ} , необходимо и достаточно, чтобы:

1) для любых двух пересекающихся фрагментов выполнялось условие согласования: $P^{A_1}(x, B)(1 - S'_2) = P^{A_2}(x, B)(1 - S'_1)$, $x \in A_1 \cap A_2$, $B \subset A_1 \cap A_2$, в том числе и для любых фрагментов, возникающих в ходе синтеза;

2) для любых двух точек $x, y \in A_\Sigma$ существовало множество A_k из совокупности $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$, содержащее эти точки одновременно;

3) $\forall x \in A_\Sigma \forall U_x \subset V_x \int_{y \in M_{U_x}} P^{A_r}(x, dy) > 0$, $r \in V_x$, где U_x, V_x определены

в (6.28)-(6.29).

Доказательство теоремы совпадает с доказательством для случая дискретного числа состояний, приведенного выше, только теперь переходные вероятности процесса вычисляются с использованием формулы (6.26). При этом стохастическое ядро удается синтезировать за конечное число шагов.

Предположим, имеется счетная система фрагментов $P^{A_1}, P^{A_2}, \dots, P^{A_m}, \dots$ и $A_\Sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Если выполнены все условия теоремы о необходимых и достаточных условиях, то мы можем синтезировать процесс со стохастическим ядром P^{A_Σ} (возможно за счетное число шагов). Последовательность элементов, стоящих на одном и том же месте "расширяющихся фрагментов" (последовательность $P^{A_1}(x, B)$, $P^{A_1 \cup A_2}(x, B)$, ... для любых фиксированных x, B), монотонно не возрастает в силу (6.24) и ограничена снизу ввиду неотрицательности вероятности. Следовательно, существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m}(x, B) = P^\infty(x, B).$$

Если возникающие предельные вероятности удовлетворяют равенству

$$\int_{y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} P^{\infty}(x, dy) = 1 ,$$

то вероятности перехода из точки x удастся восстановить полностью. Если же значение интеграла оказывается меньше единицы, то нарушается закон полной вероятности и это означает, что фрагменты $P^{A_1}, P^{A_2}, \dots, P^{A_m}, \dots$ не являются фрагментами одного и того же процесса, т.е. они не согласованы.

6.8. Процесс блуждания на графах

При исследовании случайных процессов часто используют соответствующим образом выбранные процессы случайных блужданий на графе [25, 123]. Это является обобщением процесса случайного блуждания на прямой с некоторыми точками сброса. Если известны лишь разрозненные данные о процессе, начальная задача состоит в том, чтобы по ним восстановить процесс. При переходе к процессу блужданий на графе задача заключается в восстановлении графа по его подграфам. Часто данных для ее решения недостаточно; вместе с тем по ним можно найти некоторые важные характеристики процесса блужданий, а, значит, и соответствующие им характеристики исходного процесса. В связи с этим возникает задача об отыскании вектора распределения финальных вероятностей процесса блужданий на графе по некоторой системе его подграфов.

Рассмотрим процесс случайных блужданий частицы на связном графе без циклов (дереве). Расположим граф таким образом, чтобы его корень был слева, а ветви шли слева направо (рис. 6.5). Будем предполагать, что смещение частицы происходит в дискретные моменты времени, которые, вообще говоря, могут иметь точки сгущения. На каждом шаге частица может смещаться лишь в те вершины графа, попасть в которые можно, идя по ребрам только влево или только вправо; другими словами, движение не может смениться на противоположное. Например, из вершины i_4 частица за один шаг может перейти в вершины i_1, i_5, i_6 , но не может попасть в i_2 или i_3 (рис. 6.5). Вершина i_1 (корень дерева) является точкой сброса, т.е. из каждой вершины с некоторой вероятностью частица может попасть в i_1 . Возможна также ситуация, когда некоторые другие вершины графа будут являться точками сброса. В этом случае на каждом шаге частица с некоторой вероятностью будет попадать в ближайшую слева точку сброса. Например, если i_2 – точка сброса, то из i_3 частица может перейти в i_2 , но не может за один шаг попасть в i_1 (рис. 6.5).

Такие блуждания представляют собой неоднородный марковский процесс с дискретным временем и числом состояний n , равном количеству вершин рассматриваемого графа. Занумеруем вершины графа натуральными

числами, и под состоянием k будем понимать нахождение частицы в вершине с номером k .

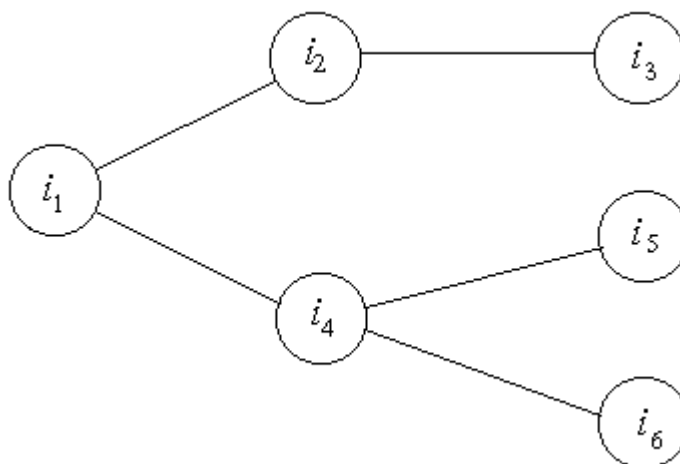


Рис. 6.5. Блуждания частицы на графе

Сначала рассмотрим случай, когда из корня дерева исходит только две ветви. Пусть состояние m соответствует корню дерева. Тогда матрица переходных вероятностей будет иметь структуру (6.30). Отметим, что если за один шаг частица при смещении влево не может пройти далее точки ветвления (корня ветви, на которой она находится), то левый верхний и правый нижний блоки матрицы будут иметь ту же структуру, что и вся матрица (6.30). Такая ситуация возникает при наличии нескольких точек сброса в графе.

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,m-1} & P_{1,m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m-1,1} & \dots & P_{m-1,m-1} & P_{m-1,m} & 0 & \dots & 0 \\ P_{m,1} & \dots & P_{m,m-1} & P_{m,m} & P_{m,m+1} & \dots & P_{m,n} \\ 0 & \dots & 0 & P_{m+1,m} & P_{m+1,m+1} & \dots & P_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & P_{n,m} & P_{n,m+1} & \dots & P_{n,n} \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Рассмотрим отдельно верхнее поддерево, соответствующее левому верхнему блоку матрицы P . Для этого поставим отражающие экраны в тех точках нижнего поддерева, в которые частица может попасть из корня дерева. Это означает, что вместо того, чтобы идти на нижнее поддерево, частица будет оставаться в корне дерева – состоянии m . Обозначим через I_1 множество, содержащее номера вершин, входящих в верхнее поддерево. Марковский процесс, протекающий на поддереве, состоящем из множества состояний I_1 , и полученный из исходного путем установки отражающих экранов в тех

вершинах дерева, которые имеют общее ребро с вершиной поддерева I_1 , будем называть фрагментом исходного марковского процесса, заданного на всем множестве состояний I . Пусть $P^{I_1} = \left\| p_{ij}^{I_1} \right\|$ – матрица переходных вероятностей, $i, j, m \in I_1$.

Очевидно, что

$$p_{ij}^{I_1} = p_{ij}, \quad i, j \in I_1 \setminus \{m\},$$

$$p_{mm}^{I_1} = 1 - \sum_{i \in I_1 \setminus \{m\}} p_{im}^{I_1}.$$

Согласно теореме Перрона, матрицы P и P^{I_1} имеют максимальное собственное число равное 1 и соответствующие неотрицательные собственные векторы p^* и p^{*I_1} . Если пронормировать эти собственные векторы, то они будут представлять собой финальные распределения марковских процессов, отвечающих фрагментам I_1, I_2 .

Лемма. Единичные собственные векторы фрагмента P^{I_1} и матрицы P связаны соотношением

$$p_j^{*I_1} = \alpha p_j^*, \quad j \in I_1, \quad \alpha = 1 / \sum_{j \in I_1} p_j^*.$$

Доказательство. Покажем, что $p_j^{*I_1}$ есть единичный собственный вектор фрагмента P^{I_1} . При $k \neq m$:

$$\sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = \alpha \sum_{j \in I_1} p_j^* p_{jk}.$$

Поскольку $p_{jk} = 0$ при $j \notin I_1, k \in I_1 \setminus m$, то

$$\alpha \sum_{j \in I_1} p_j^* p_{jk} = \sum_{j=1}^n p_j^* p_{jk} = \alpha p_k^* = p_j^{*I_1}.$$

При $k = m$ имеем $p_{jm}^{I_1} = 1 - \sum_{k \in I_1 \setminus \{m\}} p_{jk}^{I_1}$. Тогда

$$\sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jm}^{I_1} = \sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} \left(1 - \sum_{k \in I_1 \setminus \{m\}} p_{jk}^{I_1} \right) = \sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} - \sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} \sum_{k \in I_1 \setminus \{m\}} p_{jk}^{I_1} =$$

$$= 1 - \sum_{k \in I_1 \setminus \{m\}} \sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1}.$$

Как было показано выше, при $k \in I_1 \setminus \{m\}$ имеет место равенство

$$\sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = p_k^{I_1}.$$

Отсюда следует, что $\sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jm}^{I_1} = 1 - \sum_{k \in I_1 \setminus \{m\}} p_k^{*I_1} = p_m^{*I_1}$.

Таким образом, $\sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = p_k^{I_1}$, $k \in I_1$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть имеются два фрагмента P^{I_1} и P^{I_2} , $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, n\}$ с финальными распределениями p^{*I_1} и p^{*I_2} соответственно. Восстановим по ним финальное распределение всего процесса P в целом.

$$p_i^* = x p_i^{*I_1}, \quad i \in I_1, \quad (6.31)$$

$$p_i^* = y p_i^{*I_2}, \quad i \in I_2. \quad (6.32)$$

Поскольку $I_1 \cap I_2 = \{m\}$, то $x p_m^{*I_1} = y p_m^{*I_2}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n p_i^* = \sum_{i \in I_1} p_i^* + \sum_{i \in I_2} p_i^* - p_m^* = x \sum_{i \in I_1} p_i^{*I_1} + y \sum_{i \in I_2} p_i^{*I_2} - x p_m^{*I_1} = \\ &= x + y - x p_m^{*I_1}. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений, находим

$$x = \frac{p_m^{*I_2}}{p_m^{*I_1} + p_m^{*I_2} - p_m^{*I_1} p_m^{*I_2}},$$

$$y = \frac{p_m^{*I_1}}{p_m^{*I_1} + p_m^{*I_2} - p_m^{*I_1} p_m^{*I_2}}.$$

Отсюда по формулам (6.31)-(6.32) можем найти финальное распределение p^* . Отметим, что для решения этой задачи нам достаточно лишь знания единичных собственных векторов, а не фрагментов полностью.

Если из корня дерева исходит k ребер, то мы можем разбить марковский процесс на k фрагментов $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_k}$, $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k = \{1, 2, \dots, n\}$, $I_i \cap I_j = \{m\}$, $i \neq j$, где m – номер корневой вершины графа. Для каждого из фрагментов единичный собственный вектор p^{*I_i} будет иметь вид

$$p_j^{*I_i} = p_j^* / \alpha_i, \quad j \in I_i,$$

$$\alpha_i = \sum_{j \in I_i} p_j^*, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Обратно, имея единичные собственные векторы фрагментов $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_k}$, можно восстановить единичный собственный вектор всего процесса P . Рассматривая сначала фрагменты P^{I_1} и P^{I_2} , находим единичный собственный вектор $p^{*I_1 \cup I_2}$, соответствующий объединению фрагментов $P^{I_1 \cup I_2}$. Затем из $p^{*I_1 \cup I_2}$ и p^{*I_3} находим собственный вектор $p^{*I_1 \cup I_2 \cup I_3}$ и т.д. Наконец, получим единичный собственный вектор p^* марковского процесса P , описывающего блуждание частицы по всему дереву.

Если в каждом из фрагментов имеется сходимость к финальному распределению за конечный или бесконечный промежуток времени, то и весь процесс будет характеризоваться сходимостью к финальному распределению вероятностей.

Отметим, что понятие фрагмента для процессов блуждания частицы на графе было введено несколько иначе, чем для марковских процессов общего вида, рассмотренных выше. Изложенный подход к разбиению процесса на фрагменты, дающий возможность вычислить финальное распределение всего процесса по финальным распределениям его фрагментов, существенно использовал наличие точек сброса в некоторых вершинах графов. В общем случае установить связь вида (6.31)-(6.32) между финальными распределениями оказывается невозможным.

Пример вычисления финального распределения вероятностей при блуждании на графе по финальным распределениям на его подграфах приведен в приложении В. Был выбран граф из 18 вершин и матрица, описывающая вероятности перехода между ними. В качестве точки сброса была взята вершина 10. Все расчеты были выполнены в пакете Mathcad 8.0.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Диффузионные процессы представляют собой класс случайных процессов, для которых характерны следующие свойства: марковость, непрерывность траектории, существование локальных характеристик – вектора переноса и матрицы диффузии. Можно выделить два основных метода теории диффузионных процессов: аналитический и вероятностный.

При исследовании диффузионных процессов в жидкостях и газах часто возникает задача о существовании стационарного распределения для диффузанта и сходимости к нему. Ее анализ упрощается при замене непрерывного процесса дискретным. Точность такого приближения можно повысить, увеличивая число состояний. Тогда в качестве модели диффузии удобно выбрать марковский процесс с конечным числом состояний.

7.1. Собственное распределение диффузионного процесса

Рассмотрим диффузионный процесс, заданный на отрезке $[r_1, r_2]$ и имеющий плотность $\varphi(x, t)$, где $x \in [r_1, r_2]$, $t \in [0, \infty)$. Здесь r_1, r_2 могут принимать и бесконечные значения. Будем предполагать, что плотность $\varphi(x, t)$ удовлетворяет прямым уравнениям Колмогорова [123]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t)\varphi(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)\varphi(x, t)], \quad (7.1)$$

где

$a(x, t)$ – коэффициент сноса;

$\sigma^2(x, t)$ – коэффициент диффузии.

Поскольку диффузия протекает на пространственном отрезке $[r_1, r_2]$, то естественно предположение о постоянстве общего количества диффузанта в данной области пространства:

$$\int_{r_1}^{r_2} \varphi(x, t) dx = 1, \quad t \in [0, \infty).$$

Обозначим через $\mu(t)$ общее количество диффузанта: $\mu(t) = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(x, t) dx$.

Поскольку $\mu(0) = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(x, 0) dx = 1$, то условие $\mu(t) \equiv 1$ эквивалентно $\frac{\partial \mu}{\partial t} \equiv 0$.

Исходя из этого, найдем соответствующие краевые условия.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx = \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{\partial}{\partial x} [a(x,t)\varphi(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)] \right) dx = \\ &= \left(-a(x,t)\varphi(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)] \right) \Big|_{r_1}^{r_2}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Тогда тождество $\frac{\partial \mu}{\partial t} \equiv 0$ будет выполнено, если задать краевые условия в виде

$$\left(-a(x,t)\varphi(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)] \right) \Big|_{x=r_i} = 0, \quad i=1,2. \quad (7.3)$$

В частном случае, при $a(x,t)=0$, $\sigma^2(x,t)=const$, краевые условия (7.3) превращаются в $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=r_i} = 0$, а исходная задача переходит в задачу теплопроводности.

Нулевым собственным распределением диффузионного процесса будем называть такое распределение с плотностью $\varphi^*(x,t)$, которое обращает уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x} [a(x,t)\varphi^*(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x,t)\varphi^*(x,t)] = 0 \quad (7.4)$$

в тождество. Общее решение уравнения (7.4) представимо в виде:

$$\varphi^*(x,t) = \frac{2}{\sigma^2(x,t) R(x,t)} \left[c_1 + c_0 \int_{r_1}^x R(v,t) dv \right],$$

где $R(x,t) = \exp \left\{ -\int_{r_1}^x \frac{2a(z,t)}{\sigma^2(z,t)} dz \right\},$

коэффициенты c_1 , c_0 находятся из краевых условий (7.3) или из более общих (7.2). Найдем c_0 :

$$\frac{\partial}{\partial x} [\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)] = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[c_1 + c_0 \int_{r_1}^x R(v,t) dv \right] / R(x,t) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2c_0 - 2 \frac{R'(x,t)}{R^2(x,t)} \left(c_1 + c_0 \int_{r_1}^x R(v,t) dv \right) = \\
&= 2c_0 + \frac{4a(x,t)}{\sigma^2(x,t)} \frac{1}{R(x,t)} \left(c_1 + c_0 \int_{r_1}^x R(v,t) dv \right).
\end{aligned}$$

Полученное выражение подставим в краевое условие:

$$\begin{aligned}
&-a(x,t)\varphi(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma^2(x,t)\varphi(x,t) \right] = -\frac{2a(x,t)}{\sigma^2(x,t)} \frac{1}{R(x,t)} \left(c_1 + c_0 \int_{r_1}^x R(v,t) dv \right) + \\
&+ 2 \frac{c_0}{2} + \frac{2a(x,t)}{\sigma^2(x,t)} \frac{1}{R(x,t)} \left(c_1 + c_0 \int_{r_1}^x R(v,t) dv \right) = c_0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $c_0 = 0$ и $\varphi(x,t) = \frac{2}{\sigma^2(x,t)} \frac{c_1}{R(x,t)}$.

Параметр c_1 выбираем так, чтобы $\int_{r_1}^{r_2} \varphi(x,t) dx = 1$. Тогда нулевое собственное распределение есть

$$\varphi^*(x,t) = \frac{1}{\sigma^2(x,t)R(x,t)} \bigg/ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\sigma^2(x,t)R(x,t)}. \quad (7.5)$$

В случае однородного процесса, когда коэффициенты сноса и диффузии не зависят от времени, нулевое собственное распределение будет стационарным и плотность распределения диффузионного процесса будет стремиться к нему независимо от распределения в начальный момент времени.

Покажем, что это действительно так. Мы можем без потери общности полагать коэффициент сноса равным нулю, так как в однородном случае соответствующим преобразованием координат [123] $\tilde{x} = \varphi(x)$, таким что

$$\varphi'(x) = R(x) = \exp \left\{ - \int_{r_1}^x \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz \right\},$$

любой диффузионный процесс может быть приведен к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x)\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Введем следующие обозначения

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \varphi(x,t), \quad (7.6)$$

$$\rho(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)}. \quad (7.7)$$

Получаем уравнение параболического типа [146]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.8)$$

с краевым условием второго рода:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=r_i} = 0. \quad (7.9)$$

В этом случае решение задачи (7.8)-(7.9) представимо в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad (7.10)$$

где $\Phi_n(x)$ – собственные функции, а λ_n – собственные значения задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \lambda \rho(x) \Phi(x) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=r_i} = 0.$$

Коэффициенты ряда Фурье c_n находятся из соотношения

$$c_n = \frac{(\varphi_0, \Phi_n)_\rho}{(\Phi_n, \Phi_n)_\rho},$$

где $(f, g)_\rho = \int_{r_1}^{r_2} f(x)g(x)\rho(x)dx$. Согласно теореме Стеклова, построенный по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля ряд Фурье (7.10) сходится абсолютно и равномерно. Ввиду симметричности дифференциального оператора задачи, все собственные числа неотрицательны. Поскольку

рассматриваемая задача (7.8)-(7.9) является краевой задачей второго рода, то имеется собственное значение $\lambda_0 = 0$ и соответствующая ему собственная функция $\Phi_0(x) = const$. Тогда ряд (7.10) может быть представлен так

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad \lambda_n > 0. \quad (7.11)$$

Рассмотрим поведение $u(x,t)$ при $t \rightarrow \infty$, беря квадрат расстояния в пространстве L_2 с весом ρ :

$$\|u - c_0\|_{\rho}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) e^{-\lambda_n t} \right\|_{\rho}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) e^{-\lambda_n t} \right)^2 \rho(x) dx.$$

Ввиду ортогональности в пространстве с весом ρ собственных функций Φ_n задачи Штурма-Лиувилля, после раскрытия скобок остается только сумма квадратов, а каждое из попарных произведений равно нулю:

$$\|u - c_0\|_{\rho}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \Phi_n^2(x) e^{-2\lambda_n t} \rho(x) dx. \quad (7.12)$$

В [104] показано, что последовательность собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля может иметь сгущения только на бесконечности. Как отмечалось выше, $\lambda_n > 0$ при $n > 0$, следовательно, существует $\lambda_{\min} = \min_{n>0} \{\lambda_n\}$, $\lambda_{\min} > 0$.

Ввиду неотрицательности каждого из слагаемых в (7.12), имеем

$$\int_{r_1}^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \Phi_n^2(x) e^{-2\lambda_n t} \rho(x) dx \leq e^{-2\lambda_{\min} t} \int_{r_1}^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \Phi_n^2(x) \rho(x) dx.$$

Заметим, что в начальный момент времени $t = 0$

$$\|u(0) - c_0\|_{\rho}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \Phi_n^2(x) \rho(x) dx.$$

Тогда, $\|u(t) - c_0\|_{\rho}^2 \leq \|u(0) - c_0\|_{\rho}^2 e^{-2\lambda_{\min} t}$.

Поскольку $\lambda_{\min} > 0$, то при $t \rightarrow \infty$ $e^{-2\lambda_{\min} t} \rightarrow 0$ и, следовательно, $\|u(t) - c_0\|_{\rho}^2 \rightarrow 0$, что означает сходимость к предельному распределению $u(x,t) \rightarrow c_0$, при $t \rightarrow \infty$. Тогда,

$$\varphi(t, x) \rightarrow \frac{c_0}{\sigma^2(x)/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Постоянную c_0 определяем из условия $\int_{r_1}^{r_2} \varphi(x) dx = 1$, тогда

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \bigg/ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\sigma^2(x)}.$$

Полученное предельное распределение совпадает со стационарным распределением (7.5). Следовательно, для однородного во времени процесса имеет место сходимость к стационарному распределению при $t \rightarrow \infty$.

Для того, чтобы для однородного процесса существовало стационарное распределение (7.5), необходимым и достаточным условием является сходимость интеграла в знаменателе:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\sigma^2(x)R(x)} < \infty.$$

7.2. Аппроксимация диффузионного процесса марковским процессом с конечным числом состояний

Приведенные ниже результаты были известны ранее [8, 118]. Мы приводим их в связи с трудностью ссылки и для понимания дальнейшего изложения. Рассмотрим диффузионный процесс $\xi(t)$, заданный на отрезке $[r_1, r_2]$, $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, плотность распределения вероятностей $\varphi(t, x)$ которого удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sigma^2(t, x) \varphi(t, x) \right], \quad (7.13)$$

где $\sigma^2(t, x)$ - коэффициент диффузии, $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$. Как отмечалось выше, в однородном случае мы без потери общности полагаем коэффициент сноса равным нулю, так как соответствующим преобразованием координат любой диффузионный процесс может быть приведен к виду (7.13). Если же процесс неоднородный, то, разбив временной отрезок на достаточно малые отрезки, мы можем на каждом из них аппроксимировать исходный процесс некоторым однородным процессом.

Если коэффициент диффузии не зависит от времени $\sigma^2(t, x) = \sigma^2(x)$ и

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{dx}{\sigma^2(x)} < \infty,$$

то при $t \rightarrow \infty$ плотность распределения вероятностей диффузионного процесса сходится к стационарному распределению

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \bigg/ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{dx}{\sigma^2(x)}.$$

Таким образом, для заданного стационарного распределения $\varphi^*(x)$ всегда можно указать коэффициент диффузии $\sigma^2(x)$ однородного процесса, при котором будет иметь место сходимость к $\varphi^*(x)$. Отметим, что сходимость будет иметь место и при $\alpha\sigma^2(x)$, где $\alpha > 0$. Параметр α влияет на скорость сходимости.

Лемма. Пусть $\varphi(x,t)$ – решение уравнения диффузии с коэффициентом $\sigma^2(x)$, $\varphi_\alpha(x,t)$ – решение уравнения с коэффициентом диффузии $\alpha\sigma^2(x)$. Тогда $\varphi_\alpha(x,t) = \varphi(x,\alpha t)$.

Доказательство.

Предположим, $\varphi(x,t)$ удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x)\varphi(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x,t), \quad (7.14)$$

а $\varphi_\alpha(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha\sigma^2(x)\varphi_\alpha(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\alpha(x,t). \quad (7.15)$$

Покажем, что $\varphi(x,\alpha t)$ удовлетворяет уравнению (7.15). Для этого проверим, что $\varphi(x,\alpha t)$ обращает (7.15) в тождество.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha\sigma^2(x)\varphi(x,\alpha t)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x,\alpha t).$$

Введем замену $\alpha t = \tau$, тогда

$$\frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x)\varphi(x,\tau)) = \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(x,\tau),$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) \varphi(x, \tau)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, \tau).$$

Поскольку $\varphi(x, t)$ обращает уравнение (7.14) в тождество, то последнее равенство и доказывает лемму.

Таким образом, параметр α означает масштабирование по оси времени t . Заметим, что аналогичные соотношения имеют место и для марковского процесса. Действительно, пусть $p(t)$ – решение уравнения $\frac{dp}{dt} = p\Lambda$, а $p_\beta(t)$ – решение уравнения $\frac{dp}{dt} = p(\beta\Lambda)$, тогда

$$p_\beta(t) = p(\beta t). \quad (7.16)$$

Построим марковский процесс с конечным числом состояний, аппроксимирующий заданный диффузионный. Разобьем отрезок $[r_1, r_2]$ на частичные полуинтервалы $[a_j, a_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, n$, $a_0 = r_1$, $a_n = r_2$. Будем рассматривать их как состояния марковского процесса с непрерывным временем, полагая, что процесс находится в состоянии j , если диффундирующая частица принадлежит полуинтервалу $[a_{j-1}, a_j)$. Вероятность того, что в момент времени t процесс находится в состоянии j , есть

$$p_j(t) = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t, x) dx.$$

Выпишем инфинитезимальную матрицу рассматриваемого марковского процесса. По определению диффузионного процесса

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s, x, s + \Delta t, dy) = o(\Delta t),$$

следовательно, вероятность перехода между не соседними состояниями за малый промежуток времени Δt $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$. Тогда интенсивность перехода из i в j равна

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = 0, \quad |i - j| > 1.$$

Таким образом, инфинитезимальная матрица $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ представляет собой трехдиагональную матрицу, у которой в каждой строке элементы, не

лежащие на главной диагонали, равны между собой в силу равенства нулю коэффициента сноса.

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & & \dots & \dots \\ \lambda_2/2 & -\lambda_2 & \lambda_2/2 & \dots & \dots \\ & \lambda_3/2 & -\lambda_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\lambda_n \end{bmatrix}$$

Неизвестные параметры λ_i выберем так, чтобы полученный марковский процесс имел стационарное распределение $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)i$, где p_i^* определяются через стационарное распределение диффузионного процесса:

$$p_i^* = \frac{a_j}{a_{j-1}} \int \varphi(x) dx .$$

Это означает, что вектор $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ должен быть нулевым собственным вектором для инфинитезимальной матрицы A^T :

$$\sum_{i=1}^n p_i^* \lambda_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n . \quad (7.17)$$

Решая систему (7.17) относительно элементов инфинитезимальной матрицы, находим их с точностью до постоянного множителя:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta, \\ \lambda_2 &= 2\beta p_1^* / p_2^*, \\ \lambda_3 &= 2\beta p_1^* / p_3^*, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda_n &= 2\beta p_1^* / p_n^*, \end{aligned}$$

где β - произвольная положительная константа. Ее величина влияет на скорость сходимости процесса к стационарному распределению, т.е. представляет собой масштаб по оси времени t (7.16).

Определим неизвестный параметр β так, чтобы скорость сходимости у марковского процесса была той же, что и у соответствующего диффузионного процесса.

Рассмотрим $\int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t, x) dx$ - вероятность нахождения диффундирующей частицы в полуинтервале $[a_{j-1}, a_j)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t, x) dx &= \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) \varphi(t, x)) dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^2(x) \varphi(t, x)) \Big|_{a_{j-1}}^{a_j}. \end{aligned}$$

Это мгновенная скорость изменения вероятности состояния j в момент времени t . С другой стороны, из дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i \lambda_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Проведя расчеты для одинаковых начальных условий, можем оценить скорости изменения вероятности нахождения частицы в состоянии j и подобрать подходящий коэффициент β [8]. Увеличивая число состояний процесса, мы можем добиться сколь угодно точного приближения диффузионного процесса марковским процессом с конечным числом состояний.

Полученные результаты непосредственно обобщаются на неоднородные процессы, когда коэффициент диффузии $\sigma^2(x, t)$ является также и функцией времени. В этом случае мы проводим указанные выше рассуждения для каждого момента времени t и получаем коэффициент $\beta(t)$ и инфинитезимальную матрицу неоднородного марковского процесса $A(t)$, зависящую от времени.

Таким образом, по заданному диффузионному процессу мы можем построить марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний, близкий ему в смысле предельных свойств. Это позволяет применить к диффузионным процессам теоремы о сходимости к стационарному распределению [41, 147].

Предлагаемый подход позволяет использовать марковские процессы для моделирования диффузионных процессов и их анализа.

7.3. Сходимость распределений диффузионных процессов

Рассмотрим условия, при которых может иметь место стабилизация финальных вероятностей.

Пусть $\varphi(t, x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) \varphi(t, x)). \quad (7.18)$$

Найдем решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F(t) \sigma^2(x) \varphi(t, x)) \quad (7.19)$$

с теми же краевыми и начальными условиями. Решение будем искать в виде

$$\varphi_F(t, x) = \varphi(G(t), x).$$

Запишем производную по t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(G(t), x) = \frac{\partial}{\partial G} \varphi(G, t) \frac{\partial G}{\partial t}$$

и подставим в (7.18)

$$\frac{\partial}{\partial G} \varphi(G, x) \frac{\partial G}{\partial t} = F(t) \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) \varphi(G, x)).$$

Поскольку $\varphi(t, x)$ обращает (7.18) в тождество, то $\frac{\partial G}{\partial t} = F(t)$ и

$$G(t) = \int_0^t F(s) ds + C. \quad (7.20)$$

Таким образом, наличие параметра $F(t)$ приводит к преобразованию (7.20) временной координаты и решение уравнения (7.19) может быть записано в виде

$$\varphi_F(t, x) = \varphi\left(\int_0^t F(s) ds, x\right),$$

где $\varphi(t, x)$ – решение уравнения (7.18). Постоянную C выбираем так, чтобы $G(0) = 0$, т.е. $C = 0$. В этом случае при $F(t) = const$ преобразование (7.20) приводит к масштабированию по оси времени, как это было показано ранее.

Лемма 7.1. Если в уравнении (7.19) функция $F(t)$ имеет неинтегрируемую особенность в точке t_0 : $\int_0^{t_0} F(s) ds = \infty$, то имеет место сходимость к стационарному распределению:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t, x) = \varphi^*(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \bigg/ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sigma^2(z)}.$$

Доказательство.

Как было показано выше, решение уравнения (7.19) представимо через решение уравнения (7.18) следующим образом:

$$\varphi_F(t, x) = \varphi \left(\int_0^t F(s) ds, x \right).$$

При $t \rightarrow t_0$ $G = \int_0^t F(s) ds \rightarrow \infty$. Поскольку $\varphi(G, x)$ стремится к некоторому стационарному распределению $\varphi^*(x)$ при $G \rightarrow \infty$, то, следовательно, и $\varphi_F(t, x)$ сходится к тому же стационарному распределению $\varphi^*(x)$ при $t \rightarrow t_0$. Лемма доказана.

Приведенный результат обобщается на случай произвольного неоднородного процесса диффузии.

Теорема 7.1 (о сходимости к стационарному распределению). Пусть имеется диффузионный процесс, имеющий нулевой коэффициент сноса и коэффициент диффузии $\sigma(t, x)$, $x \in [r_1, r_2]$, $t \in [0, t_0]$, представимый в виде

$$\sigma(t, x) = M(t)\sigma_0(t, x),$$

где $\int_0^{t_0} M(s) ds = \infty$; $\sigma_0(t, x) > 0$, ограничена и непрерывна на $[0, t_0] \times [r_1, r_2]$ и при $t \rightarrow t_0$ равномерно сходится к $\sigma^*(x) > 0$. Тогда для любого начального распределения, заданного в точке $t = 0$, плотность распределения вероятностей процесса при $t \rightarrow t_0$ сходится к предельному распределению

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t, x) = \varphi^*(x) = \frac{1}{\sigma^{*2}(x)} \bigg/ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sigma^{*2}(z)}.$$

Доказательство.

Отметим, что в силу равномерной сходимости $\sigma_0(t, x)$ к $\sigma^*(x)$ предельная функция $\sigma^*(x)$ также будет непрерывной и ограниченной на отрезке $[r_1, r_2]$.

Возьмем произвольную точку $t' \in (0, t_0)$. Разобьем отрезок $[0, t']$ точками t_1, t_2, \dots, t_m ($t_1 = 0$, $t_m = t'$) и заменим $\sigma_0(t, x)$ кусочно-постоянной функцией $\sigma_{0k}(x) = \sigma_0(t_k, x)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$. Всегда можем выбрать систему точек

разбиения настолько густой, чтобы функции $M(t)\sigma_0(t,x)$ и $M(t)\sigma_{0k}(x)$ отличались на сколь угодно малую величину. В силу непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения (7.18) от параметров, система точек может быть подобрана и так, чтобы решения уравнений с коэффициентами диффузии $M(t)\sigma_0(t,x)$ и $M(t)\sigma_{0k}(x)$ отличались бы сколь угодно мало на отрезке $[0,t']$.

Решения уравнения диффузии с коэффициентом $M(t)\sigma_{0k}(x)$ на $(0,t']$ состоит из отдельных решений на полуинтервалах $(t_k, t_{k+1}]$. Как было показано выше, наличие функции $M(t)$ приводит к преобразованию времени

$$G_2 = \int_0^{t_2} M(s)ds, \quad t \in [0, t_2],$$

$$G_3 = \int_{t_2}^{t_3} M(s)ds + G_2 = \int_0^{t_3} M(s)ds, \quad t \in [t_2, t_3],$$

...

$$G_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} M(s)ds + G_{k-1} = \int_0^{t_k} M(s)ds, \quad t \in [t_{k-1}, t_k],$$

после чего достаточно рассмотреть уравнения

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial G} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{0k}(x) \varphi_k(G, x)), \quad G \in (G_k, G_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Заметим, что $G_k \rightarrow \infty$ при $t' \rightarrow t_0$ в силу расходимости интеграла от $M(t)$. Проведя замену (7.6)-(7.7), перейдем к последовательности уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = \rho_k(x) \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad t \in (G_k, G_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7.21)$$

с начальными условиями $u_k(G_k) = u_{k-1}(G_k)$ и краевыми условиями второго рода

$$\left. \frac{\partial u_k}{\partial x} \right|_{x=r_i} = 0. \quad (7.22)$$

Поскольку $\sigma_{0k}(x) > 0$, непрерывны, ограничены и равномерно сходятся к $\sigma^*(x)$ при $t' \rightarrow t_0$, то $\rho_k(x) = \frac{1}{\sigma_{0k}(x)}$ также положительны, непрерывны, ограничены и равномерно сходятся к $\rho^*(x)$ при $t' \rightarrow t_0$.

Для каждого из уравнений (7.21)-(7.22) рассмотрим соответствующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial x^2} + \lambda \rho_k(x) \Phi^{(k)}(x) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=r_i} = 0.$$

Решение каждого из уравнений (7.21)-(7.22) разлагается в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$u_k = c_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \Phi_n^{(k)}(x) e^{-2\lambda_n^{(k)}(G-G_{k-1})}. \quad (7.23)$$

Поскольку последовательность собственных чисел задачи может иметь сгущения только на бесконечности, то можно занумеровать их так, чтобы

$$\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < \dots < \lambda_n^{(k)} < \dots$$

Выделим все подпоследовательности собственных чисел $\lambda_{n_k}^{(k)}$, сходящиеся к нулю при $k \rightarrow \infty$ (если таковые имеются). В силу непрерывной зависимости решения от параметра, можно выделить подпоследовательности собственных функций $\Phi_{n_k}^{(k)} \rightarrow \Phi^*$, $k \rightarrow \infty$, соответствующие указанным собственным числам. Рассмотрим собственную функцию $\Phi_0 = const$, соответствующую нулевому собственному числу. Собственные функции, отвечающие различным собственным числам ортогональны: $\left(\Phi_{n_k}^{(k)}, \Phi_0 \right)_{\rho_k} = 0$, но тогда и предельная функция Φ^* также будет ортогональна $\left(\Phi^*, \Phi_0 \right) = 0$. Это означает существование еще одного решения задачи

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (7.24)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=r_i} = 0. \quad (7.25)$$

Ввиду равномерной сходимости $\rho_k(x)$ к $\rho^*(x)$ и сходимости $\lambda_{n_k}^{(k)}$ к нулю при $k \rightarrow \infty$, предельное решение Φ^* также должно быть непрерывным, т.е. $\Phi^* = 0$ (чтобы Φ^* удовлетворяла задаче (7.22)-(7.24) и выполнялось условие ортогональности).

Рассмотрим функцию

$$F_k(x, G) = \sum_i c_i \Phi_i^{(k)}(x) e^{-2\lambda_i^{(k)}(G - G_{k-1})},$$

составленную из тех слагаемых разложения (7.23), в которых собственные значения $\lambda_i^{(k)}$ содержатся в сходящихся к нулю подпоследовательностях $\lambda_{n_k}^{(k)}$.

Оценим квадрат нормы $F_k(x, t)$ в пространстве с весом ρ_k :

$$\begin{aligned} \|F_k\|_{\rho_k}^2 &\leq \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) e^{-2\lambda_i^{(k)}(G - G_{k-1})} \rho_k(x) dx \leq \\ &\leq \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) \rho_k(x) dx = \sum_i \int_{r_1}^{r_2} c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) \rho_k(x) dx. \end{aligned}$$

Из неравенства Бесселя и ограниченности функций u_k следует ограниченность коэффициентов $c_i^{(k)}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(k)2} \leq M.$$

Тогда последняя сумма будет стремиться к нулю при $\Phi_i^{(k)2} \rightarrow 0$. Это означает, что $\|F_k\|_{\rho_k}^2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь норму разности решений и построенных функций $F_k(x, t)$

$$\|u_k - c_0 - F_k\|_{\rho_k}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) e^{-2\lambda_i^{(k)}(G - G_{k-1})} \rho_k(x) dx.$$

Здесь сумма берется по всем i , для которых последовательности $\lambda_i^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$ сходятся к положительным пределам (те значения i , которым соответствуют сходящиеся к нулю $\lambda_i^{(k)}$, вошли в состав функций $F_k(x, G)$).

Тогда существуют такое натуральное число k_0 и положительное α , что для всех $k > k_0$ будет выполнено неравенство

$$e^{-2\lambda_i^{(k)}(G-G_{k-1})} \leq e^{-2\alpha(G-G_{k-1})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|u_k(G_k) - c_0 - F_k(G_k)\|_{\rho_k}^2 &\leq \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) \rho_k(x) dx e^{-2\alpha(G_k - G_{k-1})} = \\ &= \|u_k(G_{k-1}) - c_0 - F_k(G_{k-1})\|_{\rho_k}^2 e^{-2\alpha(G_k - G_{k-1})}. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом из отрезков $[G_{k-1}, G_k]$ указанный квадрат нормы убывает. Поскольку $\rho_k(x)$ равномерно сходится к положительной и ограниченной предельной функции $\rho(x)$, а $\sum_{i=1}^k (G_i - G_{i-1}) = G_k - G_0 \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, то

$$\|u_k(G_k) - c_0 - F_k(G_k)\|_{\rho_k}^2 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Учитывая, что $\|F_k\|_{\rho_k}^2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, получаем сходимость $u_k(G, x) \rightarrow c_0$. Проводя замену, обратную (7.6)-(7.7), получим, что $\varphi(t, x) \rightarrow \varphi^*(x)$ при $t \rightarrow \infty$, где $\varphi^*(x) = \frac{1}{\sigma^{*2}(x)} \bigg/ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sigma^{*2}(z)}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что если интеграл $\int_0^{t_0} M(s) ds$ сходится, но принимает достаточно большое значение, то мы будем иметь дело с частичной фокусировкой. Аналогичная ситуация для марковских процессов с конечным числом состояний была рассмотрена в [147].

7.4. Численное решение уравнения диффузии

Построим конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение диффузии (7.1). Для этого разобьем временной интервал точками t_0, t_1, \dots, t_m , где $t_0 = 0$, и фазовое пространство точками x_0, x_1, \dots, x_n , где $x_0 = r_1$, $x_n = r_2$. Будем считать точки разбиения равноотстоящими друг от друга с интервалами Δt и Δx соответственно. В регулярных точках x_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$ выбираем следующие приближения для производных:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} \approx \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta x},$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} \approx \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2},$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=t_k} \approx \frac{g(t_k) - g(t_{k-1}))}{\Delta t}.$$

Обозначим $\varphi_{kj} = \varphi(t_k, x_j)$, $a_{kj} = a(t_k, x_j)$, $\sigma_{kj}^2 = \sigma^2(t_k, x_j)$.

Тогда в регулярных точках дифференциальное уравнение (7.1) заменится конечно-разностным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{kj} - \varphi_{k-1j}}{\Delta t} &= -\frac{a_{kj+1}\varphi_{jk+1} - a_{kj-1}\varphi_{kj-1}}{2\Delta x} = \\ &= \frac{\sigma_{kj+1}^2\varphi_{kj+1} - 2\sigma_{kj}^2\varphi_{kj} + \sigma_{kj-1}^2\varphi_{kj-1}}{2\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Для граничных точек запишем краевые условия

$$-a_{k0}\varphi_{k0} + \frac{\sigma_{k1}^2\varphi_{k1} - \sigma_{k0}^2\varphi_{k0}}{2\Delta x} = 0, \quad (7.27)$$

$$-a_{kn}\varphi_{kn} + \frac{\sigma_{kn}^2\varphi_{kn} - \sigma_{kn-1}^2\varphi_{kn-1}}{2\Delta x} = 0. \quad (7.28)$$

Для каждого момента времени t_k решаем систему уравнений (7.26)-(7.28). Это линейная система относительно φ_{kj} , $k = 0, 1, \dots, n$. Значения φ_{k-1j} берем из решения, полученного на предыдущем шаге в точке t_{k-1} . Заметим, что в каждое из уравнений системы (7.26), кроме неизвестного φ_{kj} , входят только неизвестные φ_{kj-1} и φ_{kj+1} , т.е. матрица системы уравнений является 3-диагональной. Это позволяет решать данную систему уравнений методом прогонки [56]. Этот метод имеет сложность вычислений порядка n (n – число уравнений) и, следовательно, является более эффективным, чем, например, метод Гаусса, требующий вычислений порядка n^3 .

Примеры нахождения плотностей распределения для конкретных диффузионных процессов приведены в приложении. Серым (красным) цветом показан график стационарного распределения, а черным – плотности распределения вероятностей. В примере 1 рассмотрен простейший случай,

когда при неизменном во времени собственном распределении наблюдается сходимость к стационарному распределению

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{(1-x)^2 + 0,1} \Big/ \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2 + 0,1}.$$

На примере 2 проиллюстрирован случай, описанный в теореме о сходимости к стационарному распределению. Действительно, коэффициент диффузии представим в виде

$$\sigma^2(t, x) = \left(\frac{1}{2-t} + t \right) (x+1) + xt = \frac{1}{2-t} \left((1+t(2-t))(x+1) + x(2-t)t \right),$$

где выражение в скобках при $t \rightarrow 2$ равномерно сходится к $\sigma^{*2}(x) = x+1$, строго положительной на рассматриваемом отрезке $[0, 2]$.

Если же функция $\sigma^{*2}(x)$ обращается в ноль в некоторых точках, то сходимость может иметь место, но предельное распределение $\varphi^*(x)$ будет тождественно равно нулю всюду, за исключением нулей функции $\sigma^{*2}(x)$, в которых $\varphi^*(x)$ обращается в бесконечность (пример 3),

$$\sigma^{*2}(x) = \lim_{t \rightarrow 2} \left(\left(\frac{1-x}{2-t} \right)^2 + (x+1)t + 0,1 \right) (2-t)^2 = (1-x)^2.$$

Здесь с вероятностью 1 диффундирующая частица в момент времени $t = 2$ окажется в точке $x = 1$.

Другая возможная ситуация показана в примере 4. Коэффициент диффузии при $t = 2$ имеет единственный разрыв типа полюс в точке $x = 1$. Следовательно,

$$\sigma^{*2}(x) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{0,1(2-t)}{(1-x)^2 + 2-t} = \begin{cases} 0,1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}.$$

В этом случае сходимости к какому-либо предельному распределению нет: плотность распределения вероятностей в конечный момент времени зависит от начального распределения.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА СИНТЕЗА ПРОЦЕССА ПО ФРАГМЕНТАМ

В настоящее время одним из важнейших методов химической технологии является экстракция. Экстракция представляет собой процесс разделения смеси твердых или жидких веществ с помощью растворителей с высокой избирательностью (экстрагентов). На долю экстракции приходится около 20% всех затрат химической промышленности [27]. Широкое распространение получили методы жидкостной экстракции в фармацевтической, пищевой, нефтеперерабатывающей, атомной промышленности.

Физическая сущность экстракции состоит в переходе извлекаемого компонента из одной фазы (жидкой или твердой) в фазу жидкого экстрагента при их взаимном соприкосновении [114]. Экстрагируемые компоненты переходят из исходного раствора в растворитель вследствие разностей концентраций, поэтому данный процесс относится к числу диффузионных. Процесс экстракции проводится обычно в 2-фазных системах: "твердое тело-жидкость" или "жидкость-жидкость".

Необходимость системы "жидкость-жидкость" возникает, например, в фитохимии, когда экстракция из растительного сырья может проводиться водой, а на следующей стадии происходит экстракция действующих веществ из водной вытяжки органическим растворителем. Основным достоинством процесса экстракции являются высокая избирательность и низкая рабочая температура, что особенно важно для органических веществ растительного происхождения [113].

Диффузия в жидкостях обусловлена процессами многочастичного взаимодействия пробной частицы с частицами жидкости. В связи с этим теоретическое определение коэффициента диффузии в жидкостях весьма затруднительно и, как правило, источником информации является эксперимент [87, 88, 124].

8.1. Процессы экстрагирования

На практике экстракция проводится из материалов, имеющих, как правило, капиллярно-пористую структуру. Такие материалы широко применяют и в других диффузионных процессах химической технологии, протекающих с участием твердой фазы: сушки, десорбции. При экстрагировании из капиллярно-пористого материала миграция распределяемого вещества в твердой фазе осуществляется посредством молекулярной диффузии. Плотность диффузионного потока в материале, отнесенную к единице его поверхности, описывают уравнением Фика с использованием эффективного коэффициента диффузии D_e (коэффициента массопроводности) [98]:

$$i = -D_e \text{grad } C, \quad (8.1)$$

где i – вектор плотности диффузионного потока в расчете на полное сечение материала;

D_e – эффективный коэффициент молекулярной диффузии, зависящий от структурных параметров материала;

C – концентрация диффузанта в пористой среде.

Эффективный коэффициент диффузии D_e зависит от характеристик пористой структуры, температуры и концентрации распределяемого вещества в порах. В сопоставимых условиях (одно и то же распределяемое вещество, одинаковая температура и концентрация) влияние структуры материала проявляется в изменении коэффициента диффузии на порядок [126].

В общем случае влияние пористой структуры материала на эффективный коэффициент диффузии проявляется следующим образом [127]:

- удлиняется путь диффузионного потока вследствие извилистости капилляров;
- происходит его механическая блокировка элементами скелета твердого тела;
- потенциальное поле стенок пор воздействует на прилегающие слои жидкости, что в ряде случаев приводит к образованию граничной фазы и адсорбционного слоя молекул диффузанта.

При наличии адсорбционного слоя молекул диффузанта перенос его в капиллярно-пористом материале происходит за счет молекулярной диффузии в объеме пор и поверхностной диффузии в адсорбционном слое. В большинстве случаев оказывается возможным пренебречь поверхностной диффузией по сравнению с объемной.

Зависимость эффективного коэффициента диффузии D_e , входящего в (8.1), от параметров пористой структуры характеризуется соотношением:

$$D_e = D\varepsilon\Pi = Dm,$$

где D – коэффициент диффузии в гомогенной среде (в чистой жидкости);

Π – коэффициент диффузионной проницаемости;

$m = \varepsilon\Pi$ – параметр, зависящий от пористости структуры и представляющий собой коэффициент, на который различаются между собой коэффициент диффузии в чистой жидкости и проводимость в пористом теле.

Массообмен в жидкости у поверхности твердого тела представляет собой весьма сложное и пока малоизученное явление. В инженерной практике для того, чтобы обойти трудности при решении задач массоотдачи используют уравнение

$$dG = \beta (c_n - c')S d\tau, \quad (8.2)$$

где dG – количество вещества, диффундировавшего за промежуток времени $d\tau$ через поверхность площадью S ;

β – коэффициент пропорциональности (коэффициент массообмена);
 c_n – концентрация экстрагента в твердом теле на границе с жидкой средой;
 c' – средняя концентрация экстрагента в жидкой фазе.

Следует отметить, что коэффициент массообмена β не является величиной постоянной для данного вещества. На практике для определения коэффициента массообмена используют специальные лабораторные установки.

8.2. Экстракторы промышленного типа

Рассмотрим основные процессы в системе "твердое тело-жидкость", протекающие в промышленных экстракторах. В экстрактор поступают сырье, содержащее экстрагент (вещество, которое необходимо извлечь) и экстрагирующая жидкость. Из экстрактора извлекаются жидкость с растворенным в ней экстрагентом и переработанное сырье. Для промышленных моделей характерен непрерывный процесс подачи сырья и жидкости и их откачки. В этом случае в неподвижной системе координат, связанной с экстрактором, устанавливается стационарный режим, т.е. в любом элементарном объеме dV концентрация с течением времени не изменяется $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$. Одной из особенностей реального процесса экстрагирования является

изменение физических условий по длине аппарата. Изменение температуры, концентрации, и связанное с этим изменение структуры и физико-химических свойств твердых частиц приводит к изменению коэффициента диффузии. Так, например, в растительной ткани коэффициент диффузии может изменяться на порядок.

Современная методология исследования массообмена в системе "твердое тело-жидкость" состоит в том, что пространственно-временное распределение соответствующей субстанции рассматривается только для области, занятой твердым телом, а перенос в жидкости или газе, находящихся в контакте с твердым телом, учитывается заданием соответствующих граничных условий [98]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right), \quad (8.3)$$

с краевым условием на границе с жидкой фазой:

$$D \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right) + \beta(c - c') = 0, \quad (8.4)$$

где $c(x, y, z, t)$ – концентрация экстрагента в твердом теле в точке (x, y, z) в момент времени t ;

$v = (v_x, v_y, v_z)$ – скорость движения вещества;

D – коэффициент диффузии.

Массообменные процессы в промышленных аппаратах характеризуются изменением концентрации распределяемого вещества в фазах по длине аппарата. Поскольку коэффициент диффузии зависит от концентрации вещества, дифференциальное уравнение диффузии имеет нелинейный характер. Соотношение равновесных концентраций в фазах, как правило, не подчиняется линейному закону. Кроме того, при изменении физических свойств среды и гидродинамической обстановки по длине аппарата, изменяется коэффициент массоотдачи, что обуславливает нелинейность граничных условий диффузии. На коэффициенты диффузии, массоотдачи, распределения равновесных концентраций также влияет температурное поле. Это происходит вследствие того, что в целях интенсификации процесса экстрагирования стремятся проводить горячим экстрагентом при повышенных температурах, при этом взаимодействующие фазы на входе в аппарат имеют разную температуру. Кроме того, происходят потери теплоты через стенки аппарата, что также приводит к неизотермичности процесса.

Из изложенного выше следует, что для промышленных условий массообмена типичны нелинейные задачи диффузии. Однако во многих случаях нелинейная постановка задач диффузии связана с чрезмерными сложностями в описании кинетики процесса, при этом требуется дополнительная информация о зависимости кинетических коэффициентов от параметров процесса, которая часто отсутствует. Поэтому в инженерной практике для кинетического расчета массообменных процессов широко используют решения линейных диффузионных задач.

Для кинетического расчета диффузионных процессов разработаны поинтервальные методы, учитывающие изменение параметров процесса по длине аппарата. При этом предполагается, что физические и химические условия одинаковы в любом поперечном сечении экстрактора. Экспериментальные исследования подтверждают правомерность такого приближения. В аппарате непрерывного действия вследствие изменения концентрации распределяемого вещества в фазах, гидродинамической обстановки и температуры по рабочему объему его нередко приходится разбивать на отдельные зоны (участки) и вести позонный кинетический расчет [126]. Так, например, на аппарате наклонного двухшнекового типа (Dds) пробы отбираются в начале и в конце каждой секции (рис. 8.1). Участки занумерованы с помощью арабских цифр, а контрольные точки – римскими.

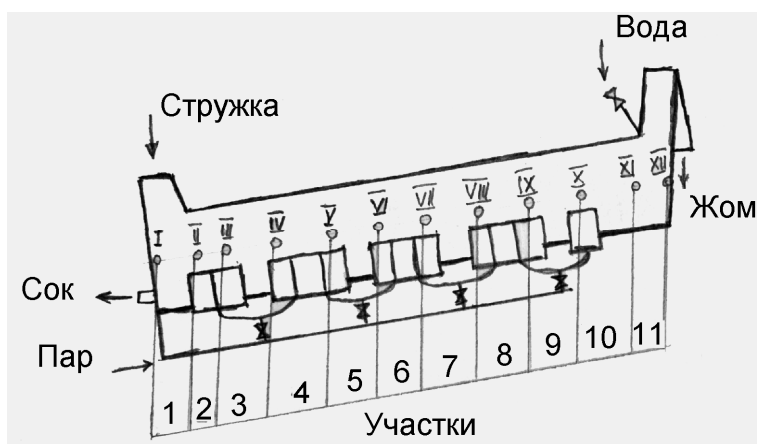


Рис. 8.1. Схема наклонного двухшнекового экстракционного аппарата

При зональном методе кинетического расчета непрерывно действующего аппарата начальное распределение концентрации по объему рассматриваемой дисперсной фазы во второй и последующих зонах аппарата не является равномерным, а соответствует конечному распределению концентрации диффузанта в частице в конце предыдущей зоны. Аналогичным образом действуют и при зональном кинетическом расчете аппарата периодического действия.

При описании переходных процессов в диффузионных аппаратах непрерывного действия начальные распределения концентраций задают на основе решений кинетических задач, описывающих поля концентраций в рабочем объеме аппарата в момент начала переходного процесса.

8.3. Извлечение сахара из свеклы

Рассмотрим процесс экстракции на примере извлечения сахара из сахарной свеклы. В экстрактор подаются измельченная стружка сахарной свеклы и вода. Стружка, проходя через аппарат, отдает сахарозу в окружающую ее воду; вода же, проходя через экстрактор, напротив, обогащается ею. Основная задача при проектировании экстрактора состоит в таком выборе его параметров, чтобы добиться максимального извлечения сахара из сырья.

Подаваемая в аппарат сахарная стружка характеризуется малым радиусом $R \approx 1 \text{ мм}$. В таком случае ее боковая поверхность значительно превосходит площадь оснований (более, чем в 100 раз). Это позволяет при рассмотрении процессов перехода экстрагента в жидкую фазу пренебречь площадью оснований и рассматривать процессы только на боковой поверхности. С математической точки зрения это означает, что мы рассматриваем стружку в виде бесконечно длинных цилиндров.

В существующих аппаратах применяется два основных метода: прямоточный и противоточный (рис. 8.2).

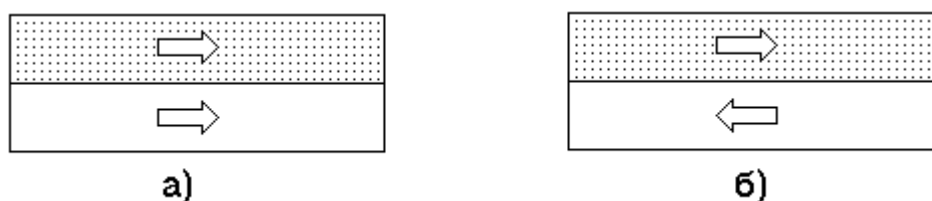


Рис.8.2. Перемещение твердой и жидкой фаз в экстракторе:

а) в прямоточном; б) в противоточном

При прямоточном процессе направления векторов скорости жидкости и сырья совпадают. При противоточном же они противоположны. Например, экстракционный аппарат, изображенный на рис. 8.1, относится к противоточным. Разделим экстрактор по всей его протяженности на n интервалов (рис. 8.3).

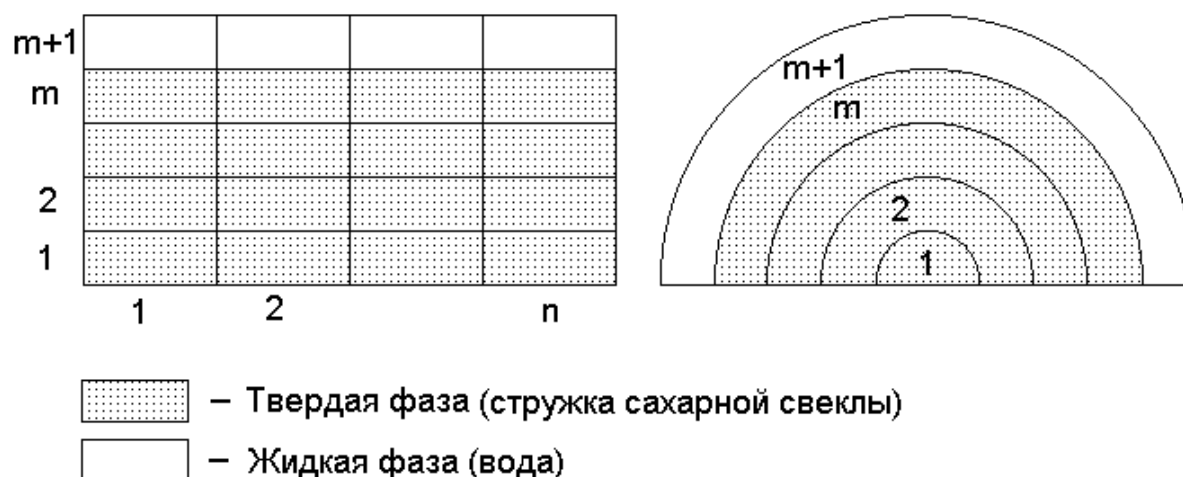


Рис. 8.3. Разбиение экстрактора на области с одинаковыми физическими характеристиками

Интервалы h_i должны быть достаточно большими по сравнению с размерами экстрагируемых частиц, но в то же время достаточно малыми, чтобы можно было принять физические условия процесса – коэффициент диффузии и коэффициент массопередачи – постоянными в пределах интервала. Цилиндр разобьем на m концентрических слоев, а слой $m+1$ будет представлять собой жидкость, омывающую цилиндр (рис. 8.3). Будем предполагать, что вода равномерно распределена между стружкой, т.е. на каждый из рассматриваемых цилиндров приходится воды пропорционально его объему от общей массы.

Частица экстрагента, попав в ячейку ij , может на протяжении малого промежутка времени Δt перейти в одну из соседних ячеек, либо остаться на

месте. Тем самым мы приходим к задаче о блуждании частицы на решетке [140].

Введем для частицы, находящейся в ячейке ij , условные вероятности перехода по вертикали при отсутствии горизонтальных перемещений. Тем самым мы переходим к новому вероятностному пространству, т.е. приходим к разбиению процесса на фрагменты. В качестве фрагментов здесь будут выступать группы состояний, состоящие из ячейки ij и соседних с ней ячеек.

Разбиение процесса на фрагменты позволяет упростить анализ и перейти к решению задачи диффузии для малых областей пространства, в которых основные параметры диффузионного процесса можно считать неизменными. Проведя затем синтез по фрагментам, сможем найти переходные вероятности для всех ячеек.

Рассмотрим условные вероятности перехода частицы в соседние по горизонтали ячейки при отсутствии перемещения по горизонтальной оси. Эти вероятности переходов определяются коэффициентом диффузии сахара в соке сахарной свеклы $D = \frac{\sigma^2}{2}$ и коэффициентом сноса a (т.е. скоростью движения стружки в аппарате для слоев $1, 2, \dots, m$ и воды для слоя $m + 1$).

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (8.5)$$

где $c(x, t)$ – концентрация сахара в точке x в момент времени t . В начальный момент времени частица равномерно распределена по всему объему ячейки:

$$c_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0, & x \notin [x_1, x_2]. \end{cases} \quad (8.6)$$

Отметим, что при таком задании начальных условий концентрация будет играть роль плотности вероятности нахождения частицы в точке x в момент времени t .

Решение задачи (8.5)-(8.6) будем искать в виде

$$c(x, t) = u(x, t)e^{\mu x + \lambda t},$$

где

$$\mu = \frac{a}{2D}, \quad \lambda = -\frac{a^2}{4D}. \quad (8.7)$$

Тогда $u(x, t)$ может быть найдено как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с теми же начальными условиями (8.6) [146]. В отсутствие краевых условий (бесконечный стержень) $u(x, t)$ представимо в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) u_0(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}.$$

Тогда

$$c(x, t) = e^{\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} c_0(\xi) e^{\mu(x-\xi)} d\xi.$$

Найдем вероятность того, что частица за период времени Δt сместится влево (т.е. будет находиться левее точки x_1). Введем следующие обозначения. Для частицы, находящейся в ячейке ij , обозначим $p_{ij}^{(-1,0)}$, $p_{ij}^{(1,0)}$ – условные вероятности переходов в левую и правую ячейки соответственно при условии отсутствия перемещений по вертикали; $p_{ij}^{(0,-1)}$, $p_{ij}^{(0,1)}$ – условные вероятности переходов в нижнюю (внутренний слой) и верхнюю (внешний слой) ячейки соответственно при отсутствии перемещений по горизонтали.

$$p_{ij}^{(-1,0)} = \int_{-\infty}^{x_1} c(x, \Delta t) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{e^{\lambda \Delta t}}{4\sqrt{\pi D \Delta t}} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D \Delta t} + \mu(x-\xi)} d\xi dx.$$

Проведя преобразования под знаком интеграла и подставив значения μ и λ из (8.7), получим

$$p_{ij}^{(-1,0)} = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \xi}{2\sqrt{D \Delta t}} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}} e^{-z^2} dz d\xi.$$

Заметим, что внутренний интеграл представляет собой интеграл ошибок

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} dz, \quad \Phi(+\infty) = 1.$$

Рассуждая аналогично для вероятности смещения вправо, найдем

$$p_{ij}^{(1,0)} = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\frac{x_2 - \xi}{2\sqrt{D\Delta t}} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}}^{\infty} e^{-z^2} dz d\xi =$$

$$= 1 - \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{\frac{x_2 - \xi}{2\sqrt{D\Delta t}} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}} e^{-z^2} dz d\xi.$$

Вероятность того, что частица не покинет ячейки ij на протяжении времени Δt , есть, следовательно,

$$p_{ij}^{(0,0)} = 1 - p_{ij}^{(1,0)} - p_{ij}^{(-1,0)}.$$

Рассмотрим теперь условные вероятности переходов частицы из ячейки ij в соседние по вертикали при условии, что перемещения по горизонтали отсутствуют. Перемещения между слоями внутри цилиндра будут определяться коэффициентом диффузии D .

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right).$$

Общее решение представимо в виде [152]

$$c(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4Dt}} d\xi d\eta,$$

где $B(x, y) = c_0(x, y)$ – начальное условие при $t = 0$.

Учитывая круговую симметрию цилиндра, сделаем замену

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad x = r \cos \theta,$$

$$\eta = \rho \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta.$$

Начальные условия зададим в виде

$$c_0(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, & r \in [r_1, r_2]; \\ 0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases}$$

Отметим, что при таком задании начального условия концентрация играет роль плотности вероятности того, что диффундирующая частица в момент времени t находится в точке с координатами (r, θ) . Тогда

$$\begin{aligned} c(r, \theta, t) &= \frac{1}{4\pi Dt} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty c_0(\rho, \theta) \rho e^{-\frac{(r \cos \theta - \rho \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta - \rho \sin \varphi)^2}{4Dt}} d\rho d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi Dt} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho e^{-\frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)}{4Dt}} d\rho d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi Dt} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho e^{-\frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)}{4Dt}} d\rho d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi Dt} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho e^{-\frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}{4Dt}} d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Найдем вероятность того, что частица перейдет во внутренний слой:

$$\begin{aligned} p^{(0,-1)} &= \int_0^{r_1} 2\pi r c(r, t) dr = \\ &= \frac{1}{2Dt} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^{r_1} \int_{r_1}^{r_2} r \rho \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}{4Dt}} d\varphi dr d\rho = \\ &= \frac{1}{Dt} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^{r_1} \int_{r_1}^{r_2} r \rho \int_0^\pi e^{-\frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}{4Dt}} d\varphi dr d\rho. \end{aligned}$$

Выполнив замену переменных под знаком интеграла

$$r = x \sqrt{2Dt},$$

$$\rho = y \sqrt{2Dt},$$

получим

$$p_{ij}^{(0,-1)} = \frac{16Dt}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^{r_1/2\sqrt{Dt}} \int_{r_1/2\sqrt{Dt}}^{r_2/2\sqrt{Dt}} xy \int_0^\pi e^{-x^2 - y^2 + 2xy \cos \varphi} d\varphi dx dy,$$

$$p_{ij}^{(0,-1)} = \frac{4}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{R_1} \int_{R_1}^{R_2} xy \int_0^\pi e^{-x^2 - y^2 + 2xy \cos \varphi} d\varphi dx dy,$$

где $R_1 = r_1/2\sqrt{Dt}$,
 $R_2 = r_2/2\sqrt{Dt}$.

Поскольку интервал времени t , за который совершаются рассматриваемые переходы между слоями, достаточно мал, то будем полагать, что вероятности перехода во внутренний слой и во внешний слой относятся как площади их границ. Т.е. для внутреннего слоя j :

$$\frac{p_{ij}^{(0,-1)}}{p_{ij}^{(0,1)}} = \frac{\pi R^2 \left(\frac{j-1}{m}\right)^2}{\pi R^2 \left(\frac{j}{m}\right)^2} = \left(\frac{j-1}{j}\right)^2.$$

Тогда для слоев $j = 2, \dots, m-1$ вероятность перехода во внешний слой будем вычислять как

$$p_{ij}^{(0,1)} = p_{ij}^{(0,-1)} \left(\frac{j}{j-1}\right)^2,$$

а для слоя $j = 1$:

$$p_{i1}^{(0,1)} = \frac{4}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_2}^\infty \int_{R_1}^{R_2} xy \int_0^\pi e^{-x^2 - y^2 + 2xy \cos \varphi} d\varphi dx dy.$$

Мы не пользуемся такой формулой для других слоев, т.к. на практике численное интегрирование по бесконечному интервалу оказывается более трудоемким, чем интегрирование в конечных пределах.

Рассмотрим теперь обменные процессы внешнего слоя с окружающей жидкой фазой. Преобразовывая (8.2), найдем массу экстрагента Δm , покинувшего твердую фазу:

$$\Delta m = \beta(c_n - c') \Delta t \Delta S \rho,$$

где Δt – промежуток времени, за который происходит массообмен;

ΔS – площадь поверхности, через которую происходит массообмен;
 ρ – плотность твердой фазы.

Пусть масса всего экстрагента в рассматриваемом слое равна m , тогда относительную часть экстрагента, покинувшего поверхностный слой $\frac{\Delta m}{m}$, можем интерпретировать как вероятность выхода диффундирующей частицы из твердой фазы в жидкую.

$$P_{\text{вых}} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{\beta}{m} (c_n - c') \Delta t \Delta S \rho.$$

При рассмотрении одной частицы концентрация в жидкой фазе равна нулю: $c' = 0$.

$$P_{\text{вых}} = \frac{\beta}{m} c_n \Delta t \Delta S \rho.$$

Поскольку $c_n = \frac{m}{M} = \frac{m}{\rho V}$, где M , V – соответственно масса и объем внешнего слоя, то

$$P_{\text{вых}} = \frac{\beta}{\rho V} \Delta t \Delta S \rho = \frac{\beta \Delta t}{R^2 \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \right) \pi h} 2\pi R h = \frac{2\beta \Delta t m^2}{R(2m-1)}.$$

Если же частица находится в жидкой фазе, то вероятность попадания в твердую фазу есть

$$P_{\text{вх}} = \frac{\Delta m}{m'} = \frac{\beta}{m'} \frac{m'}{M'} \Delta t \Delta S \rho = \frac{\beta}{M'} \Delta t \Delta S \rho,$$

где m' – масса экстрагента в жидкости;
 M' – масса этой жидкости;
 q – отношение расхода воды к расходу сырья;
 $\Delta S = 2\pi R h$ – площадь боковой поверхности.

Как отмечалось выше, каждый из бесконечных цилиндров взаимодействует с пропорциональным ему объемом жидкости, т.е. $M' = qM$, где M – масса цилиндра из твердой фазы высотой h :

$$M = V\rho = \pi R^2 h \rho.$$

Тогда

$$p_{ex} = \frac{\beta}{\pi R^2 h \rho q} \Delta t 2\pi R h \rho = \frac{2\beta}{Rq} \Delta t.$$

Зная условные переходные вероятности и проводя синтез процесса по фрагментам, как это описано в разделе 2, найдем вероятности переходов частицы из каждой ячейки в соседние с ней. Введем следующие обозначения:

$$S_1 = p_{ij}^{(-1,0)} + p_{ij}^{(1,0)};$$

$$S_2 = p_{ij}^{(0,-1)} + p_{ij}^{(0,1)}.$$

Тогда

$$\tilde{p}_{ij}^{(-1,0)} = p_{ij}^{(-1,0)} \frac{1 - S_2}{1 - S_1 S_2};$$

$$\tilde{p}_{ij}^{(1,0)} = p_{ij}^{(1,0)} \frac{1 - S_2}{1 - S_1 S_2};$$

$$\tilde{p}_{ij}^{(0,-1)} = p_{ij}^{(0,-1)} \frac{1 - S_1}{1 - S_1 S_2};$$

$$\tilde{p}_{ij}^{(0,1)} = p_{ij}^{(0,1)} \frac{1 - S_1}{1 - S_1 S_2};$$

$$\tilde{p}_{ij}^{(0,0)} = 1 - p_{ij}^{(0,-1)} - p_{ij}^{(0,1)} - p_{ij}^{(-1,0)} - p_{ij}^{(1,0)}.$$

Изложенный подход, основанный на разбиении процесса на фрагменты и их последующим синтезом, позволяет упростить анализ диффузионных процессов, происходящих в экстракторе. С его помощью можно исследовать как процессы до выхода на стационарный режим, так и находить установившееся стационарное распределение.

8.4. Стационарный режим

Наиболее важным в теоретическом и практическом отношении является установившийся процесс массообмена, протекающий в промышленных экстракторах. При заданном режиме работы экстрактора частицы движутся вдоль аппарата в противоток жидкости, в одном направлении с нею или комбинированным образом, так что в каждом поперечном сечении аппарата концентрация жидкости и средняя концентрация экстрагируемых частиц остаются неизменными. Если система координат связана с аппаратом, то процесс будет квазистационарный. Существенной является только скорость в

направлении одной из осей координат, так как все остальные перемещения частиц не будут влиять на концентрации.

В промышленных экстракторах непрерывного действия [99] постоянно подаются сырье и вода и отбираются жом (отработанные остатки стружки сахарной свеклы) и водный раствор сахара. Пусть за промежуток времени t подается масса ΔM сырья (в расчете на каждый из рассмотренных бесконечных цилиндров):

$$\Delta M = Svt = \pi R^2 vt \rho,$$

где v – скорость движения сахарной стружки по аппарату. Масса ΔM равномерно распределена между слоями и представима вектором $\Delta p = p_0 \Delta M$, где p_0 – начальное распределение между ячейками.

Введем m поглощающих состояний, в которые будет попадать стружка и вода с растворенным в ней сахаром и из которых происходит их отбор. Составим матрицу P из вероятностей переходов из всех ячеек, кроме поглощающих. Заметим, что эта матрица не будет стохастической, т.к. в некоторых строках сумма элементов будет меньше 1.

Пусть p^* – распределение массы сахара при стационарном режиме. Тогда

$$P^T p^* + \Delta p = p^*,$$

$$p^* = (E - P^T)^{-1} \Delta p,$$

$$p^* = (E - P^T)^{-1} p_0 \Delta M.$$

В начальный момент сахар равномерно распределен между слоями (пропорционально их объему):

$$p_{0i} = \frac{\pi \left(\left(\frac{R}{m} i \right)^2 - \left(\frac{R}{m} (i-1) \right)^2 \right)}{\pi R^2} = \frac{2i-1}{m^2}.$$

В качестве примера рассмотрим диффузионный аппарат DdS [98] противоточного типа.

Длина аппарата $H = 20,5$ м.

Скорость движения стружки по аппарату $v = 11,592$ м/ч.

Отношение расходов твердой и жидкой фаз $q = 1,38$.

Приведенный радиус стружки $R = 1,88 \cdot 10^{-3}$ м.

Разделим экстрактор по его длине на $n=11$ участков по $h=1,86$ м каждая. Цилиндры, аппроксимирующие стружку, разобьем на $m=5$ слоев. Коэффициенты диффузии сахарозы в свекле D и массоотдачи β приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Коэффициенты диффузии и массопередачи сахарозы в аппарате

Номер участка	Коэффициент диффузии сахарозы в свекле, $D \cdot 10^5$, м ² /ч	Коэффициент массоотдачи β , м/ч
1	0,280	1,83
2	0,420	0,38
3	0,415	1,85
4	0,380	2,59
5	0,365	3,07
6	0,363	0,59
7	0,323	0,35
8	0,282	2,15
9	0,250	0,13
10	0,229	0,4
11	0,225	0,19

Проведя расчеты по изложенному выше методу, получим следующие значения концентрации сахарозы (табл. 8.2). Сравнение результатов расчета с опытными данными, приведенными в [98], говорит о применимости предлагаемого метода для расчета стационарного режима диффузионного аппарата, являющегося основной задачей при проектировании и анализе работы промышленных экстракторов непрерывного действия. В то же время, использование марковского процесса для моделирования экстракции позволяет проводить исследование обменных процессов не только в стационарном режиме, но и до выхода на него.

Таблица 8.2

Концентрация сахара в соке сахарной свеклы и воде

Номер участка	Средняя концентрация сахара, %	
	В соке свеклы	В воде
1	19,5	13,5
2	17,9	14,1
3	16,7	14,5
4	15,8	12,9
5	15,0	10,8
6	14,3	8,4
7	13,7	6,8
8	12,8	5,4
9	12,7	3,3
10	12,2	2,6
11	11,6	0,9

Предложенные в разделе методы расчета концентрации достаточно сложны для ручных вычислений, в связи с чем целесообразной является их программная реализация. В качестве языка программирования был выбран Borland Delphi. Причинами такого выбора послужили высокая скорость и возможность построения дружественного пользовательского интерфейса. Основная форма программы служит для ввода исходных данных – коэффициентов диффузии в каждой из зон экстрактора, коэффициентов массоотдачи и т.д. В качестве результатов расчета выдаются таблица, содержащая вероятности переходов частицы в соседние ячейки и распределение концентрации экстрагента по рабочему объему экстрактора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На многочисленных модельных примерах произведен численный анализ явлений фокусировки и стабилизации. С этой целью были рассмотрены неоднородные марковские процессы, инфинитезимальные матрицы которых получали возмущения, имеющие разные порядки роста. Впервые поставлена и решена задача о стабилизации распределения вероятностей неоднородных марковских процессов с изменяющимся числом состояний.

Обоснована применимость метода возмущений инфинитезимальных матриц при стабилизации распределений марковских процессов с континуальным множеством состояний. Предложенный при этом подход позволяет производить исследование таких процессов с помощью соответствующим образом выбранных марковских процессов с конечным числом состояний.

Впервые был произведен детальный анализ процессов случайных блужданий на графах различных видов (графы, для отдельных компонент которых возможна их частичная стабилизация, графы с изменяющимся числом состояний, многослойные графы, графы, содержащие зоны Саргасса). Исследована задача о стабилизации процесса блужданий на графах перечисленных типов. Указаны условия, при выполнении которых, такая стабилизация возможна.

В работе усовершенствованы методы стабилизации распределения вероятностей неоднородных марковских процессов в окрестности заданной функции времени, играющей роль распределения вероятностей как для фиксированного, так и для произвольного начального распределения. Полученные результаты используются для исследования скорости сходимости к финальному распределению и оценки точности σ -фокусировки. Они также могут быть использованы для управления марковским процессом путем целенаправленного воздействия на инфинитезимальную матрицу процесса.

Предложен способ управления процессом, протекающим в жидкой смеси с помощью направляющих возмущений, воздействующих на жидкую смесь через малые промежутки времени. Суммарный эффект, возникающий за счет таких воздействий, приводит к стабилизации процесса на заданном временном промежутке.

Разработана методика восстановления переходных вероятностей марковского процесса по переходным вероятностям его фрагментов. Сформулирована и доказана теорема о необходимых и достаточных условиях такого синтеза. Разработан алгоритм оценивания стохастической матрицы марковского процесса для случая, когда фрагменты содержат случайные ошибки, основанный на минимизации некоторой положительно определенной квадратичной формы. Проведена программная реализация предложенных алгоритмов.

Для случая нормально распределенных ошибок в переходных вероятностях фрагментов построен статистический критерий, позволяющий

оценить достоверность синтезируемой матрицы процесса. Данный критерий используется для проверки гипотезы о том, действительно ли исходные данные являются фрагментами некоторого марковского процесса.

Найдены достаточные условия, при выполнении которых имеет место сходимость плотности распределения вероятностей диффузионного процесса к предельной плотности за конечный промежуток времени. Полученные результаты могут быть использованы для оценки времени выхода процесса на установившийся режим.

Предложен метод расчета экстракционных процессов по извлечению сахара из сахарной свеклы. Разработанная методика и ее программная реализация полезны на этапе проектирования экстракционных аппаратов в следующих случаях: для анализа процесса экстракции до его выхода на стационарный режим и оценки необходимого для этого времени; для определения выхода готового продукта (сахара) после достижения стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксельруд Г.А., Лысянский В.М. Экстрагирование. Система твердое тело – жидкость. – Л.: Химия, Лен. отд., 1974. – 254 с.
2. Алгоритмы фокусировки дискретных марковских систем на заданное стационарное распределение / Герасин С.Н., Дикарев В.А., Числин Н.И. ; ХТУРЭ. – Харьков, 1996. – 9 с. – Рус. – Деп. в. ГНТБ Украины 12. 08. 96, № 1710 – Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, №1, 1997.
3. Анисимов В.А. Асимптотическое укрупнение неоднородных марковских и полумарковских систем с произвольным пространством состояний // ДАН УССР, 1981 А, – № 12. – С. 3-6.
4. Антонец В.А., Антонец М.А., Кудряшов А.В. О влиянии коллективных эффектов на течение крови в сети мелких сосудов // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пушино. – 1982. – С. 108-118
5. Балабудкин М.А. Совершенствование технологии изготовления лекарств путем применения роторно-пульсационных аппаратов. // Хим.-фарм. журнал. – 1978. – № 5. – С. 114-117.
6. Балабудкин М.А., Леквеишвили М.В. Усовершенствование процесса экстракции в диффузорах. // Хим.-фарм. журнал. – 1977. – № 8. – С. 62-64.
7. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.
8. Басманов А.Е. Исследование диффузии с помощью марковских процессов // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 2. – С. 53-54.
9. Басманов А.Е. Оценка марковского процесса по его фрагментам. // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 1. – С. 72-73.
10. Басманов А.Е. Синтез марковских процессов в широком смысле // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 2. – С. 64-67.
11. Басманов А.Е. Синтез марковского процесса по его фрагментам // 1-й Международный молодежный форум “Электроника и молодежь в XXI веке”: Тез. докл. – Харьков: ХТУРЭ. – 1997. – С. 79.
12. Басманов А.Е., Герасин С.Н., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Фокусировка распределений марковских процессов в широком смысле // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 15-16.
13. Басманов А.Е., Дикарев В.А. Стабилизация марковского процесса в окрестности распределения, заданного на конечном временном промежутке // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 8. – С. 69-71.
14. Басманов А.Е., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Восстановление дискретной цепи Маркова по ее фрагментам // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 7. – С. 93-95.
15. Басманов А.Е., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Приложение условных вероятностей к марковским процессам // Сб. Автоматизированные системы управления. ХТУРЭ. – 1998. – № 107. – С. 17-21.

16. Басманов Є.І., Басманов О.Є. Аналіз структури відтворення населення // Вісник Харківського національного університету. – 1999. – № 455. – С. 90-92.
17. Басманов Є.І., Басманов О.Є. Моделювання розміщення продуктивних сил // Сборник научных трудов Харьковского института социального прогресса. – 1999. – Выпуск 4. – С. 51-54.
18. Басманов Є.І., Басманов О.Є. Моделювання та прогнозування вікової структури населення // Захист довкілля від антропогенного навантаження. – 1999. – № 1. – С. 101-105.
19. Бережная Л.А., Пшуков Ю.Г., Куянцева А.М. О производстве извлечения травы горичвета экстрагированием с измельчением сырья в водной среде. // Фарм. журнал. – 1979. – № 1. – С. 59-62.
20. Бобылев Р.В. Об экстрагировании растительного сырья в турбулентном потоке экстрагента. // Биофармацевтические аспекты получения и назначения лекарств. – М.: 1971. – С. 46-50.
21. Бондаренко М.Ф., Басманов А.Е. Восстановление финального распределения вероятностей для процесса блуждания на графе // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 8. – С. 87-90.
22. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Кириллов А.Б., Коваленко Е.И., Крюков В.И. Об оценке синаптических весов нейронных схем при многомерном анализе импульсной активности. // Взаимодействующие марковские процессы и их применение в биологии. Пуццино. – 1979. С. 152-177.
23. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Кириллов А.Б., Коваленко Е.И., Крюков В.И. Кратковременная память как метастабильное состояние. Диффузионная аппроксимация // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пуццино. – 1982. – С. 88-98.
24. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 428 с.
25. Боровков А.А. Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 432 с.
26. Браверман Э.М. О восстановлении коэффициентов дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. – 1966. – № 3. – С. 17-22.
27. Броунштейн Б.И., Железняк А.С. Физико-химические основы жидкостной экстракции. – М.: Химия, 1966. – 252 с.
28. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1968. – 464 с.
29. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 415 с.
30. Валеев К.Г., Насимов Х.А. Необходимые и достаточные условия эргодичности конечного неоднородного процесса Маркова // Киев. ин-т народн. х-ва. – Киев, 1991. 9 с. – Деп. в УкрНИИТИ. 04.04.91, № 437 – Ук 91.
31. Валеев К.Г., Насимов Х.А. Необходимые и достаточные условия эргодичности конечнозначных неоднородных цепей Маркова // Киев. ин-т

- народн. х-ва. – Киев, 1991. 9 с. – Деп. в УкрНИИНТИ. 04.04.91, № 438 – Ук 91.
32. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990. – 376 с.
 33. Васильев А.В. Описание стационарных вероятностей некоторых марковских систем взаимодействия // Проблемы передачи информации, вып. 4. – 1975. – С. 109-112.
 34. Васильев Н.Б., Добрушин Р.Л., Пятецкий-Шапиро И.И. Марковские процессы на бесконечном произведении дискретных пространств. // Советско-японский симпозиум по теории вероятностей. Хабаровск. – 1969. – С. 3-28.
 35. Васильев Н.Б., Митюшин Л.Г., Пятецкий-Шапиро И.И., Тоом А.Л. Операторы Ставской. Препринт ИПМ, № 12, 1973.
 36. Вентцель А.Д., Фрейндлин М.И. О малых случайных возмущениях динамических систем // УМН – 1970. – Т. 25. – В. 1. – С. 3-55.
 37. Вентцель Е.С., Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1958. – 423 с.
 38. Веприк А.Е., Герасин С.Н., Дикарев В.А., Родзинский А.А., Числин Н.И. Методы и алгоритмы фокусировки распределений марковских процессов. – Харьков: ХТУРЭ, 1997. – 160 с.
 39. Виноградова О.С. Гиппокамп и память. – М.: Наука, 1975. – 332 с.
 40. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
 41. Герасин С.Н. Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем // Ин-т содержания и методов обучения. – Харьков: ХТУРЭ, 1999. – 212 с.
 42. Герасин С.Н., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Расщепление процесса на несвязанные фрагменты с одновременной фокусировкой в каждом из них // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 111-114.
 43. Герасин С.Н., Дикарев В.А., Числин Н.И. Существование предельных вероятностей для конечных процессов Маркова с убывающими к нулю временными промежутками перехода // Доповіді Національної академії наук України. – 1998. – № 7. – С. 15-19.
 44. Герасин С.Н., Дикарев В.А., Слипенченко Н.И. Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его параметров // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 8. – С. 90-93.
 45. Герасин С.Н., Кириченко Л.О., Родзинский А.А. Анализ эргодического режима бесконечных марковских цепей методом редукции // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 1999. – Вып. 109. – С. 61-66.
 46. Герасин С.Н., Кириченко Л.О., Родзинский А.А. Применение марковских моделей фармакинетики при анализе стабильности лекарственных форм // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 2. – С. 107-109.
 47. Герасин С.Н., Родзинский А.А. Моделирование динамики нейронной структуры, обладающей свойством кратковременной памяти // Сборник

- науч. трудов 4-ой Межд. конф. «Теория и техника передачи, приема и обработки информации», Харьков. – 1998. – С. 157-158.
48. Герасин С.Н., Четвериков Г.Г. Марковские модели взаимодействующих информационных систем // Друга Українська конференція з автоматичного керування. – Львів. – 1995. – Т. 4. – С. 50-51.
 49. Гихман И. И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
 50. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
 51. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 237 с.
 52. Гончаренко Г.К. Экстракция лекарственных веществ из растительного сырья. – Харьков, 1972. – 50 с.
 53. Грановский М.Г., Лавров И.С., Смирнов О.В. Электрообработка жидкостей. – Ленинград: Химия, 1976. – 216 с.
 54. Гуревич Б.М. Конечные аппроксимации бесконечных неотрицательных матриц и сходимость равновесных распределений // Доклады РАН, 1996. – Т. 347, № 6. – С. 732-735.
 55. Демиденко Н.Д. Моделирование и оптимизация тепломассообменных процессов в химической технологии. – М.: Наука, 1991. – 239 с.
 56. Демидович Б.П., Марон М.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
 57. Дикарев В.А. Локальные возмущения и фокусировка распределений марковских процессов // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 2. – С. 23-25.
 58. Дикарев В.А. Расщепление марковских процессов на несвязанные фрагменты // Харьк. техн. ун-т радиоэлектроники. – Харьков, 1996. – 11 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 14.02.96, № 524 – Ук96.
 59. Дикарев В.А. Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 3. – С. 134-136.
 60. Дикарев В.А. Стабилизация распределений марковского процесса в широком смысле // Радиоэлектроника и информатика. 1999. – № 4, – С. 104-107.
 61. Дикарев В.А. Стабилизация марковского процесса при возмущениях его континуальных компонент // Доповіди Національної академії наук України. – 2003. – № 5.
 62. Дикарев В.А. Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей // Харьк. техн. ун-т радиоэлектроники. – Харьков, 1995. – 9 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95, № 526 – Ук95.
 63. Дикарев В.А. Точки эргодичности и сходимость к финальным вероятностям // Харьк. техн. ун-т радиоэлектроники. – Харьков, 1994. – 7 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 17.10.94, № 2017 – Ук94.

64. Дикарев В.А. Условия фокусировки. Расщепление марковского процесса на невзаимодействующие фрагменты // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 4. – С. 97-100.
65. Дикарев В.А. Фокусировка распределений марковских процессов. // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 11. – С. 100-103.
66. Дикарев В.А. Фокусировка распределений марковских процессов в широком смысле. // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 2.
67. Добрушин Р.Л. Обобщение уравнений Колмогорова марковских процессов с конечным числом возможных состояний // Математ. сборник, 1953. – Т. 33 (75). – С. 567-596.
68. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 753 с.
69. Евдокимов А.Г. Минимизация функций и её приложения к задачам автоматизированного управления инженерными сетями. – Харьков: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985. – 288 с.
70. Залеская Е.В., Кириченко Л.О., Сидоров М.В. Оценка величины σ -фокусировки неоднородного марковского процесса с помощью алгоритма ε -сети // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. Сер. Новые решения в современных технологиях. – 2000. – Вып. 80. – С. 33-35.
71. Захаров В.П., Либизов Н.И., Асланов Х.А. Лекарственные вещества из растений и способы их производства. – Ташкент: Фан, 1980. – 232 с.
72. Зейфман А.И. О квазиэргодичности устойчивости некоторых неоднородных марковских процессов // Сиб. математ. журнал. – 1989. – Т. 30, № 2. – С. 85-90.
73. Зейфман А.И. Об асимптотическом поведении решений прямой системы Колмогорова // Укр. математ. журнал – 1983 – № 5. – С. 621-624.
74. Зейфман А.И. Об устойчивости неоднородных марковских цепей с непрерывным временем // Известия вузов. Математика. – 1991. – № 7. – С. 33-37.
75. Зубов В.И. Дифференциальные уравнения вероятностных распределений // Дифференциальные уравнения – 1979. – Т. 15. – № 2. – С. 351-352.
76. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: Сов. радио, 1973. – 231 с.
77. Карпелевич Ф.И. О корнях матриц с неотрицательными элементами // Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (1951). – С. 361-383.
78. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
79. Киржниц Д.А. Экстремальные состояния вещества // Успехи физ. наук. – 1971. – Т. 104, Вып. 3. – С. 489-509.
80. Коваленко Е.И., Крюков В.И., Борисюк Р.М., Борисюк Г.Н., Кириллов А.Б. Нейронная память: имитационная модель поля Ca_2 гиппокампа // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к

- математическому моделированию биологических систем. – Пушино. – 1982. – С. 77-107.
81. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория очередей. – М.: Мир, 1966, 276 с.
 82. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. – 299 с.
 83. Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи математических наук. – 1938. – №5. – С. 54.
 84. Колмогоров А.Н. Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний // Бюллет. МГУ. – 1937. – № 3. – С. 1-16.
 85. Комаров А.С. Марковские поля и растительные сообщества // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пушино. – 1979. – С. 6-25.
 86. Комаров А.С. Об элементарных структурах растительного покрова, устойчивых к внешним нарушениям // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пушино. – 1982. – С. 136-144.
 87. Копырин А.А. Теоретические основы экстракционных процессов. – Л.: ЛТИ, 1979. – 81 с.
 88. Копырин А.А., Прудникова Э.В. Комплексообразование и экстракция редкоземельных элементов. – Л.: ЛТИ, 1980. – 87 с.
 89. Королюк В.С. Стохастичні моделі систем. – К.: Либідь, 1993. – 135 с.
 90. Котов Ю.П., Пятецкий-Шапиро И.И., Ставская О.Н., Тоом А.Л. Однородные системы из формальных нейронов. // Модели нейронных структур. М. Наука. – 1970.
 91. Кохонен Т. Ассоциативная память. М.: Мир. – 1980.
 92. Крюков В.И. Марковские процессы взаимодействия и нейронная активность // Взаимодействующие марковские процессы в биологии. Пушино, 1977. – С. 127-145.
 93. Кузнецов П.С., Петунии Ю.И. Исследования случайного блуждания в нервных сетях и математическое моделирование некоторых нейрофизиологических процессов. // Стохастическая электрофизиология. Материалы симпозиума по статистической электрофизиологии. Вильнюс, Изд-во Вильн. ун-та. – 1968. Ч. 1. – С. 315-324.
 94. Кузнецов С.Е. Неоднородные марковские процессы // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. – 1982. – Т. 20. – 321 с.
 95. Кузнецов С.Е. Правые (неоднородные) марковские процессы и их связь с однородной теорией // ДАН СССР. – 1980. – Т. 250, №2. – С. 276-280.
 96. Курочкина М.И. Экстрагирование и выщелачивание твердых веществ. – Ленинград: Химия, 1978. С. 39-40.
 97. Лебедев Е.А., Лакашук А.И. Оценка максимального правдоподобия инфинитезимальной матрицы цепи Маркова с непрерывным временем // Докл. АН УССР. – Сер. А., 1986. – № 1. – С. 12-14.

98. Лысянский В.М. Процесс экстракции сахара из свеклы. Теория и расчет. – М.: Пищ. пром., 1973. – 224 с.
99. Лысянский В.М., Гребенюк С.М. Экстрагирование в пищевой промышленности. – М.: Агропромиздат, 1987. – 187 с.
100. Максимизация стационарных вероятностей одного типа однородных марковских процессов / Басманов А.Е.; ХТУРЭ. – Харьков, 1995. – 5 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 09.01.96, № 207-Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, № 1, 1997.
101. Марков А.А. Известия физико-математического общества Казанского университета. – 1906. – Т. 15, № 4. – С. 135-156.
102. Мелвин-Хьюз Э.А. Физическая химия. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 540 с.
103. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1955. – 291 с.
104. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
105. Молчанов Г.И. Интенсивная обработка лекарственного сырья. – М.: Медицина, 1981. – 205 с.
106. Молчанов Г.И. Ультразвук в фармации. М.: Медицина, 1980. – 202 с.
107. Моргалов Ю.Н., Демченко И.Г. Пространственное распределение кровотока и PO_2 в коре головного мозга // Физиол. журн. СССР. – 1970. – Т. 65, № 7. – С. 985-990.
108. Москаленко Ю.Е. Функциональная устойчивость системы мозгового кровообращения // Физиол. журн. СССР. – 1978. – Т. 64, № 5. – С. 589-597.
109. Нагаев С. В. Об эргодической теореме для однородных цепей Маркова // ДАН СССР. – 1982. – Т. 263, вып. 1. – С. 27-30.
110. Нагаев С.В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова // Теор. вероятностей и ее применение. – 1957. – Т. 2, вып. 4 – С. 389-396.
111. Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде (гидродинамическое описание). – М.: Наука, 1971. – 190 с.
112. Оптимизация траектории изменения инфинитезимальной матрицы неоднородного марковского процесса / Басманов А.Е.; ХТУРЭ. – Харьков, 1996. – 6 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 12.08.96, № 1691-Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, №2, 1997.
113. Основы жидкостной экстракции / Ягодин Г.А., Каган С.З., Тарасов В.В. и др. – М.: Химия, 1981. – 400 с.
114. Пассет Б.В., Воробьева Е.Я. Технология химико-фармацевтических препаратов и антибиотиков. – М.: Медицина, 1977. – 430 с.
115. Петунии Ю.И. Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине. – Киев: Наукова думка, 1981.
116. Пирогов С.А., Синай Я.Г. Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга // Функцион. анализ и его прилож. – 1974. – Т. 8, Вып. 1. – С. 25-31.

117. Пономарев В.Д. Экстрагирование лекарственного сырья. – М.: Медицина, 1976. – 125 с.
118. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – 494 с.
119. Решение системы уравнений Колмогорова с медленно меняющимися параметрами / Герасин С.Н.; ХТУРЭ. – Харьков, 1996. – 6 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 12. 08. 96, № 1708 – Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, №1, 1997.
120. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. – М.: Сов. Радио, 1966. – 321 с.
121. Рогов И.А., Горбатов А.В. Физические методы обработки пищевых продуктов. М.: Пищевая промышленность, 1976. – 212 с.
122. Родзинский А.А. Марковские процессы с изменяющимся числом состояний // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 1. – С. 73-75.
123. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
124. Романков П.Г., Фролов В.Ф. Массообменные процессы химической технологии. – Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1990. – 383 с.
125. Рудобашта С.П. Зональный метод расчета непрерывнодействующих массообменных аппаратов для систем с твердой фазой // Теоретические основы химической технологии. – 1978. – Т. 8. – № 1 – С. 22-24.
126. Рудобашта С.П. Массоперенос в системах с твердой фазой. – М.: Химия, 1980. – 248 с.
127. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. – М.: Химия, 1993. – 208 с.
128. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания с применениями. – М.: Сов. радио, 1965. – 209 с.
129. Сарымсаков Т.А. Об эргодическом принципе для цепей Маркова // ДАН СССР. – 1953. Т. 40, № 1. – С. 25-28.
130. Сбитнев В.И., Гуляев А.А., Брагин А.Г. Динамические модели функциональной организации гиппокампа. // Механизмы памяти и обучения. – М.: Наука, 1981.
131. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 228 с.
132. Севастьянов Б.А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложения к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – Т.2. Вып. 1. – С. 106-115.
133. Сенченко Д.В. О характеристиках неоднородных марковских процессов с конечным числом состояний // Теория вероятностей и ее приложения. – 1968. – № 3. – С. 548-555.
134. Сенченко Д.В. Об однозначном определении марковских процессов с конечным числом состояний // Математ. сборник. – 1966. – Т. 71 (113), № 1. – С. 30-42.
135. Сенченко Д.В. Финальная σ -алгебра неоднородной марковской цепи с конечным числом состояний // Математические заметки. – 1972. – Т. 12, № 3. – С. 295-302.

136. Синтез стохастической матрицы по системе ее фрагментов / Басманов А.Е., Дикарев В.А.; ХТУРЭ. – Харьков, 1997. – 8 с. – Рус. – Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97, № 76-Уі97 // Аннот. в ж. Делоповані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, №1, 1998.
137. Современная математика для инженеров // Под редакцией Э. Ф. Беккенбаха. – М.: ИЛ, 1959. – 229 с.
138. Современные методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта: перев. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
139. Сонин И.М. Разделение струй и обобщение на неоднородный случай теоремы о разложении конечной однородной марковской цепи на эргодические компоненты // ДАН СССР. – 1989. – Т. 304, № 1. – С. 36-40.
140. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.
141. Ставская О.Н., Пятецкий-Шапиро И.И. О некоторых свойствах однородных сетей из спонтанно активных элементов // Проблемы кибернетики. – 1968. – Т. 20. – С.91-106.
142. Ставская О.Н., Пятецкий-Шапиро И.И. Об однородных сетях из спонтанно активных элементов // Проблемы передачи информации. – 1975. – № 11. – С. 91-106.
143. Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов // Проблемы передачи информации. – 1966. – № 3. – С. 1-22.
144. Стратанович Р.Л. Условные марковские и их применения к теории оптимального управления. – М.: Изд-во МГУ. – 1966. – 380 с.
145. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Фёдоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 382 с.
146. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
147. Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей / Дикарев В.А. – ХТУРЭ. – Харьков, 1995. – 11 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95 № 526-Ук 95.
148. Точки фокусировки и стабилизации неоднородных марковских процессов / Дикарев В.А. – ХТУРЭ. – Харьков, 1995. – 9 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 2.03.95 № 533 - Ук95.
149. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
150. Федосов А.А. Вероятностный анализ популяции, обитающей в сложной стохастической среде // Моделир. и диагност. упр. систем / АН УССР. Ин-т прикл. мат. и мех. – Киев, 1991. – С. 13-135.
151. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.: В 2-х т. – М.: Мир. – Т. 1, 1984. – 528 с.
152. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1937. – 987 с.
153. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа. – М.: ИЛ, 1956. – 320 с.

154. Хинчин А.Я. Асимптотические законы теории вероятностей. – М.: Л., ОНТИ, 1936. – 95 с.
155. Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. – 307 с.
156. Цирельсон Б.С. Надежное хранение информации в системе из локально взаимодействующих ненадежных элементов. // Взаимодействующие марковские процессы в биологии. – Пушино, 1977. – С. 24-38.
157. Четаев А.Н. Нейронные сети и цепи Маркова. – М.: Наука, 1985. – 126 с.
158. Численное моделирование неоднородных марковских процессов, инфинитезимальные матрицы которых имеют особенности / Веприк А.Е., Дикарев В.А., Забелин В.И.; ХТУРЭ. – Харьков, 1996. – 10 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины, № 529 – Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, № 1, 1997.
159. Шнирман М.Г. О неединственности в некоторых однородных средах. // Взаимодействующие марковские процессы в биологии. – Пушино, 1977. – С. 38-44.
160. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
161. Эклс Дж. Физиология синапсов. М.: ИЛ, 1966.
162. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
163. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
164. Andersen P. Long-lasting facilitation of synaptic transmission. // Functions of the septo-hippocampal system. – Ciba, Elsevier, 1978.
165. Bachelier L. Ann. scient. Ecole norm. super. – 1907. – V. 17. – P. 21-26.
166. Bartolomew D.J. Stochastic Models for Social Processes. – Chichester: John Wiley & Sons, 1982. – 238 p.
167. Basmanov A. E., Dikarev V. A., Rodzinsky A. A. Behavior analyze the economic system based on indicators its regions // 3 Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), – Новосибирск, 1998.
168. Basmanov A.E., Dikarev V.A., Gerasin S.N. Focusing and stabilization of distribution of Markov processes in wide sence // Proc. 3-rd Ukrainian-Scandinavian Conference in Prob. theory and Math. Stat. – Kyiv, Ukraine, 1999. – P. 22.
169. Carette Ph. Characterizations of embeddable 3×3 stochastic matrices with a negative eigenvalue // New York Journal of Mathematics. – 1991. – №1. – P. 120-129.
170. Chen A., Renshaw E. Existence and unique criteria for conservative un-instantaneous denumerable Markov processes // Probab. Theory and relat. Fields. – 1993. – № 4. – P. 427-456.
171. Chung K.L. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, second ed., X. Y., Springer, 1967. – 205 p.
172. Cox D.R. The statistical analysis of dependencies in point processes. // Stochastic point processes. – Ed Lewis P.A.W. N.Y., Willey, 1972.

173. Dikarev V.A., Gerasin S.N., Rodzinsky A.A. Stabilization of process of random walks on graphs // 3 Ukrainian-Scandinavian conf. in Probability Theory and Mathematical Statistics, Kiev, Ukraine, 1999. P. 39.
174. Dikarev V.A., Veprik A.I., Zabelin V.I. Modeling of disintegrating economy by Markov processes // 2 International conference on "Computing in economics and finance", Geneva, 1996. – p. 170-171.
175. Frydman H. The embedding problem for Markov chains with three states. // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1980 – № 87 – P. 285-294.
176. Gilpin Michael. Demographic stochasticity: a Markovian approach // J. Theor. Biol. – 1992. – № 1. – P. 1-8.
177. Huang Ying, Veriot Arthur F. Markov branching decision chains with interest-rate-dependent rewards // Prob. Eng. and Inf. Sci. – 1995. – № 1. – P. 99-121.
178. Kawasaki K. Kinetics of Ising models. // Phase transition and critical phenomena. – Cd. Domb C. and Green M., V. 2. Academic Press, 1972.
179. Kendall D.G., Renter G.E.H. The calculation of the Ergodic Projection for Markov Chains and processes with countable infinity of states // Acta Math. – 1957. – V. 97. – P. 103-144.
180. Kingman J.F.C. Continuous time Markov processes // Proc. London Math. Soc. – 1963. – № 52. – P. 359-604.
181. Kingman J.F.C. The imbedding problem for finite Markov chains. // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. – 1962. – № 1. – P. 345-351.
182. Lederman W., Laida S. On a problem in population structure // Linear Algebra and Appl. – 1992. – № 166. – P. 97-113.
183. Little W.A. The existence of persistent states in the brain. – Math. Biosci., 1974. V. 19. – P. 101-120.
184. Marr D. A theory of cerebellar cortex. – J. Physiol., 1969. V. 202. – P. 437-470.
185. Mc. Clean Sally. Manpower planning models and their estimation // Eur. J. Oper. Res. – 1991. – № 2. – P. 179-187.
186. Mechata K.M., Duraiswamy S. A parity dependent immigration-birth-death-emigration process. // Math. Biosci. – 1992. – № 2. – P. 177-199.
187. Morgan Byron I.T. Expected size distributions in models of group dynamics // J. App. Probab. – 1993. – № 1. – P. 1-16.
188. Rising W. Applications of generalized inverses to Markov chains // Adv. Appl. Probab. – 1991. – № 2. – P. 293-302.
189. Schwartz D. On hitting probabilities for an annihilating particle model. – Ann. Probab. – 1978. – V. 6, № 3. – P. 398-403.
190. Shaw G.L., Vasudevan R. Persistent states of neural networks and the random nature of synaptic transmission. – Math. Biosci., 1974.
191. Singer B., Spilerman S. Fitting stochastic models to longitudinal survey data – some examples in the social sciences // Bull. Int. Statist. Inst. – 1977. – № 3 (47). – P. 283-300.
192. Subelman E.J. On the class of Markov chains with finite convergence time // Stochastic Processes and their application. – 1976. – № 4. – P. 253-259.
193. Wang Jianqiong, Yang Fengxiang. Study on the death law of population // Math. Appl. – 1995. – № 1. – P. 14-19.
194. Wilson H.W., Cowan J.D. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. – Biophys. J., 1972. V. 12. – P. 1-24.

Приложение А

Синтез марковского процесса по его фрагментам

Пример 1.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Фрагмент, содержащий состояния {1,2,3,4}

0.3363	0.1126	0.2640	0.2871
0.0857	0.2604	0.3306	0.3233
0.4669	0.3460	0.0259	0.1612
0.3086	0.3097	0.3023	0.0794

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Фрагмент, содержащий состояния {3,4,5,6}

0.0281	0.1861	0.3981	0.3877
0.4683	0.0810	0.0743	0.3764
0.2385	0.0578	0.2655	0.4382
0.1910	0.2354	0.1781	0.3956

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

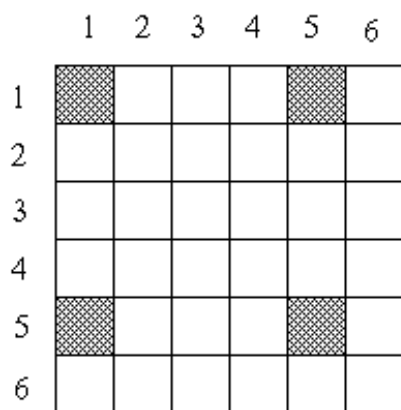
Фрагмент, содержащий состояния {1,2,6}

0.6461	0.1983	0.1556
0.1836	0.5031	0.3133
0.4554	0.0954	0.4492

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Фрагмент, содержащий состояния {2,5,6}

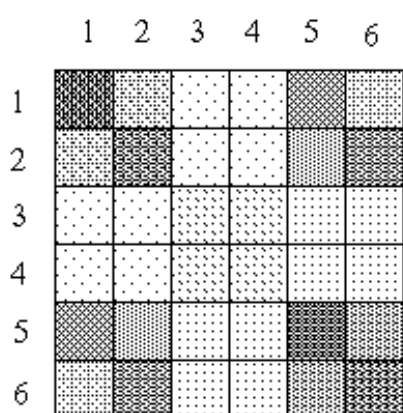
0.3661	0.4221	0.2118
0.3635	0.2363	0.4002
0.1191	0.2669	0.6141



Фрагмент, содержащий состояния {1,5}

0.6819 0.3181

0.7840 0.2160



Результаты синтеза состояний {1,2,3,4,5,6}

0.2733 0.0876 0.2137 0.2324 0.1275 0.0655

0.0614 0.1774 0.2267 0.2217 0.2066 0.1063

0.2775 0.2056 0.0150 0.0960 0.2056 0.2003

0.2404 0.2413 0.2378 0.0515 0.0362 0.1928

0.4055 0.1702 0.1013 0.0246 0.1117 0.1867

0.2711 0.0544 0.1291 0.1591 0.1184 0.2680

Сумма квадратов отклонений от исходных данных $F = 0.0004$

Проверим гипотезу о том, являются ли наблюдаемые значения фрагментами некоторого марковского процесса, задавшись доверительной вероятностью $p_0 = 0,95$.

Таблица А.1

Проверка гипотезы для строки 1 ($\chi_{кр}^2 = 12,6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right $	$\frac{\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right }{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,8070	0,3386	0,0023	0,023	0,000529
		0,1086	0,0040	0,040	0,0016
		0,2648	0,0008	0,008	0,000064
3	0,4264	0,6409	0,0052	0,052	0,0027
		0,2054	0,0071	0,071	0,005
5	0,4008	0,6819	0	0	0
Итого, η	-	-	-	-	0,009893

Таблица А.2

Проверка гипотезы для строки 2 ($\chi_{кр}^2 = 14,1$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right $	$\frac{\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right }{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,6872	0,0893	0,0036	0,036	0,0013
		0,2581	0,0023	0,023	0,0005
		0,3300	0,0006	0,006	0,000036
3	0,3451	0,1779	0,0057	0,057	0,0032
		0,5141	0,0110	0,110	0,0121
4	0,4903	0,3618	0,0043	0,043	0,00185
		0,4213	0,0008	0,008	0,000064
Итого, η	-	-	-	-	0,01905

Таблица А.3

Проверка гипотезы для строки 3 ($\chi_{кр}^2 = 12,6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right $	$\frac{\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right }{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,5941	0,4671	0,0002	0,002	0,000004
		0,3461	0,0001	0,001	0,000001
		0,0252	0,0007	0,007	0,000049
2	0,5169	0,0290	0,0009	0,009	0,000081
		0,1857	0,0004	0,004	0,000016
		0,3978	0,0003	0,003	0,000009
Итого, η	-	-	-	-	0,000160

Таблица А.4

Проверка гипотезы для строки 4 ($\chi_{кр}^2 = 12,6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right $	$\frac{\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right }{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,7710	0,3118	0,0032	0,032	0,001024
		0,3129	0,0032	0,032	0,001024
		0,3084	0,0039	0,039	0,001521
2	0,5183	0,4588	0,0095	0,095	0,009025
		0,0994	0,0184	0,184	0,033856
		0,0698	0,0045	0,045	0,002025
Итого, η	-	-	-	-	0,048475

Таблица А.5

Проверка гипотезы для строки 5 ($\chi_{кр}^2 = 12,6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right $	$\frac{\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right }{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
2	0,4243	0,2387	0,0002	0,002	0,000004
		0,0580	0,0002	0,002	0,000004
		0,2633	0,0022	0,022	0,000484
4	0,4686	0,3632	0,0003	0,003	0,000009
		0,2384	0,0021	0,021	0,000441
5	0,5172	0,7840	0	0	0
Итого, η	-	-	-	-	0,000942

Таблица А.6

Проверка гипотезы для строки 6 ($\chi_{кр}^2 = 14,1$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right $	$\frac{\left \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right }{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
2	0,6476	0,1914	0,0004	0,004	0,000016
		0,2358	0,0004	0,004	0,000016
		0,1755	0,0026	0,026	0,000676
3	0,5935	0,4568	0,0014	0,014	0,000196
		0,0917	0,0037	0,037	0,001369
4	0,4408	0,1234	0,0043	0,043	0,001849
		0,0015	0,0015	0,015	0,000225
Итого, η	-	-	-	-	0,004347

Пример 2.

	1	2	3	4	5	6
1	••••	••••	••••	••••		
2	••••	••••	••••	••••		
3	••••	••••	••••	••••		
4	••••	••••	••••	••••		
5						
6						

Фрагмент, содержащий состояния {1,2,3,4}

0.1083	0.4849	0.4059	0.0009
0.1082	0.3180	0.1637	0.4101
0.6476	0.3524	0.0000	0.0000
0.5169	0.4831	0.0000	0.0000

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3			••••	••••	••••	••••
4			••••	••••	••••	••••
5			••••	••••	••••	••••
6			••••	••••	••••	••••

Фрагмент, содержащий состояния {3,4,5,6}

0.0000	0.0000	0.8577	0.1423
0.0000	0.0000	0.5372	0.4628
0.3922	0.0609	0.3412	0.2057
0.0129	0.4036	0.4767	0.1068

	1	2	3	4	5	6
1	••••	••••			••••	
2	••••	••••			••••	
3						
4						
5	••••	••••			••••	
6						

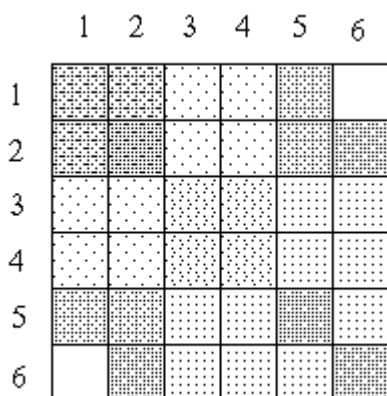
Фрагмент, содержащий состояния {1,2,5}

0.1639	0.7341	0.1020
0.0723	0.2126	0.7150
0.1809	0.2446	0.5745

	1	2	3	4	5	6
1						
2		••••				••••
3						
4						
5						
6		••••				••••

Фрагмент, содержащий состояния {2,6}

0.2534	0.7466
0.3921	0.6079



Результаты синтеза состояний {1,2,3,4,5,6}

В строке 1 не было полной информации о всех состояниях

0.0360 0.1058 0.0545 0.1364 0.3557 0.3117

Фрагменты, содержащие состояние 3, пересекались нулевыми элементами

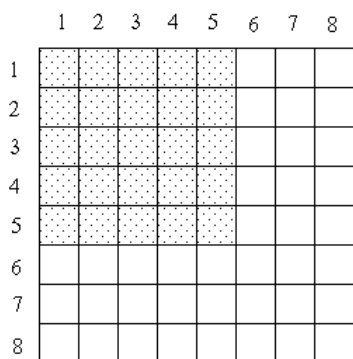
Фрагменты, содержащие состояние 4, пересекались нулевыми элементами

0.0858 0.1160 0.3131 0.0486 0.2724 0.1642

В строке 6 не было полной информации о всех состояниях

Сумма квадратов отклонений от исходных данных $F = 0.0000$

Пример 3.



Фрагмент, содержащий состояния {1,2,3,4,5}

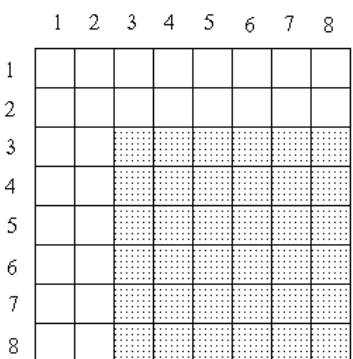
0.2507 0.2254 0.1504 0.0954 0.2781

0.0049 0.0968 0.2974 0.3367 0.2643

0.1294 0.0173 0.3138 0.3014 0.2382

0.2113 0.1306 0.2676 0.2106 0.1800

0.1944 0.2542 0.1460 0.1517 0.2538



Фрагмент, содержащий состояния {3,4,5,6,7,8}

0.2739 0.2631 0.2079 0.0470 0.1978 0.0104

0.2295 0.1806 0.1544 0.0845 0.1691 0.1819

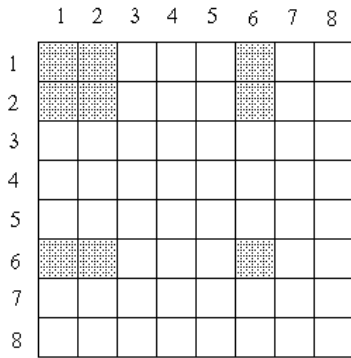
0.1145 0.1189 0.1989 0.1921 0.1830 0.1926

0.0778 0.2220 0.0219 0.2812 0.1925 0.2046

0.4202 0.2020 0.0075 0.1853 0.1645 0.0205

0.2060 0.0198 0.3769 0.1061 0.0099 0.2813

Фрагмент, содержащий состояния {1,2,6}

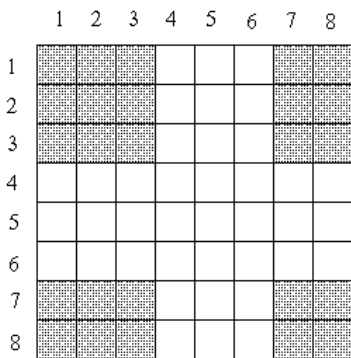


0.3813 0.3428 0.2759

0.0138 0.2705 0.7157

0.5660 0.2626 0.1713

Фрагмент, содержащий состояния {1,2,3,7,8}



0.2090 0.1879 0.1253 0.2767 0.2011

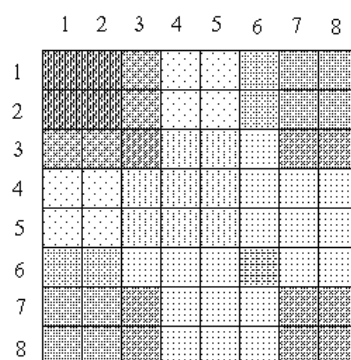
0.0060 0.1181 0.3630 0.4239 0.0890

0.1852 0.0247 0.4490 0.3242 0.0170

0.1845 0.2919 0.3635 0.1423 0.0178

0.2746 0.2199 0.2095 0.0100 0.2860

Результаты синтеза состояний {1,2,3,4,5,6,7,8}



0.1429 0.1284 0.0857 0.0544 0.1585 0.1034 0.1892 0.1375

0.0029 0.0577 0.1774 0.2009 0.1577 0.1527 0.2072 0.0435

0.1001 0.0134 0.2428 0.2332 0.1843 0.0417 0.1753 0.0092

0.1401 0.0866 0.1775 0.1397 0.1194 0.0653 0.1308 0.1406

0.1127 0.1474 0.0847 0.0880 0.1472 0.1422 0.1354 0.1425

0.3936 0.1827 0.0330 0.0941 0.0093 0.1192 0.0816 0.0867

0.1375 0.2176 0.2710 0.1303 0.0048 0.1195 0.1061 0.0132

0.1817 0.1455 0.1386 0.0133 0.2536 0.0714 0.0066 0.1893

Сумма квадратов отклонений от исходных данных $F = 0.0000$

Приложение Б

Сходимость плотности распределения вероятностей диффузионного процесса к предельной плотности

Пример 1.

Коэффициент сноса $a(t, x) = 0$;

коэффициент диффузии $\sigma^2(t, x) = (1 - x)^2 + 0,1$;

начальное распределение $\varphi(0, x) = 0,5$.

Графики плотности распределения вероятностей (сплошная линия) и нулевого собственного распределения (штриховая линия) в различные моменты времени приведены ниже (рис. Б.1-Б.5).

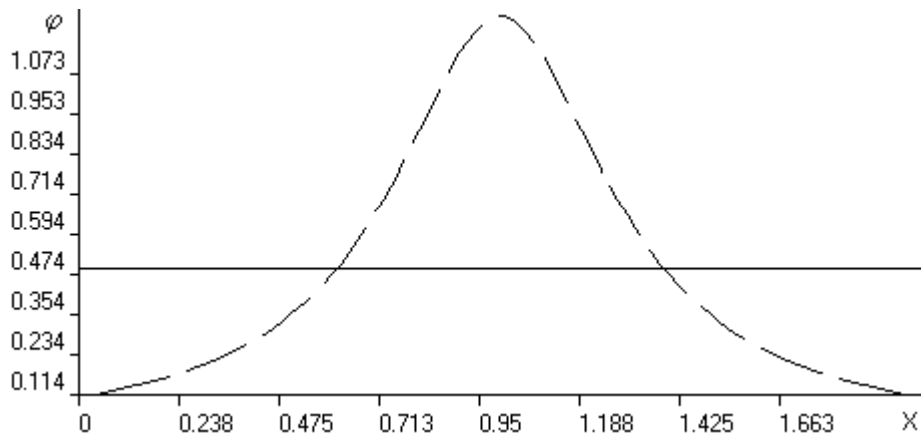


Рис. Б.1. Плотность распределения вероятностей при $t = 0$

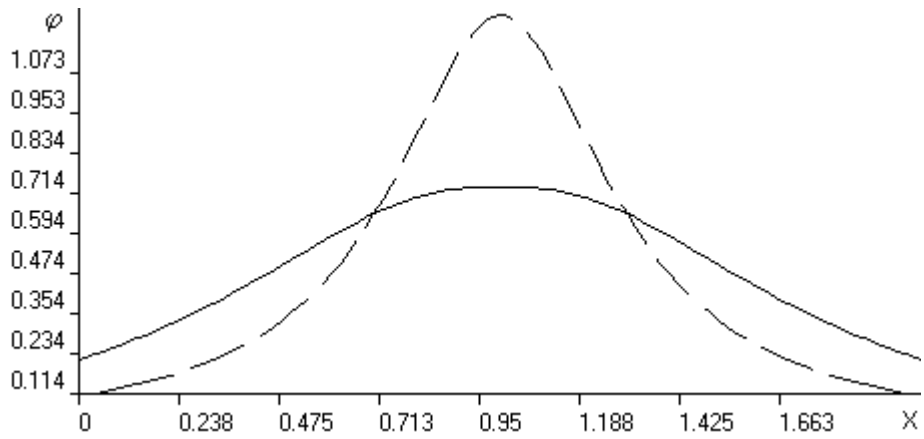


Рис. Б.2. Плотность распределения вероятностей при $t = 0,4$

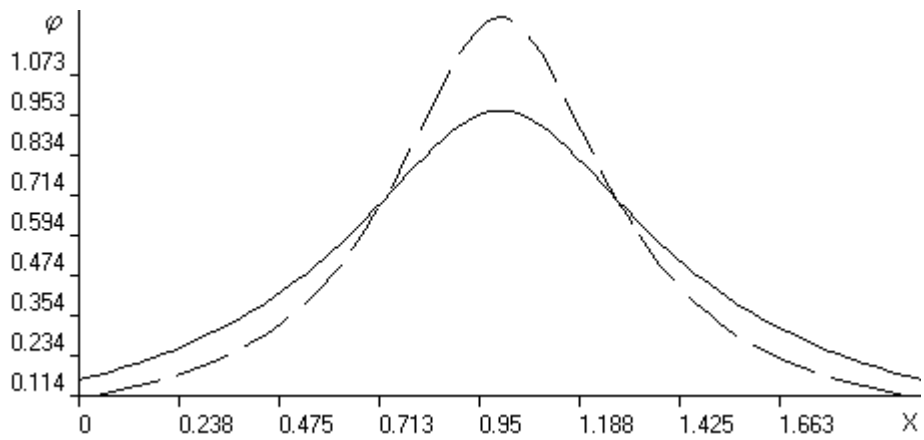


Рис. Б.3. Плотность распределения вероятностей при $t = 0,8$

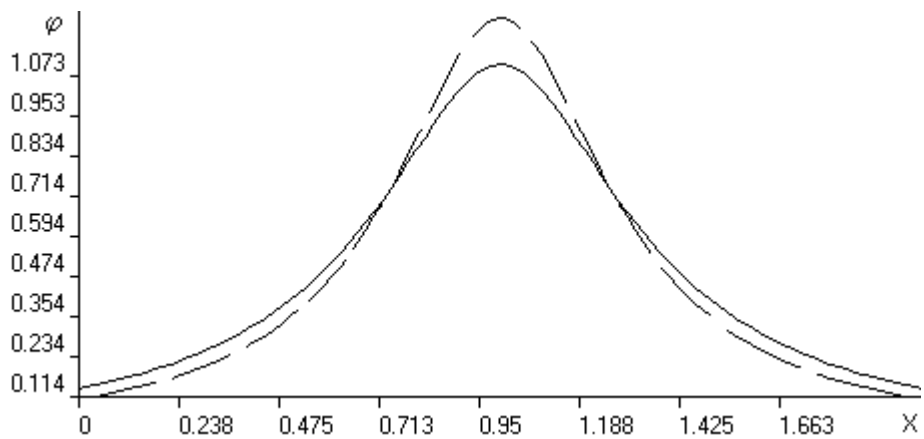


Рис. Б.4. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,2$

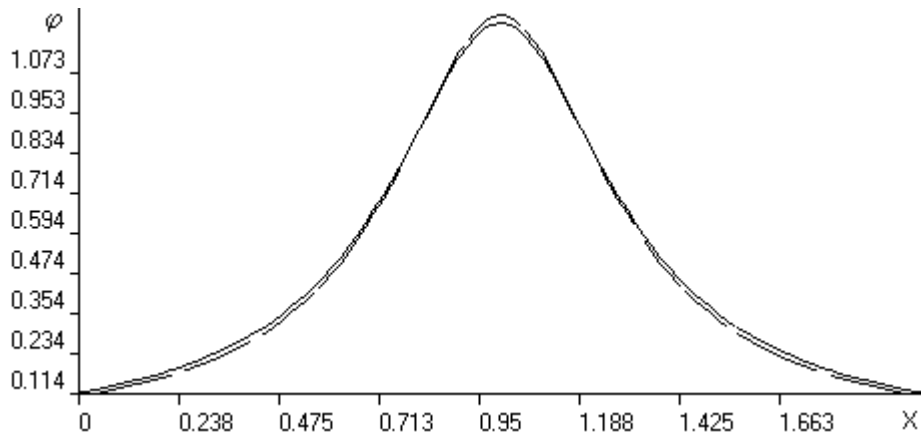


Рис. Б.5. Плотность распределения вероятностей при $t = 2$

Пример 2.

Коэффициент сноса $a(t, x) = 0$;

коэффициент диффузии $\sigma^2(t, x) = \left(\frac{1}{2-t} + t\right)(x+1) + xt$;

начальное распределение $\varphi(0, x) = 0,5$.

Графики плотности распределения вероятностей (сплошная линия) и нулевого собственного распределения (штриховая линия) в различные моменты времени приведены ниже (рис. Б.6-Б.10).

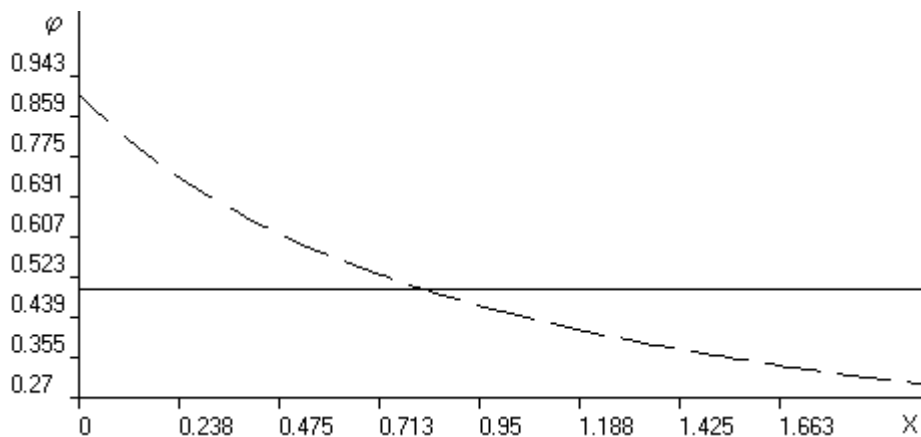


Рис. Б.6. Плотность распределения вероятностей при $t = 0$

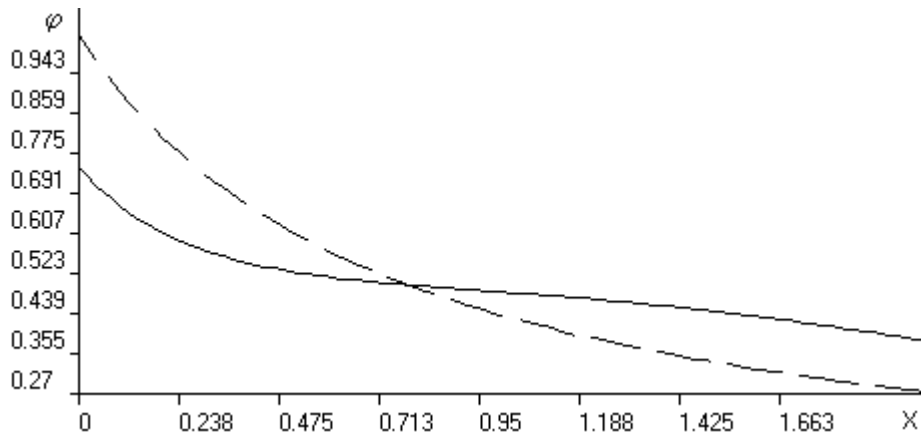


Рис. Б.7. Плотность распределения вероятностей при $t = 0,3$

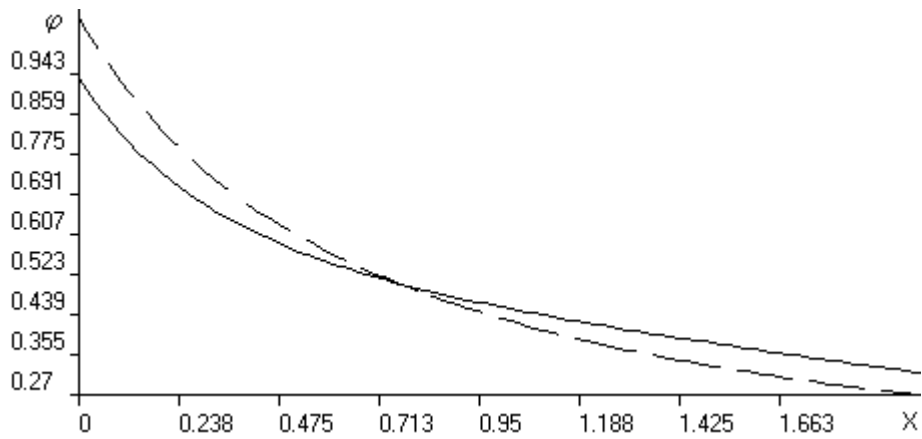


Рис. Б.8. Плотность распределения вероятностей при $t = 0,6$

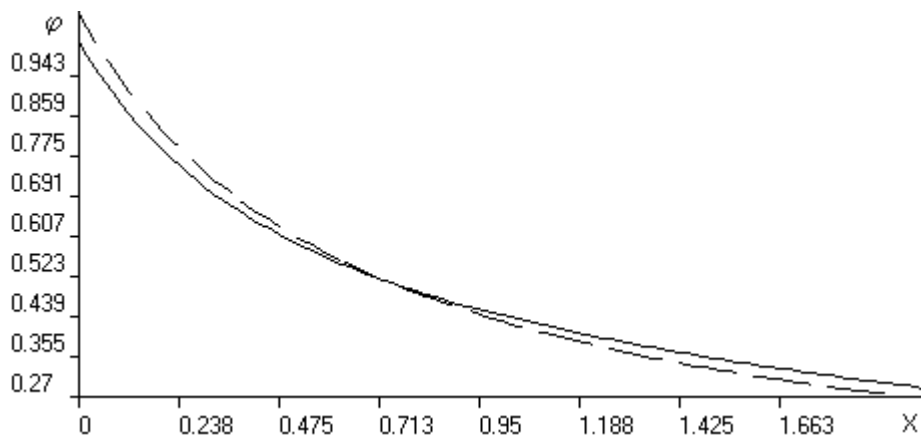


Рис. Б.9. Плотность распределение вероятностей при $t = 0,8$

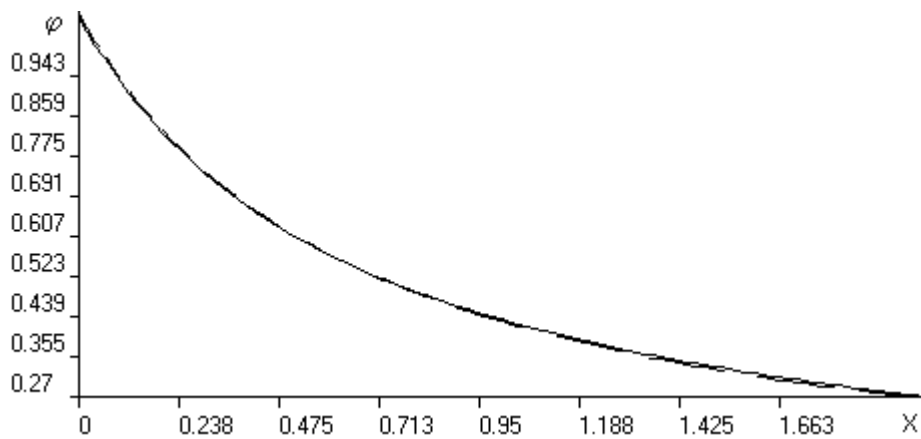


Рис. Б.10. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,1$

Пример 3.

Коэффициент сноса $a(t, x) = 0$;

коэффициент диффузии $\sigma^2(t, x) = \left(\frac{1-x}{2-t}\right)^2 + (x+1)t + 0,1$;

начальное распределение $\varphi(0, x) = 0,5$.

Графики плотности распределения вероятностей (сплошная линия) и нулевого собственного распределения (штриховая линия) в различные моменты времени приведены ниже (рис. Б.11-Б.15).

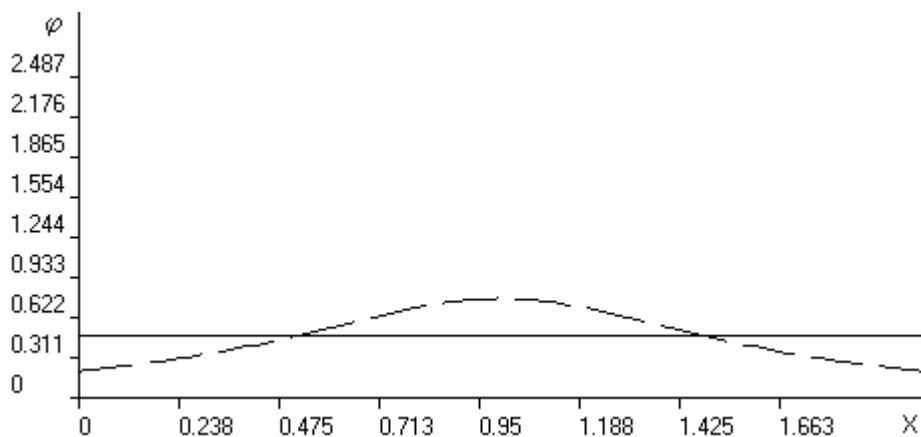


Рис. Б.11. Плотность распределения вероятностей при $t = 0$

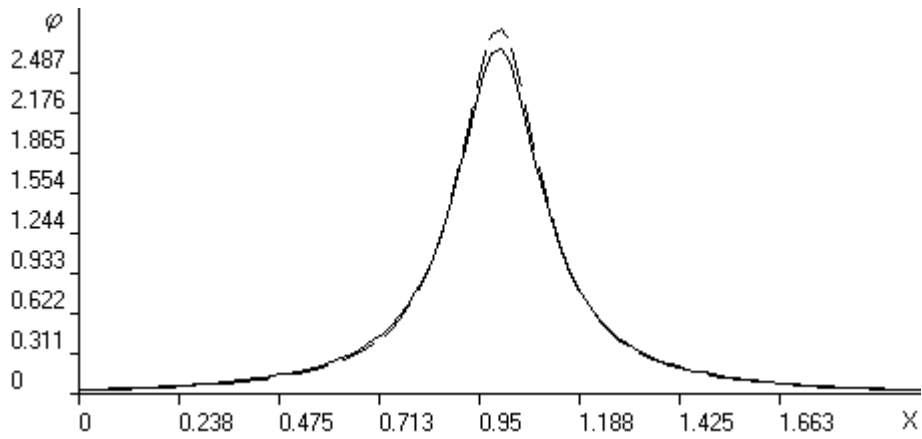


Рис. Б.12. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,94$

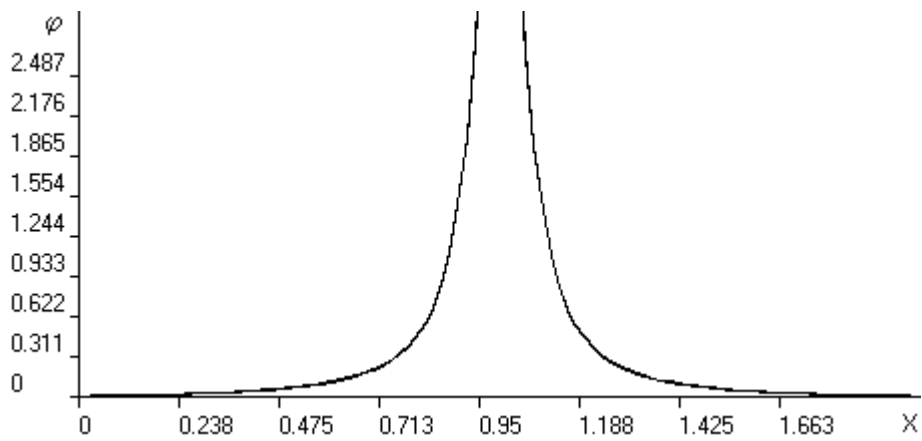


Рис. Б.13. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,97$

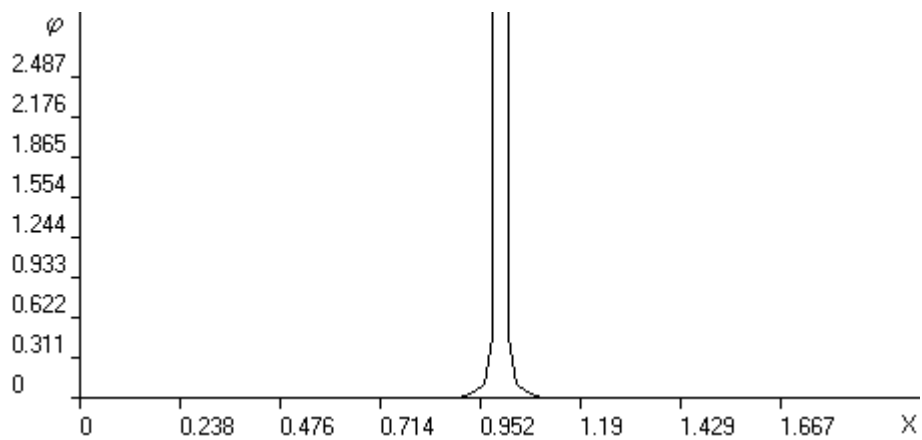


Рис. Б.14. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,999$

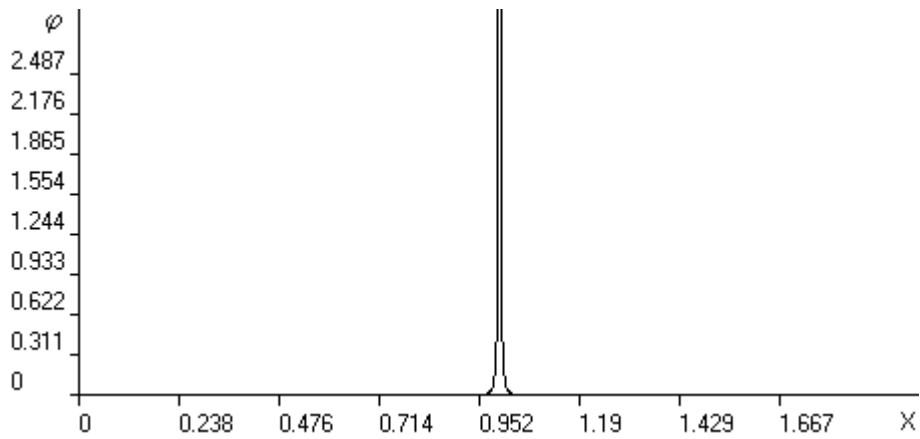


Рис. Б.15. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,9999$

Пример 4.

Коэффициент сноса $a(t, x) = 0$;

коэффициент диффузии $\sigma^2(t, x) = \frac{0,1}{(1-x)^2 + 2-t}$.

Графики плотности распределения вероятностей (сплошная линия) и нулевого собственного распределения (штриховая линия) для начального распределения $\varphi(0, x) = 0,5$ приведены на рис. Б.16, Б.17.

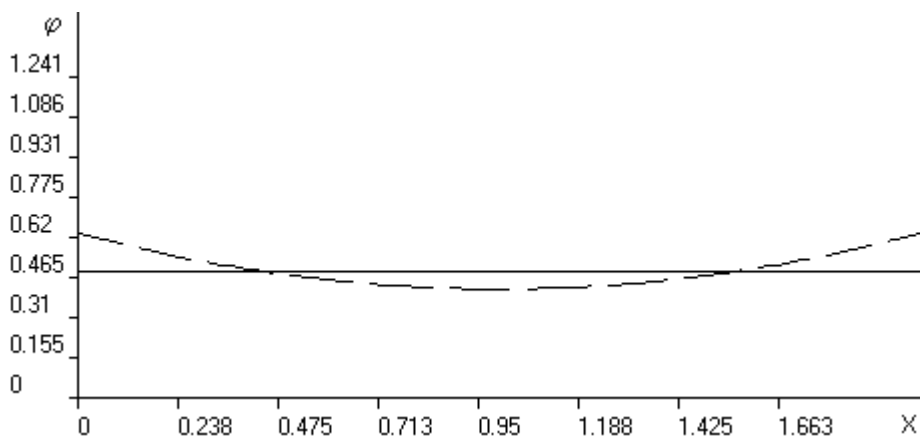


Рис. Б.16. Плотность распределения вероятностей при $t = 0$

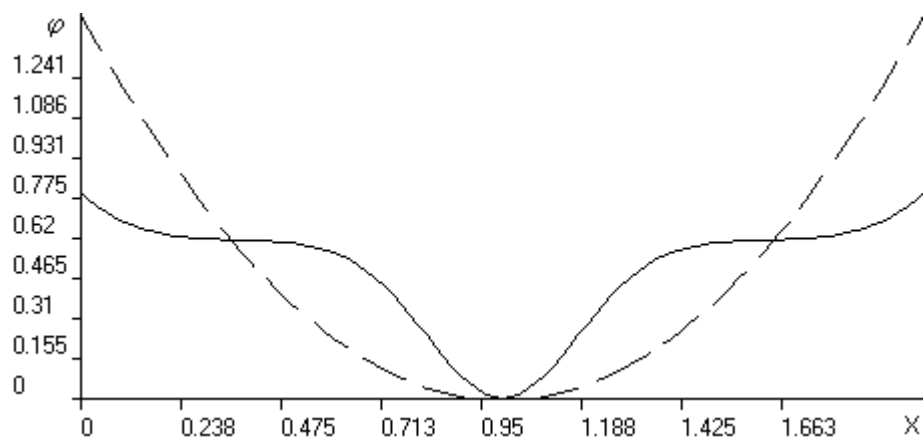


Рис. Б.17. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,999$

Графики плотности распределения вероятностей (сплошная линия) и нулевого собственного распределения (штриховая линия) для начального распределения $\varphi(0, x) = \frac{x}{2}$ приведены на рис. Б.18, Б.19.

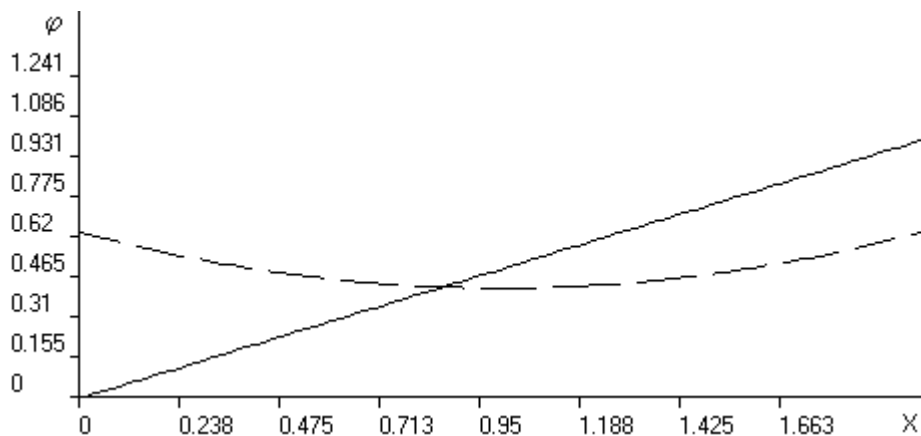


Рис. Б.18. Плотность распределения вероятностей при $t = 0$

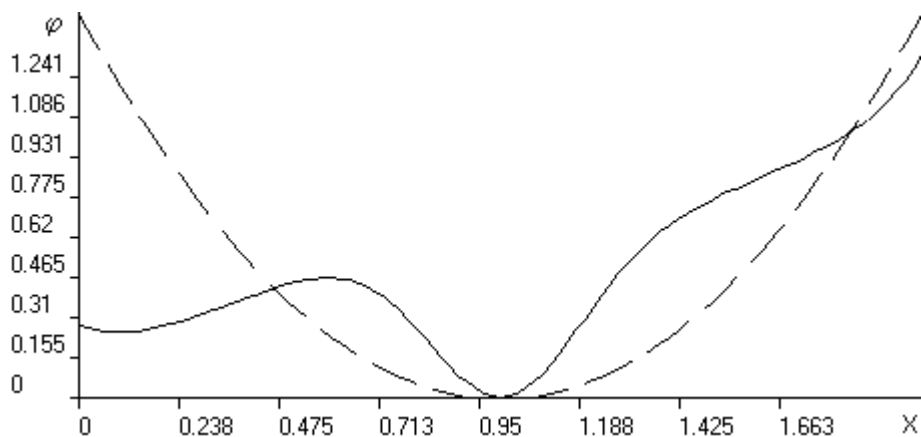


Рис. Б.19. Плотность распределения вероятностей при $t = 1,999$