інструкції з керованості. Загальні, обов'язкові для всіх підводних роботів положення по використанню рулів на різних швидкостях ходу визначаються інструкціями.

Висновок. Розглянуто питання керованості підводного робота у вертикальній площині за допомогою горизонтальних носових і кормових рулів в процесі його занурення та вирининня на поверхню моря після проведення аварійних робіт.

Література

1. *Король О.* Движение подводной лодки в вертикальной плоскости при перекладке горизонтальных рулей. [Електронний ресурс] / О.Король // Бібліотечний вісник — 2007. — № 9 — С. 43-51.
   – Режим доступу до журн. : http://podlodka.info/content/view/358/207/
2. *Осипенко Л.* Атомная подводная эпопея /Л.Осипенко, Л.Жильцов, Н. Мормуль//: М.: "Боргес", 1994. - 350 с.
3. *Ванько В.И.* Математическая модель всплытия подводной лодки /В.И.Ванько, А.В.Иванова// - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2001 г.- 11 с.
4. *Новіков В.С.* Математична модель процесу вирининня підводного рятувального апарата /В.С.Новіков // Прикладна геометрія і інженерна графіка. – Київ: КНУБА, Випуск 85, 2010.- С.76 - 82

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПОДВОДНОГО РОБОТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ НОСОВЫМИ И КОРМОВЫМИ РУЛЯМИ

Новиков В.С.

Аннотация

Рассмотрены вопросы управляемости подводного робота в вертикальной плоскости при помощи горизонтальных носовых и кормовых рулей.

DIRIGIBILITY OF SUBMARINE ROBOT AT VERTICAL PLANE BY NASAL AND FORAGE HELMS

V. Novikov

Summary

The questions of divisibility of submarine robot are considered at vertical plane through horizontal nasal and of forage helms.

УДК 515.2

КРИТЕРІЙ МЕТРИКИ ВІД'ЄМНОЇ КРИВИНИ, ЯКА ВІДПОВІДАЄ МІНІМАЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ

Руденко С.Ю.
Національний університет цивільного захисту України (м.Харків)
Тел. (057) 337-25-61

Анотація **– розглянуто критерій існування метрики від'ємної кривини, яка відповідає мінімальній поверхні.**

Ключові слова **– мильна плівка, мінімальна поверхня.**

Постановка проблеми. Загальновідомими прикладами мінімальних поверхонь є мильні плівки. Просторова форма плівки S істотно залежить від форми контуру, на який вона натягнута. Міняючи контур, можна міняти зовнішню форму мильної плівки. При цьому, однак, може мінятися і її внутрішня геометрія. Внутрішня геометрія поверхні визначається її першою квадратичною формою ds^2. Тоді природним буде питання: яким умовам повинна задовольняти двовимірна метрика ds^2, щоб вона була першою квадратичною формою мильної плівки S? Інакше кажучи, яким умовам повинна задовольняти двовимірна метрика ds^2, щоб відповідну їй поверхню можна було трактувати в просторі E^3 як мінімальну поверхню?

Аналіз відомих досліджень. У відомих роботах розглянуто необхідні й достатні умови, що накладаються на двовимірні метрики ds^2, за умови яких можливо їхнє ізометричне занурення в E^3 у вигляді мінімальних поверхонь. Нехай ds^2 - метрика мінімальної поверхні S в. E^3 В роботі Ю.А.Амінова [1] показано, що метрика ds^2 може бути представлена у вигляді $ds^2 = \dfrac{du^2 + dv^2}{\sqrt{-K}}$, де K – кривина метрики ds^2, $K < 0$. Звідси слідує, що метрика $\sqrt{-K}\, ds^2$ є плоскою, де ds^2 - метрика мінімальної поверхні.

Більш сильний результат, установлений Річчі, наведено в роботі В. Бляшке [2]. Для того, щоб метрика ds^2 від'ємної кривини K, задана в однозв'язної області D, допускала ізометричне занурення в E^3 у вигляді мінімальної поверхні S, необхідно й достатньо, щоб метрика $d\tilde{s}^2 = \sqrt{-K}\, ds^2$ була плоскою, тобто мала кривину $\tilde{K}$ тотожно рівну нулю $\tilde{K} \equiv 0$. Цей результат звичайно формулюють так.

Для того, щоб метрика ds^2 від'ємної кривини K, задана в плоскій однозв'язній області, допускала ізометричне занурення в E^3 у вигляді мінімальної поверхні S, необхідно й достатньо, щоб метрика $d\tau^2 = (-K)ds^2$ мала кривину K_τ тотожно рівну одиниці: $K_\tau \equiv 1$.

Постановка завдання. Навести інший критерій метрики ds^2 від'ємної кривини, занурення якої в E^3 має вигляд мінімальної поверхні.

Основна частина. Для того, щоб розв'язати питання, чи допускає задана метрика $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ кривини $K<0$ занурення в E^3 у вигляді мінімальної поверхні S, необхідно підрахувати кривину K метрики ds^2 за формулою

$$K = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v - F_u}{W} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v - G_u}{W}\right\}, \quad (1)$$

де $W = \sqrt{EG - F^2}$, а потім обчислити кривину K_τ метрики $d\tau^2 = -Kds^2$. Якщо $K_\tau \equiv +1$, то можна стверджувати про можливість ізометричного занурення ds^2 в E^3 у вигляді мінімальної поверхні.

Нехай $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$ – метрика від'ємної кривини K, задана в однозв'язної області D площини (u,v). Тоді, для того, щоб ds^2 допускала ізометричне занурення в E^3 у вигляді мінімальної поверхні, необхідно й досить, щоб коефіцієнт E допускав подання

$$E = |\varphi|^2 \left(1 + |\psi|^2\right)^2, \quad (2)$$

де φ, ψ – деякі аналітичні функції комплексного змінного $z = u + iv$, $i^2 = -1$, $\varphi \neq 0$. При виконанні умови (2) існує з точністю до руху в

однопараметрична сім'я ізометричних занурень метрики ds^2 у вигляді мінімальних поверхонь, попарно не конгруентних одна одній.

Необхідність цього положення слідує з того, що коли мінімальна поверхня з метрикою $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$, то метрика $d\tau^2 = -Kds^2$ має кривину (+1). Тому в конформно стереографічних координатах її коефіцієнти подаються формулами $q = \frac{4\phi'\bar{\phi}'}{(1+\phi\bar{\phi})^2}$; $f = 0$, де ϕ – деяка аналітична у D функція.

Прирівнюючи коефіцієнти метрик $d\tau^2$ і ds^2, знаходимо

$$E = \frac{4\phi'\bar{\phi}'}{(1+\phi\bar{\phi})^2(-K)}, \quad (3)$$

K – Гауссова кривина поверхні S, яка обчислюється за формулою

$$K = \frac{LN - M^2}{E^2}. \quad (4)$$

Рівняння Кодацци, виписані для метрики ds^2 дають:

$$L_v - M_u = 0; \; N_u - M_v = 0. \quad (5)$$

Тому що для мінімальних поверхонь S із метрикою $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$ маємо $H \equiv 0$, то $L = -N$. Це означає, що в силу (8) функція $M + iL \equiv \Psi_1$ є аналітичною функцією в області D.

Підставляючи $K = \frac{-L^2 - M^2}{E^2}$ з формули (7) у формулу (6), знаходимо $E = \frac{|\psi_1|^2 (1+\phi\bar{\phi})^2}{4|\phi'|^2}$, де $|\psi'_1|^2 = L^2 + M^2$. Позначимо $\varphi = \frac{\psi_1}{2\phi'}$ й $\psi = \phi$, одержуємо шукане співвідношення $E = |\varphi|^2 (1 + |\psi|^2)^2$.

Для доведення достатності необхідно показати, що метрика $ds^2 = |\varphi|^2 (1+|\psi|^2)^2$ допускає ізометричне занурення в E^3 у вигляді мінімальної поверхні. Для цього скористаємося поданням Вейерштрасса, наведеного, наприклад, в роботі В.І. Шуліковського [3]

$$\bar{r} = \left\{ c_1 + 2\,Re\int_{z_0}^{z}\frac{1}{2}\varphi\,(1-\psi^2)dz;\ c_2 + 2\,Re\int_{z_0}^{z}\frac{i}{2}\varphi\,(1-\psi^2)dz;\right. \quad (6)$$

$$\left. c_3 + 2\,Re\int_{z_0}^{z}\varphi\,\psi\,dz \right\},$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні постійні, z_0 – фіксована точка області D.

Однак, виписані формули (9) не охоплюють всіх реалізацій метрики ds^2 в E^3 у вигляді мінімальних поверхонь.

Звернемося до системи рівнянь Гаусса-Кодацци

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v - F_u}{W} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v - G_u}{W}\right\},$$

де $W = \sqrt{EG-F^2}$;

$$(EG-2FF+GE)(L_v - M_u) - (EN-2FV+GL)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = \ldots$$

$$(EG-2FF+GE)(M_v - N_u) - (EN-2FM+GL)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = \ldots$$

Проінтегруємо систему рівнянь Гаусса-Кодацци для зазначеного виду метрики, коли $L = -N$, $(M+iL)$ – аналітична функція в D.

Із рівняння Гаусса маємо $-(M^2+L^2) = \left(|\varphi|^2(1+|\psi|^2)^2\right)^{\ldots}$

де $K = -\frac{1}{2E}\Delta(\ln E)$, $E \equiv |\varphi|^2(1+|\psi|^2)^2$. Підрахуємо $\Delta\ln E$.

Маємо:

$$\Delta\ln E = \Delta\left(\ln\varphi\,\bar{\varphi} + 2\ln(1+\psi\,\bar{\psi})\right) = 4\partial_{z\bar{z}}\ln\varphi\,\bar{\varphi} +$$

$$+4\partial_{z\bar{z}}\ln(1+\psi\,\bar{\psi})^2 = 4\partial_{z\bar{z}}\ln\varphi + 4\partial_{z\bar{z}}\ln\bar{\varphi} +$$

$$+8\cdot\partial_z\frac{\psi\,\bar{\psi}'}{1+\psi\,\bar{\psi}} = 8\cdot\frac{\psi'\,\bar{\psi}'(1+\psi\,\bar{\psi}) - \psi\,\bar{\psi}'\psi'\,\bar{\psi}}{(1+\psi\,\bar{\psi})^2} = \frac{8\psi'\,\bar{\psi}'}{(1+\psi\,\bar{\psi})^2}.$$

Це означає, що $L^2 + M^2 = 4|\varphi|^2\cdot|\psi'|^2$. Вважаючи $\lambda = M + iL$, можна одержати [4]

$$M = |\lambda|\cos(\arg\lambda + t),$$
$$L = |\lambda|\sin(\arg\lambda + t), \quad (7)$$

де $|\lambda| = 2|\varphi|\cdot|\psi'|$; $\arg\lambda = \int_{(u_0 v_0)}^{(u,v)} -\left(\ln(|\varphi|\cdot|\psi'|)\right)_y dx + \left(\ln(|\varphi|\cdot|\psi'|)\right)_x du,$

t – довільна дійсна постійна; (u_0, v_0) – деяка фіксована точка області D; інтегрування ведеться по будь-якій кривій, що з'єднує точки (u_0, v_0) й (u, v) в області D.

Вважаючи довільну постійну t як параметр, за формулами (10) одержуємо сім'ю розв'язків системи рівнянь Гаусса-Кодацци, що безперервно (і навіть аналітично) залежних від параметра. Цими рішеннями вичерпуються всі рішення системи рівнянь Гаусса-Кодацци. Кожному рішенню системи відповідає мінімальна поверхня в E^3, що має дану метрику ds^2.

В роботі Тужиліна А.А. і Фоменка А.Т. [4] наведено такий результат, що випливає із наведеного. Нехай $d\tau^2 = e(u,v)(du^2 + dv^2)$ – метрична форма із кривиною $K_\tau \equiv +1$, задана в однозв'язної області D. Тоді метрична форма $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{e(u,v)}$, розглянута в області D, допускає ізометричне занурення в E^3 у вигляді однопараметричної сім'ї мінімальних поверхонь $\{S_t\}$, $t \in [0, 2\pi]$. При цьому гауссова кривина поверхні S_t обчислюється по формулі $K = -e^2$.

Це положення випливає з того, що для метрики $d\tau^2$ можна вважати $e(u,v)=\dfrac{4\Phi'(z)\overline{\Phi}'(z)}{(1+\Phi'(z)\overline{\Phi}(z))^2}$, де $\Phi(z)$ – деяка аналітична у D функція, $\Phi'(z)\neq 0$, $z=u+iv$, $i^2=-1$,. Тоді вважаючи в теоремі $2\,\Psi(z)\equiv\Phi(z)$, $\varphi(z)=\dfrac{1}{2\Phi'(z)}$, одержуємо твердження наслідку.

Одержані результати можна використовувати для аналізу геометричної форми реальних мильних плівок. Якщо опустити замкнутий дротовий контур у мильну воду, а потім акуратно його витягти звідти, то на контурі залишиться мильна плівка. Якщо подути на плівку, то можна одержати мильну бульку. Мильну плівку й мильну бульку можна розглядати як розмежувальну поверхню двох однорідних середовищ, що перебувають у рівновазі. Мильна плівка, натягнута на контур в околиці кожної своєї точки розділяє два середовища, а саме повітря-повітря, різниця тисків яких уздовж плівки постійно.

В утворенні мильних плівок важливу роль грає спеціальна будова молекул мила. Вони мають подовжену форму й містять полярний кінець і неполярний кінець. Молекули мила накопичуються на поверхні розчину так, що неполярний кінець спрямований назовні плівки, а полярний – усередину плівки. Це приводить до зниження поверхневого натягу й до підвищення пружних властивостей плівки.

Товщина мильної плівки надзвичайно мала, і плівка має вигляд прошарків пари молекул мила, спрямованих одне до одного полярними кінцями. При дослідженні мильних плівок їхньою товщиною можна зневажити й мильну плівку можна розглядати як двовимірну поверхню S в просторі E^3.

Якщо $(P-p)$ - різниця тисків, що діють на мильну плівку S з різних кінців, і q – сила поверхневого натягу плівки, то має місце формула Лапласа $P-p=2qH$, де H – середня кривина поверхні $S, q=const$. Для мильних плівок, що перебувають у рівновазі, можна вважати $P-p=const$, і тому для них $H=const$. Це означає, що для мильної плівки, натягнутої на замкнутий контур, маємо $H=0$ й тому вона є мінімальною поверхнею.

Висновок. Розглянутий критерій перевірки занурености метрики ds^2 від'ємної кривини в E^3 у вигляді мінімальної поверхні є простішим стосовно відомого способу.

Література

1. *Аминов Ю.А.* Минимальные поверхности / Ю.А. Аминов//- Харьков, ХГУ, 1978г. 65 с.
2. *H. Blaine Lawson, Ir.* Some intrinsic characterizations of minimal surfaces /H. Blaine Lawson, Ir.// I. d' Analyse Math., 1971, v. 24, p. 151-161.
3. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия /В.Бляшке// М-Л., ОНТИ, 1935., 325 с.
4. *Тужилин А.А.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей /А.А.Тужилин, А.Т.Фоменко// М., Наука, 1991.,153 с.
5. *Бляшке В.* Введение в дифференциальную геометрию /В.Бляшке// М., Физ-мат. ГИЗ., 1957., 210 с.
6. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия /В.И.Шуликовский// М., Физ-мат. ГИЗ, 1963.
7. *Руденко С.Ю.* Геометричне моделювання приєднаних і асоційованих мінімальних поверхонь / С.Ю.Руденко // Прикладна геометрія і інженерна графіка. – Київ: КНУБА, Випуск 85, 2010.- С.124 - 130
8. *Руденко С.Ю.* Геометрична інтерпретація поверхонь за властивостями, подібних до мильної плівки / С.Ю.Руденко // Прикладна геометрія і інженерна графіка. – Київ: КНУБА, Випуск 82, 2009.- С.320 - 325
9. *Руденко С.Ю.* Графічний спосіб побудови мінімальної поверхні обертання / С.Ю.Руденко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2009. - Вип. 23. – С. 198-202

КРИТЕРИЙ МЕТРИКИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Руденко С.Ю.

Аннотация

Рассмотрен критерий метрики отрицательной кривизны, соответствующей минимальной поверхности.

CRITERION OF METRICS OF NEGATIVE CURVATURE, TO CORRESPONDING MINIMUM SURFACE

S. Rudenko

Summary

The criterion of existence of metrics of negative curvature is considered, to the corresponding minimal surface.