

Абрамов Ю.А, Тарасенко А.А
Университет гражданской защиты Украины

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗДУШНЫХ ТЕЧЕНИЙ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ РЕЛЬЕФА

Предложена математическая модель локального ветра, учитывающая особенности рельефа местности. Модель представляет собой сплайн-интерполяцию численного решения уравнения Лапласа для стационарного потенциала скорости ветра, полученного в узлах регулярной пространственной решетки.

Постановка проблемы. При расчетах экстремальной ветровой нагрузки на строительные конструкции, расположенные в условиях горной либо холмистой местности, недостаточно использование сведений метеосводок о т.н. фоновом ветре, поскольку последний не учитывает влияние параметров рельефа. Между тем, известно [1], что в приземном слое сложный рельеф существенно искажает поле ветра.

Знание локальных ветров также необходимо при прогнозировании динамики развития ряда чрезвычайных ситуаций – ландшафтных (лесных) пожаров в горной или холмистой местности, выбросов загрязняющих (радиоактивных, химических, бактериологических) веществ, загрязнений морской поверхности нефтепродуктами в прибрежной зоне и др.

Анализ существующих решений. В литературе отсутствуют указания на самостоятельные модели влияния рельефа местности на поле воздушных течений. Как вспомогательные, эти модели представлены в [2-3]. В работе [2] поле ветра моделируется исходя из численного решения уравнений Навье-Стокса с распараллеливанием процесса решения в силу необходимости использования большого числа узлов криволинейной конечно-разностной сетки, что существенно усложняет (либо замедляет при отсутствии распараллеливания) процесс вычисления. В работе [3] отсутствует зависимость вертикальной составляющей скорости от высоты.

Возможность моделирования скорости ветра посредством нахождения ее потенциала при решении уравнения Лапласа не рассматривается.

Постановка задачи и ее решение. Деформация фонового ветра $\vec{V}_f = \text{const}$, под влиянием рельефа $S(x, y)$ приводит к существенному отличию локального ветра $\vec{V}_\ell(x, y, z)$ от \vec{V}_f . Зная параметры $S(x, y)$ и \vec{V}_f , необходимо найти векторное поле $\vec{V}_\ell(x, y, z)$.

Сделаем допущение о потенциальном характере течения жидкости. В этом случае существует функция $\Phi(x, y, z)$ (потенциал скорости), такая, что

$$\text{grad } \Phi = \vec{V}_\ell. \quad (1)$$

При отсутствии источника $\text{div } \vec{V}_\ell = 0$, следовательно, $\text{div grad } \Phi = 0$, откуда получаем уравнение Лапласа относительно потенциала

$$\Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Данное уравнение, совместно с граничными условиями, определяют скалярное поле потенциала, а в силу (1) – стационарное векторное поле скоростей ветра.

Для течения невязкой среды граничное условие на поверхности рельефа определяется непротеканием через эту поверхность [4], т.е. нормальная к поверхности составляющая скорости равна 0

$$\vec{V}_\ell \cdot \vec{n} = \text{grad } \Phi \cdot \vec{n} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{n} \left(\frac{\partial S(x, y)}{\partial x}; \frac{\partial S(x, y)}{\partial y}; -1 \right)$ – нормаль к поверхности рельефа $S(x, y)$. Тогда

условие непротекания имеет вид $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$.

Аналитическое решение уравнения Лапласа возможно только в частных случаях (например, $S(x, y) = \text{const}$ [5]). Поэтому для произвольной поверхности рельефа возможно лишь численное решение.

Поверхность рельефа $S(x, y)$, заданную в виде бикубических сплайнов [6] на прямоугольной области Ω , поместим внутри параллелепипеда V_H с высотой $H_{\text{ур}}$ и поверхностью Σ , так, чтобы $0 \leq \min S(x, y); \max S(x, y) < H_{\text{ур}}$.

Сориентируем оси OX и OY по сторонам света, а ось OZ – вертикально вверх. Полученный объем над областью Ω разобьем регулярной трехмерной сеткой с шагами по осям равными $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Количество узлов сетки будем, соответственно, полагать равным I, J, K . Разностными аналогами уравнений (2) и (3) будут

$$\frac{\Phi_{i+1jk} - 2\Phi_{ijk} + \Phi_{i-1jk}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{ij+1k} - 2\Phi_{ijk} + \Phi_{ij-1k}}{(\Delta y)^2} + \frac{\Phi_{ijk+1} - 2\Phi_{ijk} + \Phi_{ijk-1}}{(\Delta z)^2} = 0;$$

$$\frac{\Phi_{i+1jk} - \Phi_{i-1jk}}{2\Delta x} \cdot \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x_i; y=y_j \\ z=z_{k(i,j)}}} + \frac{\Phi_{ij+1k} - \Phi_{ij-1k}}{2\Delta y} \cdot \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \Bigg|_{\substack{x=x_i; y=y_j \\ z=z_{k(i,j)}}} -$$

$$- \frac{\Phi_{ijk+1} - \Phi_{ijk-1}}{2\Delta z} = 0,$$

где $i = 1..I; j = 1..J; k = 1..K$ – номера узлов сетки.

Уравнение (4) имеет место только на узлах, дискретным образом аппроксимирующих поверхность рельефа, т.е. для таких k , что

$$S(x_i, y_j) - \Delta z / 2 \leq z_k < S(x_i, y_j) + \Delta z / 2. \quad (5)$$

Значения k , удовлетворяющие (5), обозначим как $k(i, j)$.

Кроме того, зададим граничные условия для потенциала на сторонах параллелепипеда.

Для этого введем вспомогательный потенциал в виде

$$\tilde{\Phi}(x, y, z) = V_{fx} x \cdot \Delta x + V_{fy} y \cdot \Delta y + V_{fz} z \cdot \Delta z, \quad (6)$$

где V_{fx}, V_{fy}, V_{fz} - компоненты скорости известного фонового ветра \vec{V}_f . Отметим, что в метеосводках компонента V_{fz} не упоминается, т.к. полагается равной 0.

На верхней грани параллелепипеда (т.е. при $k = K$) будем полагать

$$\Phi_{ijk} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} i + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} j. \quad (7)$$

Данное условие позволяет задать граничные условия на боковых гранях в виде

$$\Phi_{1jk} = \Phi_{1jK}; \Phi_{ijk} = \Phi_{iJK}; \Phi_{ilk} = \Phi_{i1K}; \Phi_{ijk} = \Phi_{iJK}. \quad (8)$$

Ниже поверхности рельефа, т.е. в узлах с $1 \leq k < k(i, j)$, полагаем значения потенциалов равными потенциалу поверхности, т.е.

$$\Phi_{ijk} = \Phi_{ijk(i, j)}. \quad (9)$$

$I \times J \times K$ линейных уравнений (4), (7)-(9) образуют систему с таким же количеством неизвестных (при этом часть уравнений уже задана в виде граничных условий).

Применение алгоритма Number Algorithm Group [7] позволяет быстро (< 5 мин) находить решения системы порядка $8 \cdot 10^3$ линейных уравнений. Это позволяет эффективно решать задачи на сетке порядка $20 \times 20 \times 20$. При этом для холмистого рельефа приемлемо задание шага $\Delta x = \Delta y = 50 \div 200$ м, $\Delta z = 2 \div 20$ м.

После нахождения Φ_{ijk} , найдем значения компонент скорости ветра в узлах сетки, лежащих выше поверхности рельефа, по разностному аналогу выражения (1)

$$V_{lx}^{ijk} = \frac{\Phi_{i+1jk} - \Phi_{i-1jk}}{2\Delta x}; V_{ly}^{ijk} = \frac{\Phi_{ij+1k} - \Phi_{ij-1k}}{2\Delta y}; V_{lz}^{ijk} = \frac{\Phi_{ijk+1} - \Phi_{ijk-1}}{2\Delta z}. \quad (10)$$

На рис. 1 представлен результат моделирования поля скоростей ветра в приземном слое. Указаны направления вектора скорости и его модуль в $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$. Качественный анализ рис. 1 подтверждает основные закономерности характерные для влияния рельефа на местность. В частности, видно, что на вершинах холмов скорость ветра существенно выше, чем у подножий и тем более в низинах. Кроме того, происходит деформация фонового поля под действием форм рельефа – наблюдается частичное огибание ветром возвышенностей.

Численное решение уравнения Лапласа позволяет найти значения функции в конечном множестве точек. Определим значения функции во

всем пространстве, проинтерполировав эти значения методом последовательной линейной сплайн-интерполяции.

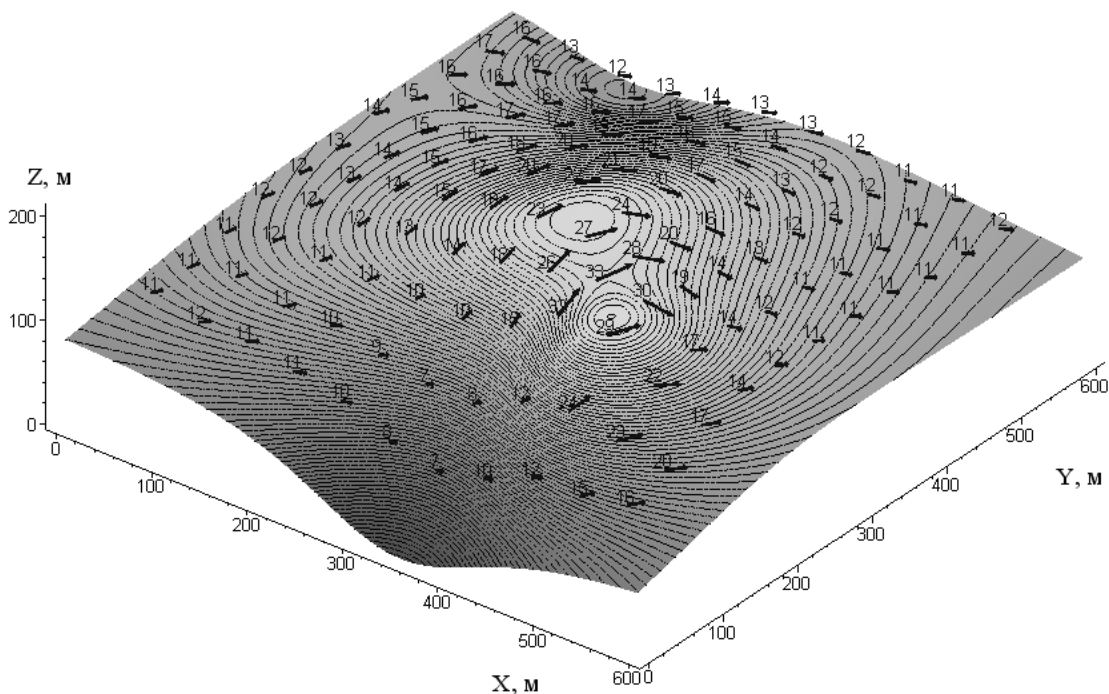


Рис. 1. Численное нахождение поля скорости ветра в приземном слое с указанием величины скорости в м/с. $\Delta x = \Delta y = 50\text{ м}$, $\Delta z = 10\text{ м}$; $\vec{V}_f(10;10;0)$

Пусть задан элементарная ячейка (параллелепипед) с координатами вершин $A(x_i, y_j, z_k)$; $B(x_{i+1}, y_j, z_k)$; $C(x_i, y_{j+1}, z_k)$; $D(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k)$; $E(x_i, y_j, z_{k+1})$; $F(x_{i+1}, y_j, z_{k+1})$; $G(x_i, y_{j+1}, z_{k+1})$; $H(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1})$ (рис. 2).

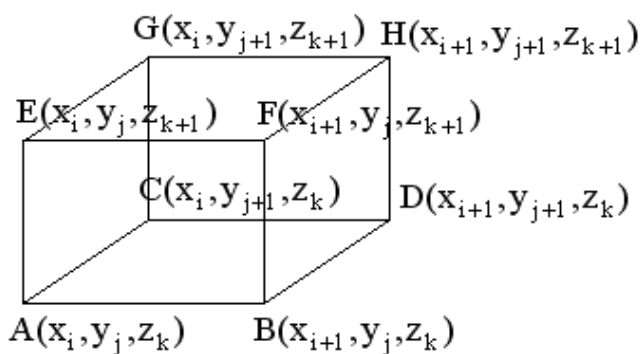


Рис. 2. ijk -ый параллелепипед

Обозначим ячейку по вершине A как ijk -ой. В ее вершинах заданы значения функции $f^{ijk}(x, y, z)$ трех переменных:

$$f_{ijk}^{ijk} = f^{ijk}(x_i, y_j, z_k);$$

$$f_{i+1jk}^{ijk} = f^{ijk}(x_{i+1}, y_j, z_k);$$

$$f_{i+1j+1k}^{ijk} = f^{ijk}(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k);$$

$$f_{ij+1k+1}^{ijk} = f^{ijk}(x_i, y_{j+1}, z_{k+1});$$

$$f_{i+1j+1k+1}^{ijk} = f^{ijk}(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1});$$

$$f_{ij+1k}^{ijk} = f^{ijk}(x_i, y_{j+1}, z_k); f_{i+1jk+1}^{ijk} = f^{ijk}(x_{i+1}, y_j, z_{k+1}).$$

Необходимо в произвольной точке (x, y, z) , лежащей внутри ijk -ого

параллелепипеда, т.е. такой, что $x_i \leq x < x_{i+1}; y_j \leq y < y_{j+1}; z_k \leq z < z_{k+1}$ интерполировать значение функции, т.е. найти $f^{ijk}(x, y, z)$.

Для этого проведем последовательно линейные интерполяции на элементах ijk -ого параллелепипеда:

- между точками А и В

$$f_{jk}^{ijk} = f^{ijk}(x, y_j, z_k) = f_{ijk}^{ijk} + \frac{(x - x_i)(f_{i+1jk}^{ijk} - f_{ijk}^{ijk})}{x_{i+1} - x_i};$$

- между точками С и D

$$f_{j+1k}^{ijk} = f^{ijk}(x, y_{j+1}, z_k) = f_{ij+1k}^{ijk} + \frac{(x - x_i)(f_{i+1j+1k}^{ijk} - f_{ij+1k}^{ijk})}{x_{i+1} - x_i};$$

- между точками Е и F

$$f_{jk+1}^{ijk} = f^{ijk}(x, y_j, z_{k+1}) = f_{ijk+1}^{ijk} + \frac{(x - x_i)(f_{i+1jk+1}^{ijk} - f_{ijk+1}^{ijk})}{x_{i+1} - x_i};$$

- между точками G и H

$$f_{j+1k+1}^{ijk} = f^{ijk}(x, y_{j+1}, z_{k+1}) = f_{ij+1k+1}^{ijk} + \frac{(x - x_i)(f_{i+1j+1k+1}^{ijk} - f_{ij+1k+1}^{ijk})}{x_{i+1} - x_i};$$

- между ребрами АВ и CD

$$f_k^{ijk} = f^{ijk}(x, y, z_k) = f_{jk}^{ijk} + \frac{(y - y_j)(f_{j+1k}^{ijk} - f_{jk}^{ijk})}{y_{j+1} - y_j};$$

- между ребрами EF и GH

$$f_{k+1}^{ijk} = f^{ijk}(x, y, z_{k+1}) = f_{jk+1}^{ijk} + \frac{(y - y_j)(f_{j+1k+1}^{ijk} - f_{jk+1}^{ijk})}{y_{j+1} - y_j};$$

- между гранями ABCD и EFGH, т.е. внутри параллелепипеда

$$f^{ijk} = f^{ijk}(x, y, z) = f_k^{ijk} + \frac{(z - z_k)(f_{k+1}^{ijk} - f_k^{ijk})}{z_{k+1} - z_k}. \quad (11)$$

В результате последовательно проведенной линейной интерполяции, получаемое выражение (11) будет кубическим.

Таким образом получена интерполяция внутри ijk -ого параллелепипеда. Функция $f^{ijk}(x, y, z)$ задана только внутри области $x_i \leq x < x_{i+1};$

$y_j \leq y < y_{j+1}; z_k \leq z < z_{k+1}.$

Удобно перейти к заданию функции $f(x, y, z)$ на всей пространственной области $x_1 \leq x < x_I; y_1 \leq y < y_J; z_1 \leq z < z_K$

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K f^{ijk}(x, y, z) (\eta(x - x_i) - \eta(x - x_{i+1})) \times (\eta(y - y_j) - \eta(y - y_{j+1})) (\eta(z - z_k) - \eta(z - z_{k+1})) \quad (12)$$

где $\eta(x); \eta(y); \eta(z)$ - функции Хэвисайда.

Выражение (12) будет непрерывным и почти всюду гладким (гладкость нарушается на гранях параллелепипедов).

Применяя последовательно данный метод к компонентам скорости ветра V_{lx}^{ijk} , V_{ly}^{ijk} и V_{lz}^{ijk} , заданным на узлах регулярной пространственной сетки, получим интерполяции данных функций $V_{lx}(x, y, z)$, $V_{ly}(x, y, z)$, $V_{lz}(x, y, z)$ на области $x_1 \leq x < x_I$; $y_1 \leq y < y_J$; $z_1 \leq z < z_K$. Зная значения интерполяций компонент скорости ветра, непрерывно заданных в любой точке пространства, можно проследить линии тока (рис. 3).

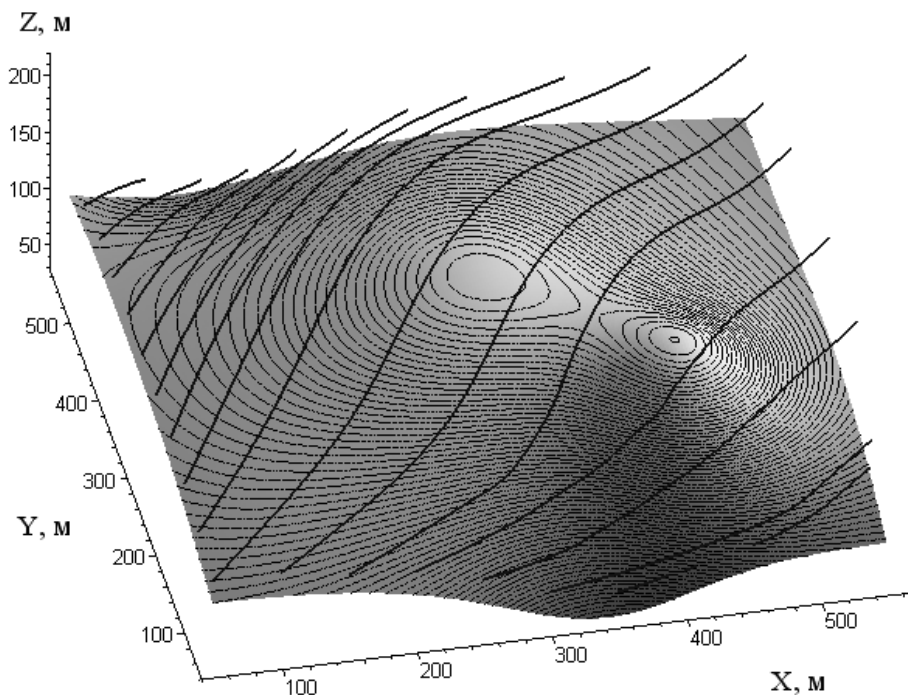


Рис. 3. Линии тока с началом на высоте 20 м над рельефом. $\vec{V}_f(10;10;0)$; $\Delta t = 1c$

Поскольку линии тока при стационарном течении есть линии, касательные к которым совпадают с направлением мгновенной скорости, [5] то семейство линий тока задается как $\frac{V_{lx}(x, y, z)}{dx} = \frac{V_{ly}(x, y, z)}{dy} = \frac{V_{lz}(x, y, z)}{dz}$. Данное выражение эквивалентно разностной системе

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot V_{\ell x_n}(x, y, z) \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot V_{\ell y_n}(x, y, z), \\ z_{n+1} = z_n + \Delta t \cdot V_{\ell z_n}(x, y, z) \end{cases} \quad (13)$$

где Δt - временной шаг. Значения $V_{\ell x_n}(x, y, z) = V_{\ell x}(x_n, y_n, z_n)$, $V_{\ell y_n}(x, y, z) = V_{\ell y}(x_n, y_n, z_n)$, $V_{\ell z_n}(x, y, z) = V_{\ell z}(x_n, y_n, z_n)$ находим по их интерполяциям.

Выводы. Впервые предложена математическая модель влияния рельефа местности на поле ветра как результат решения уравнения Лапласа для потенциала скорости.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Дородицын А.А. Влияние рельефа земной поверхности на воздушные течения // Труды Центрального института прогнозов. Вып. 21. - М.: ЦИП, 1950. – С. 3-25.
2. Бас А.А. Программно-инструментальные средства численного моделирования пространственных турбулентных течений на территориях с промышленной и гражданской застройкой: Автореф. дис.... к-та техн. наук. – Ижевск: ИЖГТУ, 2007. – 20 с.
3. Белов И.В. и др. Транспортная модель распространения газообразных примесей в атмосфере города // Математическое моделирование. – 2000. - Т. 12, №11. - С. 38-46.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. – 736 с.
5. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. – 3-е изд., М.: Наука, 1986. – 736 с.
6. Абрамов Ю.А., Тарасенко А.А. Синтез аналитической модели поверхности по линиям уровня // Проблемы надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. Вип. 6. – Харків: УЦЗУ, 2007.- С. 11-22.
7. Дьяконов В. Maple 7. Учебный курс. Санкт-Петербург: Питер, 2002. – 672 с.