

УДК 514.18

КОЛИВАННЯ МАЯТНИКА, ТОЧКА ПІДВІСУ ЯКОГО ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЇ ОСІ

Куценко Л.М., д.т.н.,

Семків О.М., к.т.н

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)

Розглядається метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних (періодичних) траєкторій коливань математичного маятника, точка підвісу якого обертається в площині навколо вертикальної осі.

Ключові слова: просторовий маятник, рівняння Лагранжа 2-го роду, траєкторія переміщення маятника, точка підвісу.

Постановка проблеми. Математичні просторові маятники використовуються як моделі для дослідження процесів та явищ, описаних певним класом диференціальних рівнянь [1-4]. Можливість виникнення таких ефектів необхідно враховувати під час розрахунку різноманітних конструкцій (будівельні крани, висячі мости, вантово-балкові системи, канатні дороги, лінії електропередачі, різні космічні тросові системи, тощо). Моделі просторових маятників знаходить застосування в механіці для аналізу умов, за яких виявляються ефекти втрати динамічної стійкості надзвукових літаків, швидкохідних кораблів тощо [1,2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує значна кількість публікацій, присвячених математичним просторовим маятникам [1-3]. Для ілюстрації розв'язків цих рівнянь необхідно вміти будувати просторові форми траєкторій переміщення (центра) вантажу пружинних маятників. Тоді за аналогією розв'язки можна використати і в подібних за змістом задачах. Тому ці дослідження доцільно було б доповнити розробкою способу графічного унаочнення траєкторій коливань вантажу як результату розв'язання диференціальних рівнянь для їх опису з метою виявлення серед них нехаотичних траєкторій.

Формулювання цілей статті. Розробити графічний комп'ютерний метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань математичного маятника, точка підвісу якого обертається в площині навколо вертикальної осі.

Основна частина. Вважатимемо, що математичний маятник довжиною d коливається у площині, визначеною віссю Oz і невагомою балкою OA , яка обертається навколо осі Oz . Кріплення маятника розміщено на відстані $d/2$ від осі обертання (рис. 1).

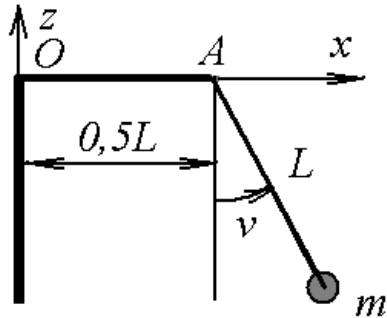


Рис. 1. Схема маятника Звідси одержуємо вираз лагранжиана

Для опису динаміки коливань маятника в декартових координатах Oxz використаємо [4] вирази для кінетичної T і потенціальної V енергії:

$$T = \frac{1}{2} m \left(d^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d}{2} + d \sin v \right)^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right),$$

$$V = -mgd \cos v.$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(d^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d}{2} + d \sin v \right)^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) + mgd \cos v. \quad (1)$$

Тут використано такі позначення: $u(t)$ – кут обертання площини Oxz навколо осі Oz ; $v(t)$ – кутів відхилення маятника від вертикалі в площині Oxz ; L – довжина маятника; m – маса вантажу маятника; $g = 9,81$. За допомогою лагранжиана одержуємо систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{1}{4} m d^2 \left(4 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) + 5 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + 4 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \sin(v(t)) + 8 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) - 4 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \cos(v(t))^2 \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} m d^2 \left(-2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \cos(v(t)) + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \cos(v(t)) \sin(v(t)) \right) = 0$$

Розв'язувати систему диференціальних рівнянь (2) відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$ будемо чисельним методом Рунге-Кутти з умовами: $u0$ і $v0$ – початкові кути в «нульовий» момент часу t ; $du0$ і $dv0$ – початкові швидкості відхилення маятника у напрямках відповідних кутів. За допомогою знайдених наближених функцій $\hat{u}(t)$ і $\hat{v}(t)$ координати положення вантажу маятника можна визначити за формулами (рис.2):

$$x_t = \left(d \sin \hat{v} + \frac{d}{2} \right) \cos \hat{u}; \quad y_t = \left(d \sin \hat{v} + \frac{d}{2} \right) \sin \hat{u}; \quad z_t = -d \cos \hat{v}. \quad (3)$$

Для визначення значень параметрів u_0 , v_0 , du_0 і dv_0 , які б забезпечили *нехаотичну просторову траєкторію* руху вантажу маятника, застосуємо метод проєкційного фокусування [5]. Для цього чисельним методом із обраними початковими умовами (наприклад) $u_0 = 0$; $du_0 = 0,1$; $dv_0 = 0$. і з урахуванням значень параметрів $m = 1$ і

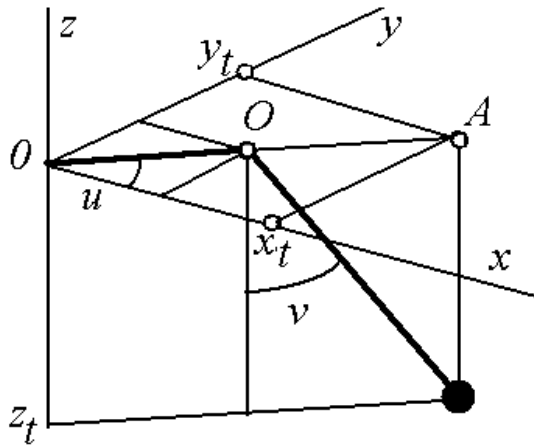


Рис. 2. Система координат

$L = 1$ розв'язуємо систему рівнянь (2) і будуємо зображення траєкторії вантажу маятника залежно від певного значення «керуючого» параметра. Як «керуючий» можна обрати будь-який параметр задачі (наприклад, v_0) за умови, що всі інші значення параметрів будуть фіксованими.

Наведемо два приклади, які відрізнятимуться напрямком початкового відхилення v_0 кута v .

Приклад 1. Обчислювався варіант з параметрами: $m = 5$; $d = 1$: $u_0 = 0$; $du_0 = 0,1$; $dv_0 = 0$ і знайденим $v_0 = 0,3$. На рис. 3 зображено аксонометрії траєкторії (де коло – це траєкторія точки A з рис.1).

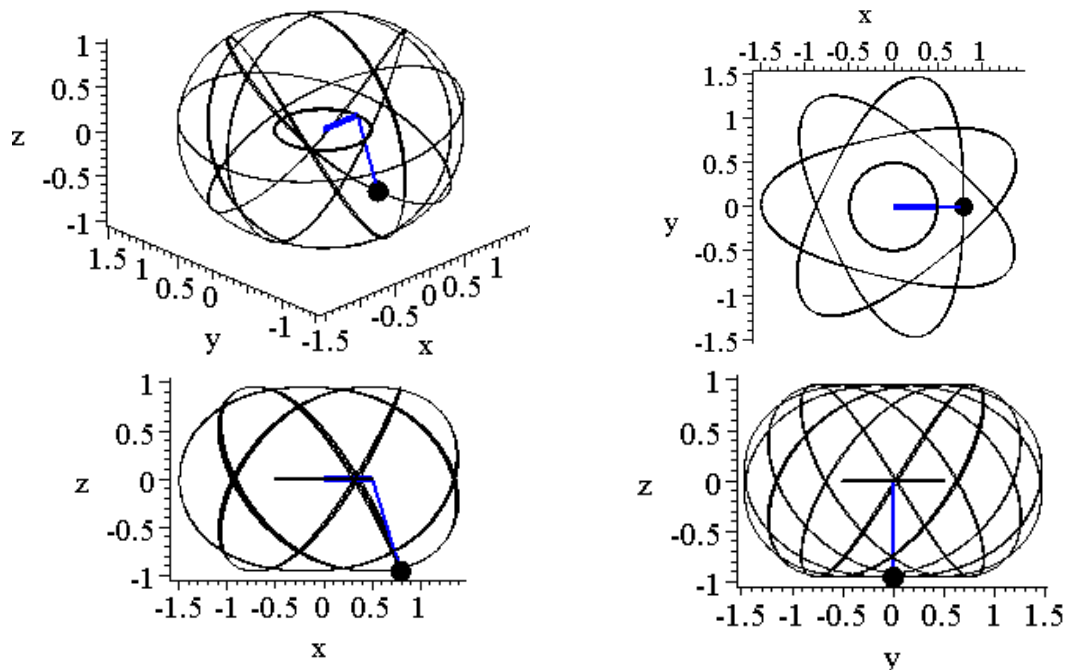


Рис. 3. Результати обчислень за умовами прикладу 1

Приклад 2. На рис. 4 наведено результати обчислення з відомими параметрами: $m = 5$; $d = 1$; $u_0 = 0$; $du_0 = 0,1$; $dv_0 = 0$ і знайденим $v_0 = -0,07$.

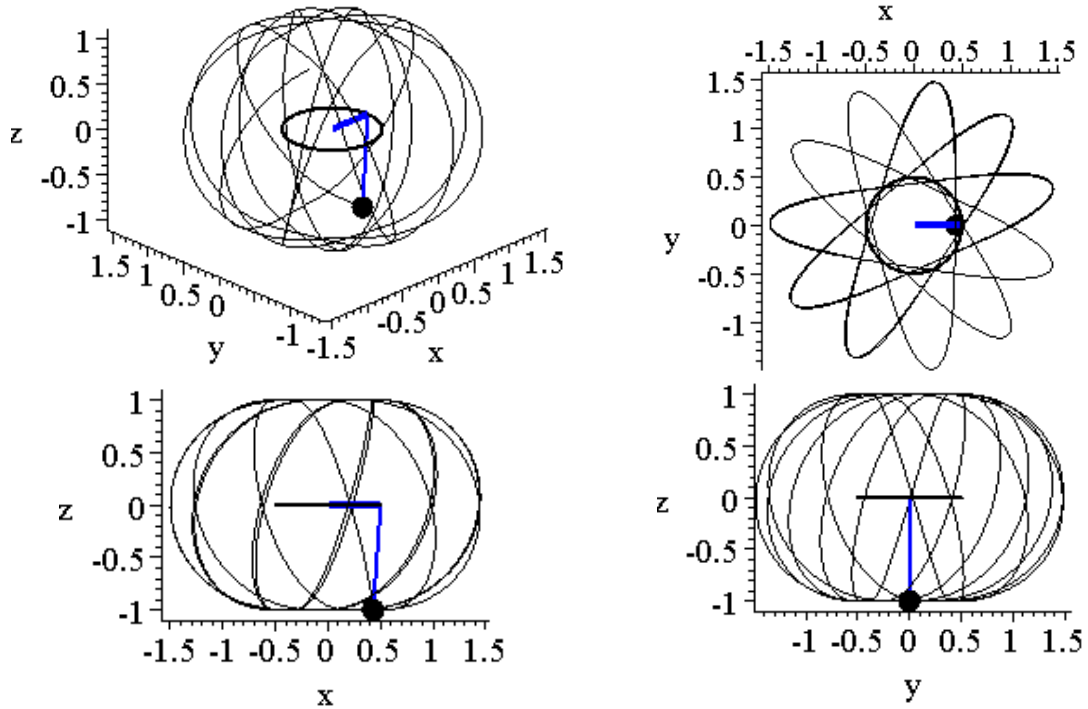


Рис. 4. Результати обчислень за умовами прикладу 2

Приклад 3. На рис. 5 наведено результати обчислення з відомими параметрами: $m = 5$; $d = 1$; $u_0 = 0$; $v_0 = 0,5$; $dv_0 = 0,1$ і знайденим $du_0 = 0,14143$.

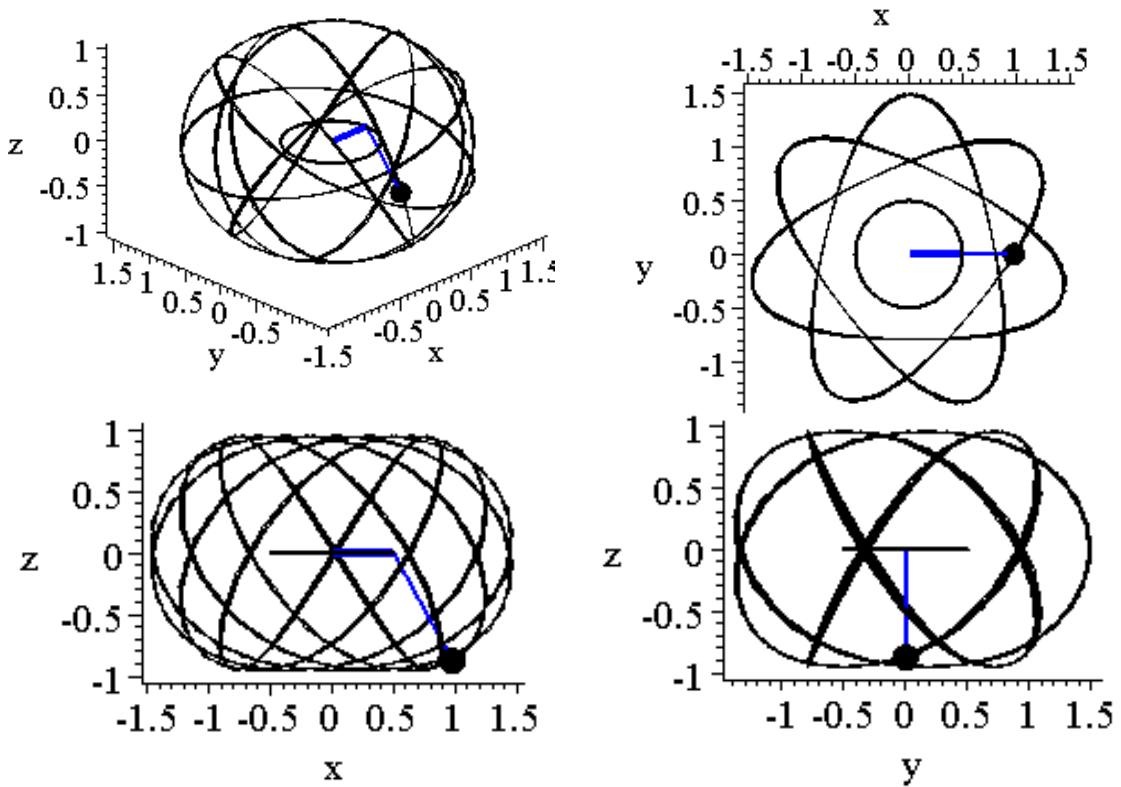


Рис. 5. Результати обчислень за умовами прикладу 3

Приклад 4. На рис. 6 наведено результати обчислення з відомими параметрами: $m = 5$; $d = 1$; $u_0 = 0$; $v_0 = 0,5$; $dv_0 = 0.1$ і знайденим $du_0 = 0,068$.

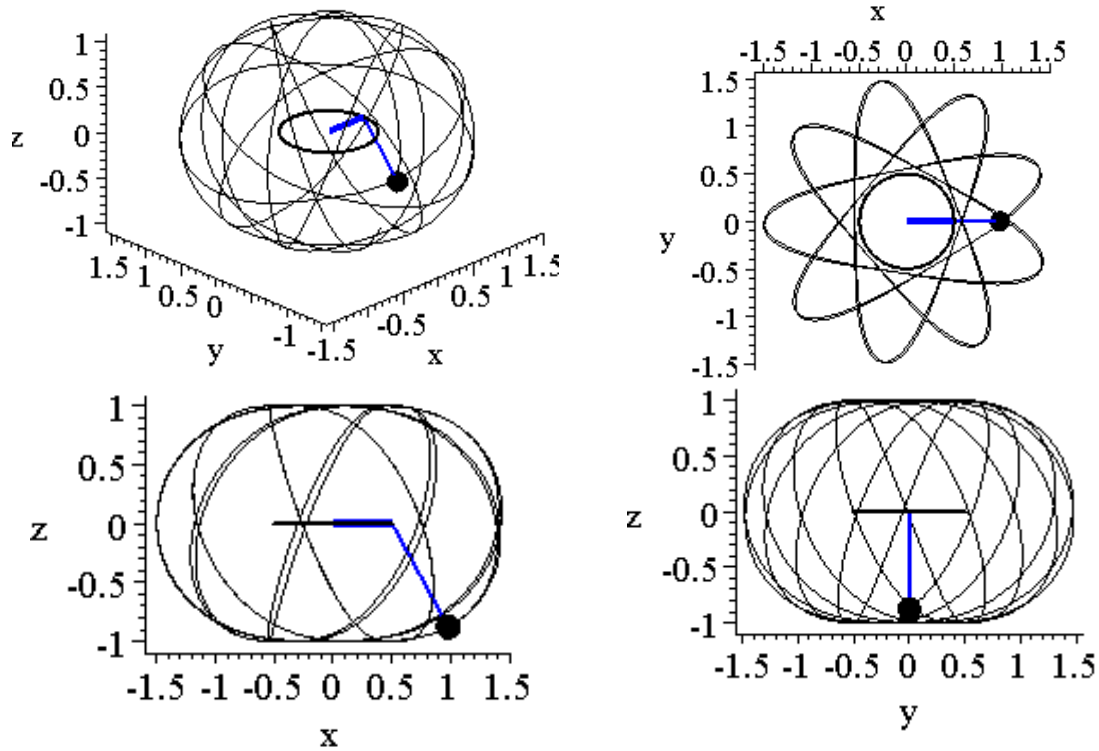


Рис. 6. Результати обчислень за умовами прикладу 4

Висновки. Визначення значень початкових умов u_0 , v_0 , du_0 і dv_0 для знаходження розв'язків $\hat{u}(t)$ і $\hat{v}(t)$ системи рівнянь (2), які б забезпечили *нехаотичну просторову траєкторію* руху вантажу маятника, доцільно здійснювати в режимі комп'ютерної анімації. Подальші дослідження будуть пов'язані з вибором параметрів для забезпечення бажаної форми траєкторії.

Література

1. Булдакова Д.А. Модель качаючогося пружинного маятника в истории физики и техники / Д.А. Булдакова, А.В. Кирюшин // Ученые заметки Тихоокеанского государственного университета. – Хабаровск, 2015. – Том 6, № 2. – С. 238 – 243.
2. Бубнович Э.В. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити [Электронный ресурс] / Э.В. Бубнович, А.Г. Молдагананова // Режим доступа: [http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20 Молдагананова%20.pdf](http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагананова%20.pdf)
3. Xiao O. Dynamics of the Elastic Pendulum [Электронный ресурс] / O.Xiao, S.Xia // Режим доступа: <http://math.arizona.edu/~gabito/>

- teaching/141/math_485/Midterm_Presentations/Elastic_Pedulum.pdf.
4. Ross S. Intermediate Dynamics, Ungraded Practice Problems. [Електроний ресурс] / S.Ross // Режим доступу: https://scholar.vt.edu/access/content/group/dabb034c-1208-404d-abd3-b6e0ed54948b/Podcasts/practice_final_int_dyn_5314_2010.pdf.
 5. Семків О.М. Графічний комп'ютерний спосіб визначення нехаотичних траєкторій коливань маятникових систем/ О.М. Семків // Вістник ХНАДУ. – Харків: ХНАДУ, 2016.– № 72. – С.94–101.
 6. Семків О.М., Геометричне моделювання коливань просторового пружинного маятника / О.М. Семків, В.Ф. Челомбитько // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– Вип. 6. – С. 109–113.
 7. Computer graphics of the oscillation trajectories of 2d spring pendulum weight/ O. M. Semkiv // European Applied Sciences: challenges and solutions. – Stuttgart, Germany: ORT Publishing, 2015. – С.63–70.
 8. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d- пружинного маятника / О.М. Семкив // Международная конференция по научному развитию в Евразии. – Австрия, г.Вена. – VII, 2015. – С.217–214.

КОЛЕБАНИЕ МАЯТНИКА, ТОЧКА ПОДВЕСА КОТОРОГО ВРАЩАЕТСЯ ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

Куценко Л.Н., Семкив О.М.

Рассматривается метод выбора значений параметров для получения нехаотических (периодических) траекторий колебаний математического маятника, точка подвеса которого вращается в плоскости вокруг вертикальной оси.

Ключевые слова: пространственный маятник, уравнение Лагранжа 2-го рода, траектория перемещения маятника, точка подвеса.

FLUCTUATION OF THE PENDULUM, THE SUSPENSION POINT OF WHICH ROTATES AROUND VERTICAL AXIS

Kutsenko L., Semkiv O.

The method of the choice of parametric values, for receiving not chaotic (periodic) trajectories of fluctuations of a simple pendulum which point of a suspension rotates in the plane around a vertical axis, is considered.

Keywords: a space pendulum, the equation of Lagrange of the 2nd kind, a trajectory of movement of a pendulum, a suspension point.