



УДК 515.2

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АВТОКОЛИВАНЬ ПОДВІЙНОГО МАЯТНИКА З ПРУЖНОЮ ПЕРШОЮ ЛАНКОЮ

Куценко Л. М., д.т.н.,

Семків О. М., к.т.н.

Національний університет цивільного захисту України

Тел. 0675726890.

Анотація – запропоновано метод візуалізації автоколивань подвійного маятника з пружною першою ланкою, коли друга ланка обертається у вертикальній площині за рахунок еластичних властивостей (енергії) першої ланки. Метод базується на розв'язанні системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду.

Ключові слова: дволанковий математичний маятник, обертання другої ланки маятника, рівняння Лагранжа другого роду.

Постановка проблеми. Розглянемо математичний (абстрагований) подвійний маятник, особливість якого полягає у наявності пружного елемента у першій ланці, один кінець якого закріплено стаціонарно. Вважається, що зміна стану еластичного елемента (тобто скорочення чи подовження) відбувається згідно величини його коефіцієнта жорсткості k . До кінців другої невагомої ланки приєднано два вантажі масами m_1 і m_2 , які утворюють умовну «гантель». Коливання подвійного маятника здійснюються у вертикальній площині у полі земного тяжіння. Різновиди тертя ігноруються. Для теоретичних досліджень і практичних впроваджень актуальними будуть роботи, пов'язані з керуванням руху «гантелі» шляхом вибору значень параметрів, які впливають на процес коливання маятника. Особливу цікавість викликають випадки, коли «гантель» виконувала б обертові рухи за рахунок еластичних властивостей (енергії) першої ланки. Як показують натурні експерименти це здійснити можливо.

Аналіз відомих досліджень. Обертання «гантелі» у вертикальній площині будемо трактувати як автоколивання, і цим самим доповнимо низку прикладів пристроїв, де діють автоколивальні ефекти [1,2]. Це механічні годинники з маятником і гирями, крила літака у повітряно-



му потоці (ефект флатера), струни скрипки під дією смичка, тощо. Існують фундаментальні дослідження автоколивальних процесів [1-3] у тому числі і з пружинними елементами [4,5]. У роботі [6] зазначена коливальна система названа Dangling stick (тростина, яка бовтається). Але нам не відомі роботи геометричного моделювання автоколивальних, виконані на базі подвійного маятника з пружинною першою ланкою.

Постановка завдання. Розробити метод візуалізації автоколивальних моделі подвійного маятника з пружною першою ланкою, коли друга ланка здійснює обертові рухи у вертикальній площині за рахунок еластичних властивостей (енергії) першої ланки, і який базується на розв'язанні системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду.

Основна частина. На коливання подвійного маятника з пружною першою ланкою впливатимуть: початкова довжина еластичної першої ланки маятника h , довжина другої ланки s , маси вантажів m_1 і m_2 , коефіцієнт жорсткості k першої ланки (пружини), а також початкові умови ініціювання коливальних. Через $u(t)$ позначимо функцію від часу кута відхилення від вертикалі першої ланки маятника, через $v(t)$ – те ж саме для другої ланки, а через $w(t)$ – функцію подовження першої ланки. Функції $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ оберемо як узагальнені змінні.

Відносно функцій $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ кінетичну K і потенціальну P енергії обраної коливальної системи можна виразити [6] за допомогою таких формул (тут і далі використовується синтаксис мови Maple):

$$\begin{aligned}
 K := & \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 w(t)^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 \\
 & + m_2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \sin(u(t)) s \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \\
 & + m_2 w(t) \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) s \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \\
 & - m_2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(u(t)) s \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) + \frac{1}{2} m_2 w(t)^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\
 & + m_2 w(t) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) s \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) + \frac{1}{2} m_2 s^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\
 P := & \frac{1}{2} k (w(t) - h)^2 - m_1 g w(t) \cos(u(t)) - m_2 g (w(t) \cos(u(t)) + s \cos(v(t)))
 \end{aligned}$$

З використанням лагранжіана $L = K - P$ і за допомогою розробленої Maple-програми було складено систему трьох диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду у вигляді



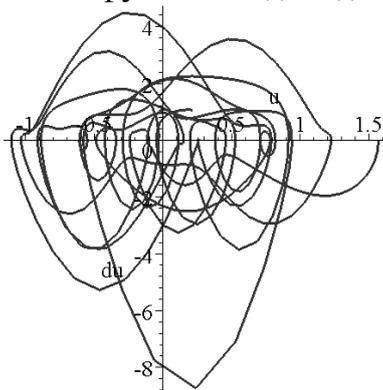
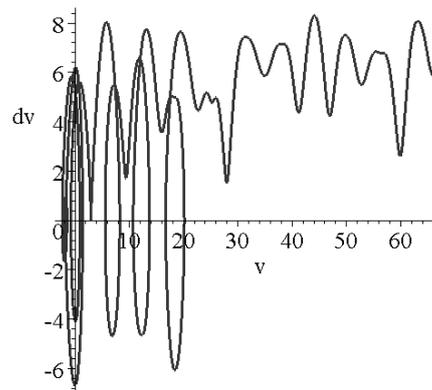
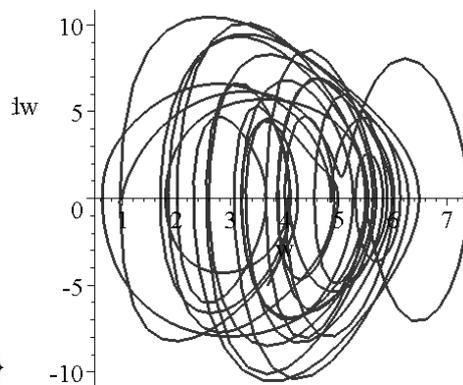
$$\begin{aligned} ODE1 &:= 2 m1 w(t) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) + m1 w(t)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \\ &\quad - m2 w(t) \cos(u(t)) s \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\ &+ m2 w(t) \cos(u(t)) s \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + 2 m2 w(t) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \\ &+ m2 w(t)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m2 w(t) \sin(u(t)) s \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\ &+ m2 w(t) \sin(u(t)) s \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + m1 g w(t) \sin(u(t)) \\ &+ m2 g w(t) \sin(u(t)) = 0 \\ ODE2 &:= m2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \sin(u(t)) s \cos(v(t)) \\ &\quad + 2 m2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) s \cos(v(t)) \\ &\quad - m2 w(t) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 s \cos(v(t)) \\ &\quad + m2 w(t) \cos(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) s \cos(v(t)) - m2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \cos(u(t)) s \sin(v(t)) \\ &\quad + 2 m2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) s \sin(v(t)) \\ &\quad + m2 w(t) \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 s \sin(v(t)) \\ &\quad + m2 w(t) \sin(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) s \sin(v(t)) + m2 s^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + m2 g s \sin(v(t)) = 0 \\ ODE3 &:= m1 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) + m2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) - m2 \sin(u(t)) s \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\ &\quad + m2 \sin(u(t)) s \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) - m2 \cos(u(t)) s \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\ &\quad - m2 \cos(u(t)) s \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) - m1 w(t) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - m2 w(t) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\ &\quad + k w(t) - k h - m1 g \cos(u(t)) - m2 g \cos(u(t)) = 0 \end{aligned}$$

Для моделювання автоколивань подвійного маятника з пружною першою ланкою запропоновано *графічний критерій вибору необхідного значення одного з параметрів маятника* – у даному випадку k_0 ,

а саме: для існування k_0 необхідно, щоб фазова траєкторія на площині $\{v, \dot{v}\}$ мала продовження вздовж координати v , а фазові траєкторії на інших площинах повинні окреслювати області мінімальної площі порівняно з площами при інших значеннях параметра k . Вибір значення k_0 у описі коливань забезпечить автоколивання моделі подвійного маятника, у чому можна переконатися за допомогою побудови анімаційного фільму.

При значеннях $h = 2$, $s = 2$, $m_1 = m_2 = 1$ (величини умовні) і змінним параметром k , який обирався у межах $10 \leq k \leq 30$ з кроком $\Delta = 0,4$, систему диференціальних рівнянь розв'язано чисельно методом Рунге-Кутти. У результаті (залежно від значень k) одержано послідовність фазових траєкторій для кожної з узагальнених змінних функцій $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$. Обчислення (при $g = 9,81$) на інтервалі $10 \leq k \leq 30$ виявили два значення параметра $k_0 = 10,4$ і $k_0 = 16$, які забезпечують автоколивання геометричної моделі (час інтегрування обрано $T = 8\pi$). Початкові умови обрано такі: $u(0) = \pi/2$; $v(0) = -\pi/2$; $w(0) = 1$; $Du(0) = 0$; $Dv(0) = 0$; $Dw(0) = 0$.

На рис.1 і рис.2 наведено варіанти трійок фазових траєкторій знайдених функцій $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ для відповідних значень k_0 .

На площині $\{u, \dot{u}\}$ На площині $\{v, \dot{v}\}$ На площині $\{w, \dot{w}\}$ Рис. 1. Фазові траєкторії для коефіцієнта жорсткості $k_0 = 10,4$.

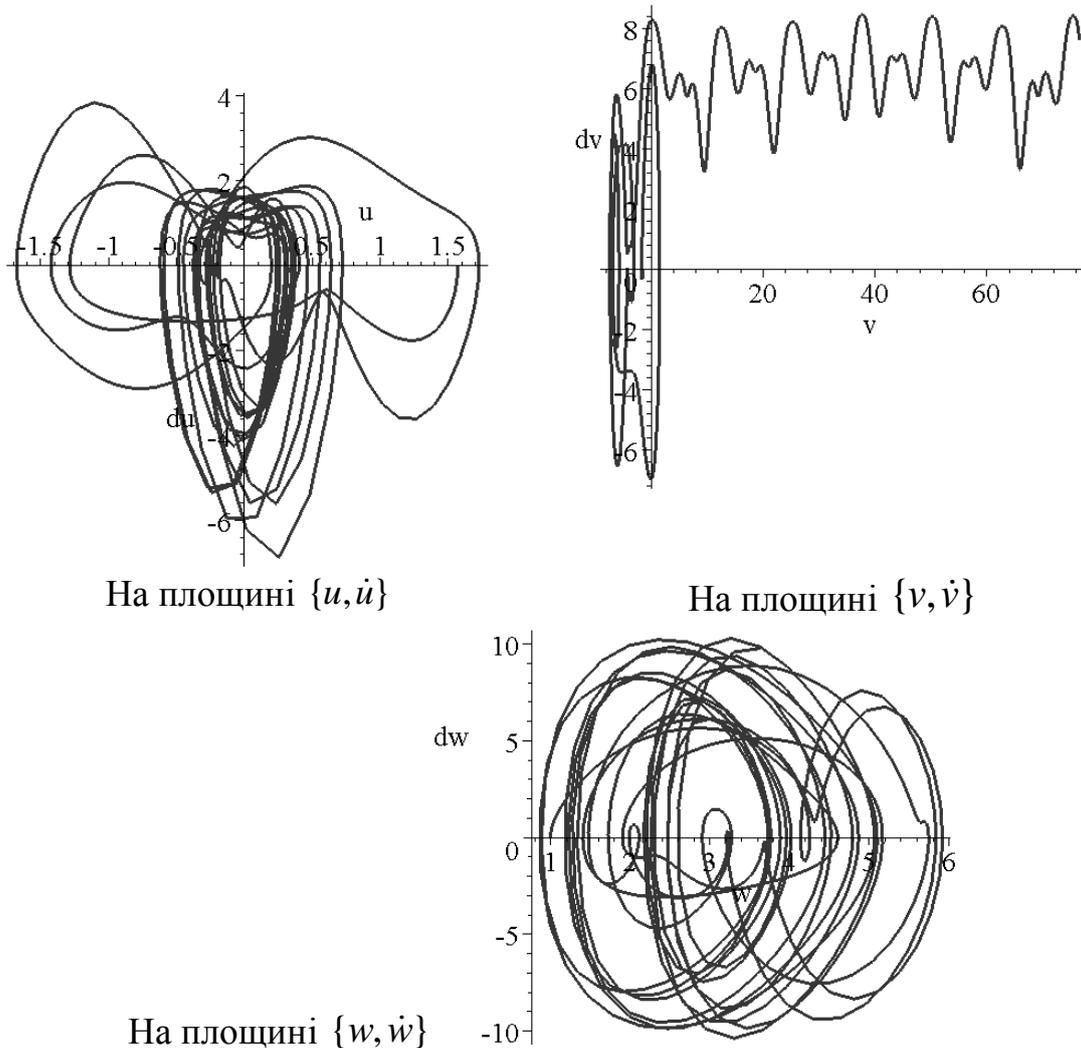


Рис. 2. Фазові траєкторії для коефіцієнта жорсткості $k_0 = 16$.

Аналіз фазових траєкторій показує, що при $k_0 = 16$ ефект автоколивання геометричної моделі настає швидше. Причина цього полягає у «зайвій» кількості витків фазової траєкторії на площині $\{v, \dot{v}\}$.

За допомогою наведеної Maple-програми було створено фільм комп'ютерної анімації, перегляд якого дозволяє простежити за характером процесу автоколивань моделі. Унаочнення згаданого процесу виглядає як обертання «гантелі» завдяки «притягання» чи «відпускання» одного з кінців пружинної ланки. На рис. 3 зображено деякі кадри анімації.

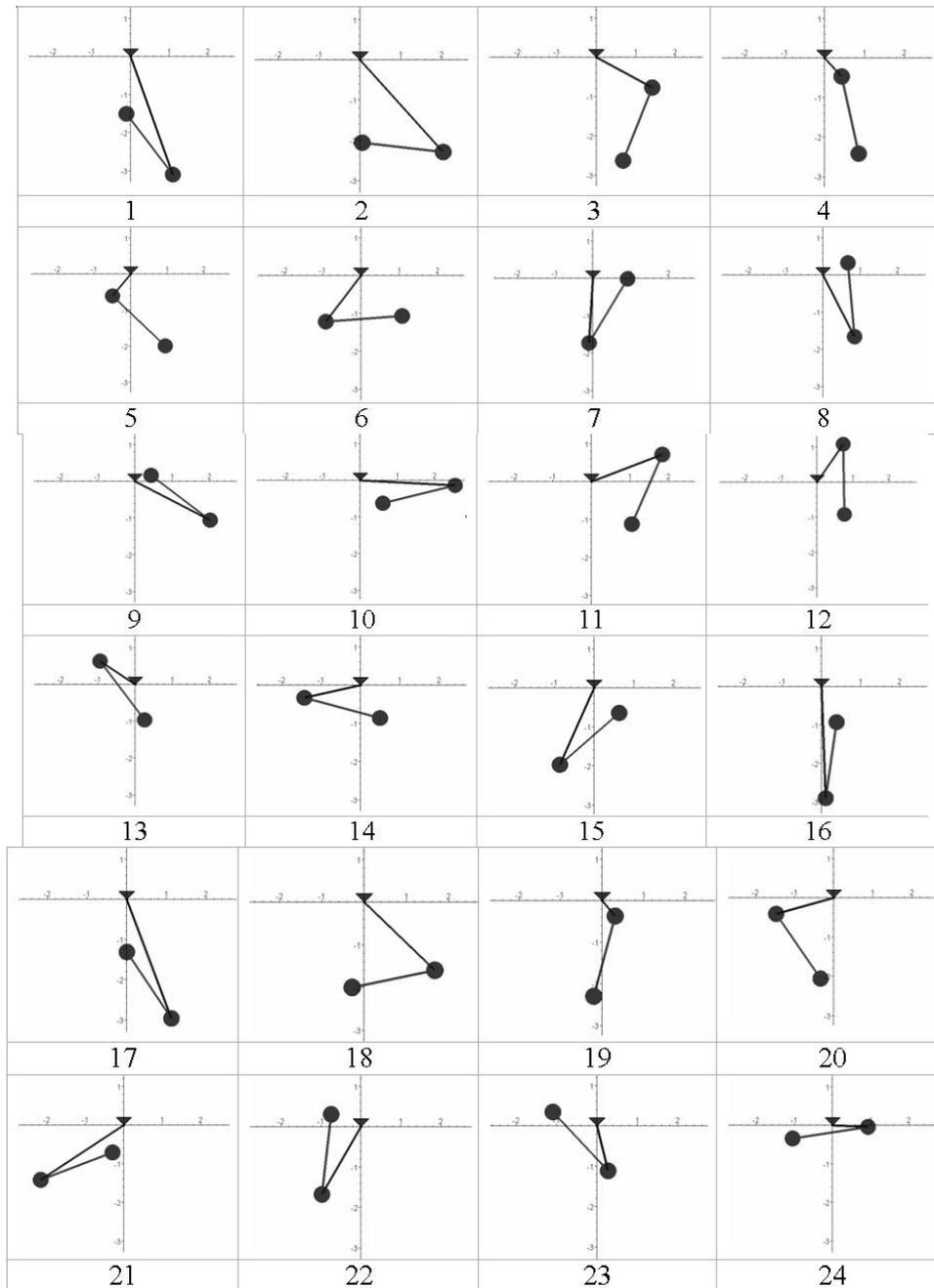


Рис. 3. Деякі кадри анімації автоколивань подвійного маятника

```
dsol := dsolve({ODE1, ODE2, ODE3,  
  u(0)=Pi/2, D(u)(0)=0, v(0)=-Pi/2, D(v)(0)=0,  
  w(0)=1, D(w)(0)=0}, numeric,  
  method=rkf45, output=listprocedure):  
solu := subs(dsol, u(t)):  
solv := subs(dsol, v(t)):  
solw := subs(dsol, w(t)):  
for i from 1 to N do  
uu := evalf(solu(T*i/N)):  
vv := evalf(solv(T*i/N)):
```



```
ww := evalf(solw(T*i/N)):
xa := (h+ww)*sin(uu): ya := (h-ww)*cos(uu):
pen1 := line([0,0], [xa, ya], thickness=5);
xb := xa + s*sin(vv): yb := ya - s*cos(vv):
pen2 := line([xb,yb], [xa, ya], thickness=5);
AA := disk([xa,ya], 0.2*m1, color=red):
BB := disk([xb,yb], 0.2*m2, color=red):
Gr[i] := display(pen1, pen2, AA, BB):
end do:
display(seq(Gr[i], i=(N/2 .. N), insequence=
true));
```

У програмі через ODE1, ODE2, ODE3 позначено диференціальні рівняння системи, $N = 250$ – кількість кадрів анімації, $T = 8\pi$ – час інтегрування, $h = 2$ – початкова довжина пружної першої ланки маятника; $s = 2$ – довжина другої невагомої ланки; $m_1 = 1$ і $m_2 = 1$ – маси вантажів. Коефіцієнт жорсткості $k = 16$ пружини задається перед розв'язанням системи рівнянь оператором dsolve.

Автоколивання подвійного маятника доцільно пояснити з позицій перетворення енергії при механічних коливаннях, а саме: при відхиленні другої ланки маятника від положення рівноваги його потенціальна енергія у полі тяжіння збільшується, оскільки збільшується відстань від поверхні Землі. Крім того, на ланку впливатиме пружна енергія першої ланки. При русі до положення «еластичної» рівноваги швидкість «гантелі» зростає, її кінетична енергія збільшується. Збільшення кінетичної енергії відбувається за рахунок зменшення запасу потенціальної енергії маятника в результаті зменшення відстані від поверхні Землі та ослаблення натягу першої ланки. У положенні рівноваги кінетична енергія має максимальне значення, а потенціальна енергія мінімальна. Після проходження положення рівноваги відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну, швидкість маятника зменшується і при максимальному відхиленні стає рівною нулю. При коливально-обертальному русі маятника завжди відбуваються періодичні взаємні перетворення його кінетичної і потенціальної енергії. Саме це і демонструє процес обертання «гантелі».

Висновок. Прояв ефекту автоколивань моделі подвійного маятника досягнуто за допомогою *графічного критерію вибору* параметрів системи. А саме, необхідно, щоб фазова траєкторія на площині $\{v, \dot{v}\}$ мала продовження вздовж координати v , а фазові траєкторії на площинах $\{u, \dot{u}\}$ і $\{w, \dot{w}\}$ повинні окреслювати області мінімальної площі.

Подальші дослідження будуть пов'язані з виявленням умов виникнення специфічних автоколивань «гантелі». Наприклад, коли при



обертаннях середина «гантелі» буде або нерухомою, або рухатиметься по заданій траєкторії. Крім того, цікавим буде випадок, коли «гантель» змінює напрямок обертання. Також планується дослідити автоколивання для подвійного маятника, який здійснює коливання у просторі.

Література.

1. Андронов, А.В. Теория колебаний / А.В. Андронов, А.А. Витт, С.З.Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.
2. Молотков, Н.Я. Изучение колебаний на основе современного эксперимента / Н.Я. Молотков. – Киев : Рад. школа, 1988. – 160 с.
3. Молотков Н.Я. Исследование механической автоколебательной системы / Н.Я.Молотков, О.В.Ломакина // Вестник тамбовского государственного технического университета, том 17, № 2 , 2011 – стр.584-589
4. Лекционные демонстрации по физике./ М.А. Грабовский, А.Б. Молодзеевский, Р.В.Телеснин и др. – М.: Наука, 1972. – 639 с.
5. Ливенцев Н. М. Курс физики: Учеб. для вузов. В 2-х т. / Н.М.Ливенцев // М.: Высшая школа, 1978. – т. 1. - 336 с., т. 2. – 333 с.
6. Електронний ресурс. http://www.myphysicslab.com/dangle_stick.html

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С ПРУЖИНЯЩИМ ПЕРВЫМ ЗВЕНОМ

Куценко Л.Н., Семкив О.М.

Аннотация - предложен метод визуализации автоколебаний двойного маятника с пружинящим первым звеном, когда второе звено вращается в вертикальной плоскости за счет эластичных свойств (энергии) первого звена. Метод основан на решении системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода.

AUTO-OSCILLATION GEOMETRIC MODELING OF DOUBLE PENDULUM WITH SPRING FIRST LINK

L. Kutsenko, O. Semkiv

Summary

The imaging method of double pendulum with spring first link auto-oscillation when the second link is revolved by the elastic properties (energy) of the first link is suggested. The method is based on solving differential Lagrange equation system of the second kind.