

УДК 514.18

**ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ  
ЗА ДОПОМОГОЮ КРИВИН ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ**

Куценко Л.М., д.т.н.,

Семків О.М., к.т.н.

*Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)*

Тел. (057) 337-25-61

**Анотація** – в роботі наведено спосіб визначення критичних значень параметрів фазових траєкторій диференціальних рівнянь другого порядку, що базується на понятті викривленості траєкторій і враховує зміну знака їх кривини вздовж траєкторій.

**Ключові слова** – фазова траєкторія, критичні значення параметра, аналіз на якісному рівні, викривленість кривої, кривина кривої.

*Постановка проблеми.* Традиційним об'єктом дослідження теоретичної механіки є аналіз маятникових коливань. Їх вивчення на якісному рівні зручно здійснювати методом фазових траєкторій. Сутність цього методу полягає у описі поведінки коливань за допомогою наочних геометричних зображень - фазових портретів [1,2], побудованих на площині у прямокутних координатах з осями «зміщення» і «швидкість». У описі коливання може існувати принаймні один параметр, який суттєво впливатиме на характер коливань. Наприклад, для математичного маятника таким параметром може служити *початкова швидкість* його руху. В залежності від її величини коливання будуть або загасаючими, або «обертливими» навколо точки підвісу. Тобто зміна певного значення швидкості може розмежовувати «якість» коливань. Ті значення параметрів, при яких змінюються якісні або топологічні властивості руху, називаються критичними або біфуркаційними значеннями [2,3,5]. Для практичних впроваджень необхідні інженерні способи обчислення критичних значень параметра коливань, врахування якого може або поліпшити конструкцію коливальної системи, або запобігти її аварійному стану [6,7]. Це вказує на актуальність обраної теми досліджень.

*Аналіз останніх досліджень.* Основи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій (теорії біфуркацій) закладені А.Пуанкаре й О.М.Ляпуновим, потім ці дослідження були розвинені О.О.Андроновим і учнями [1,2]. У роботі [3] наведено огляд

різноманітних способів дослідження фазових траєкторій на якісному рівні. Але серед них виявилось лише декілька суто графічних, які спираються на геометричні інтерпретації ізоклін як розв'язків рівнянь. Це вказує на недостатній розвиток графоаналітичних способів пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій для інженерної практики. Способи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій доцільно було б доповнити і такими, що базуються на характері викривленості фазової траєкторії, і які визначаються сукупністю значень її кривини вздовж цієї траєкторії.

*Формулювання цілей статті.* Розробка способу визначення критичних значень параметрів фазових траєкторій диференціальних рівнянь другого порядку, що базується на понятті викривленості траєкторій і враховує зміну знака їх кривини вздовж траєкторій.

*Основна частина.* Вважатимемо, що рух точки по фазовій траєкторії здійснюється у межах, які визначаються границями зміни параметра  $t$  часу, а «поворот» вправо або вліво при русі задається різними знаками при значеннях кривини цієї траєкторії.

*1. Суть способу.* Для пояснення суті способу спочатку замість фазових траєкторій розглянемо сім'ю кривих, для елементів якої кривину можна обчислити точно:

$$x = \sin(pt) + a \cos(t)/2; \quad y = -t \sin(t), \quad (1)$$

де параметр  $t$  змінюється у межах  $t_{MIN} = -0,2\pi < t < t_{MAX} = 2,1\pi$ , а керуючий параметр  $p$  змінюється у межах  $p_{MIN} = 1,5 < p < p_{MAX} = 2,3$ .

Необхідно визначити критичні значення параметра  $p$ , при якому елементи сім'ї кривих змінять викривленість - тобто мають змінитися на якісному рівні. Побудуємо ряд послідовних зображень, які відповідають певним значенням параметра  $p$  (рис. 1).

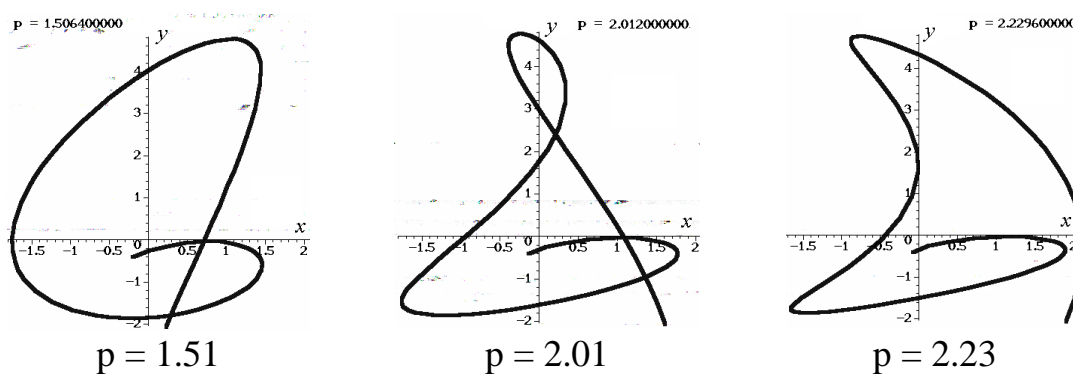


Рис. 1. Зображення залежно від значення параметра  $p$ .

Аналізуючи рисунки (бажано в режимі комп'ютерної анімації) легко помітити, що сім'ю кривих можна розділити за трьома характерами викривленості її елементів, які будуть розмежовані двома кривими, що відповідають значенням параметрів  $p=1,7$  і  $p=2,15$ .

Пропонується спосіб визначення критичних значень керуючого параметра  $p$ , який би не спирався на анімаційні зображення елементів сім'ї кривих. Тобто спосіб розв'язання зазначеної задачі на формальному рівні.

В основу покладено дві тези.

*Теза 1.* Критичні значення керуючого параметра сім'ї кривих відповідають моментам зміни їх елементів на якісному рівні.

*Теза 2.* Якісні зміни елементів сім'ї кривих можна відслідковувати аналізуючи зміни характеру викривленості з використанням значень функцій кривини ліній.

Посилаючись на [4], обчислимо функцію кривини для сім'ї (1):

$$k(p) = \frac{u(-2 \cos(t) + t \sin(t)) - v(-p^2 \sin(pt) - p \cos(t)/2)}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2)$$

де  $u = p \cos(pt) - p \sin(t)/2$  і  $v = -\sin(t) - t \cos(t)$ .

На рис. 2 наведено елемент сім'ї кривих і відповідний графік функції  $k(t)$  кривини для значення параметра  $p=2$  (тут графік кривини  $k(t)$  обмежено прямою  $k = 6$ ):

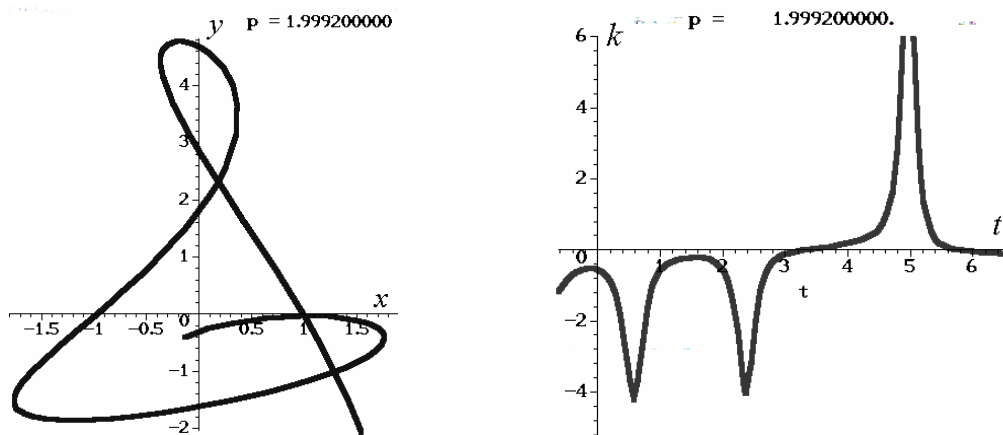
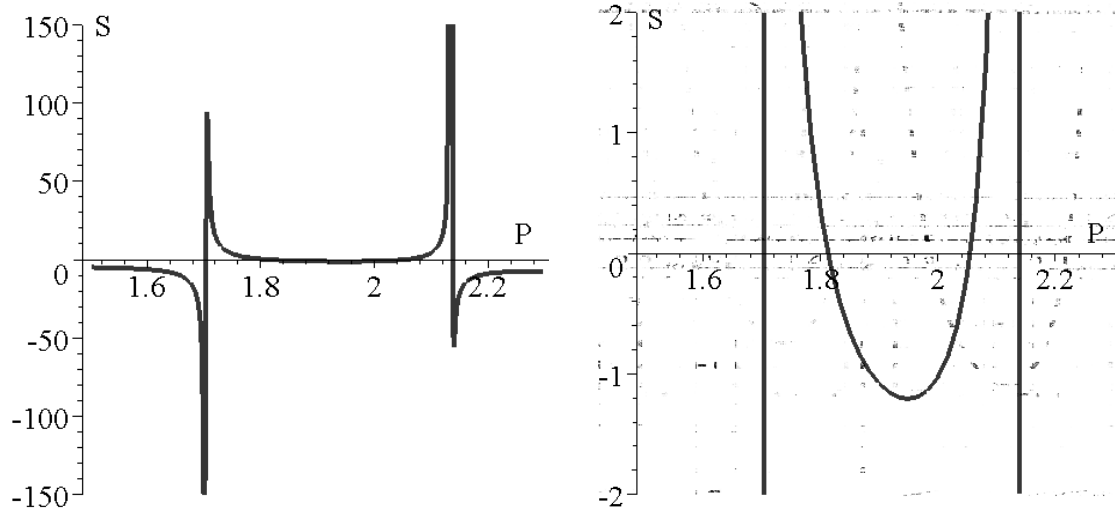


Рис. 2. Елемент сім'ї кривих і графік кривини  $k(t)$  для значення параметра  $p=2$ .

Далі вивчимо зміну графіка функції  $k = k(t)$  залежно від параметра  $p$  на відрізку  $[1,5; 2,3]$ . Площа  $S$  між графіком і віссю абсцис є деяке постійне число. Однак можна розглянути і змінну величину – площу під графіком функції  $k(t)$  залежно від параметра  $p$ . Тоді площа буде не постійною, а функцією від  $p$ :  $S = S(p)$ .

Складено програму для визначення функції  $S(p)$  як інтеграла кривини  $k(t)$ , обчисленого у межах зміни параметра  $t$ . В результаті одержуємо графік функції  $S(p)$  (рис. 3, праворуч – те ж збільшено).

Рис. 3. Графік функції  $S(p)$ .

Особливість графіка  $S(p)$  полягає у тому, що у випадку зміни елементів сім'ї на якісному рівні до його складу мають залучатися лінійні елементи (пов'язані зі стрибками функції  $S(p)$ ), розташовані паралельно осі ординат. І що характерно, координати на осі абсцис цих відрізків матимуть значення, які відповідатимуть критичним значенням керуючого параметра  $p$ . У даному випадку  $p=1,7$  і  $p=2,15$  (рис. 3), що збігається з критичними значеннями параметра, одержаними після спостережень за анімаційними зображеннями.

2. *Пошук критичних значень параметрів фазових траєкторій.* При цьому головним буде питання визначення кривини фазових траєкторій, для яких у загальному випадку не відомі описи аналітичними формулами (подібними формулі (2)). Адже координати точок на фазовій траєкторії обчислюються переважно чисельними методами після розв'язання диференціального рівняння. Тому постає питання визначати кривину фазової траєкторії, задану множиною  $N$  точок  $(x_i, y_i)$  коли  $i = 2..M-1$ . Керуючий параметр далі позначено як  $p$ .

Оберемо на фазовій кривій три сусідні точки  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$  і  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Для наближеного обчислення кривини в точці  $(x_i, y_i)$  знайдемо радіус кола  $r_1$ , яке проходить через дані три точки. Тоді значення кривини буде  $k=1/r_1$ .

Використаємо відоме з аналітичної геометрії рівняння кола, виражене за допомогою визначника

$$\begin{vmatrix} u^2 + v^2 & u & v & 1 \\ x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 & x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i^2 + y_i^2 & x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 & x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Позначимо  $A = \begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix};$

$$B = y_{i+1}^2 y_i - x_{i+1}^2 y_{i-1} + x_{i+1}^2 y_i - y_{i+1}^2 y_{i-1} - y_i^2 y_{i+1} + y_i^2 y_{i-1} + \\ + x_i^2 y_{i-1} - x_i^2 y_{i+1} - y_{i-1}^2 y_i + y_{i-1}^2 y_{i+1} - x_{i-1}^2 y_i + x_{i-1}^2 y_{i+1};$$

$$C = y_{i+1}^2 x_{i-1} - y_{i+1}^2 x_i + x_{i+1}^2 x_{i-1} - x_{i+1}^2 x_i + y_i^2 x_{i+1} - y_i^2 x_{i-1} + \\ + x_i^2 x_{i+1} - x_i^2 x_{i-1} + y_{i-1}^2 x_i - y_{i-1}^2 x_{i+1} + x_{i-1}^2 x_i - x_{i-1}^2 x_{i+1};$$

$$D = y_{i+1}^2 x_i y_{i-1} - y_{i+1}^2 x_{i-1} y_i - x_{i+1}^2 x_{i-1} y_i + x_{i+1}^2 x_i y_{i-1} + \\ + y_i^2 x_{i-1} y_{i+1} - y_i^2 x_{i+1} y_{i-1} - x_i^2 x_{i+1} y_{i-1} + x_i^2 x_{i-1} y_{i+1} - \\ - y_{i-1}^2 x_{i+1} y_i - y_{i-1}^2 x_i y_{i+1} - x_{i-1}^2 x_i y_{i+1} + x_{i-1}^2 x_{i+1} y_i.$$

В результаті одержимо формулу для обчислення радіуса кола

$$r_i = \frac{\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - AD}}{A}, \quad (5)$$

а також координат його центра

$$x_{\text{Ц}} = -\frac{B}{2A}; \quad y_{\text{Ц}} = -\frac{C}{2A}. \quad (6)$$

Виходячи з формули (5) обчислимо наближене значення кривини  $k_i = 1/r_i$  в точці  $(x_i, y_i)$ . Умова  $A = 0$  визначатиме нульову кривину (коли точки розташовані на прямій).

Після визначення кривин для усіх точок на фазовій траєкторії будемо кусково-лінійний графік функції  $k(t)$  кривин для певного значення параметра  $p$ . Площу підграфіка (для початкового значення  $p$ ) визначаємо за допомогою одного з чисельних методів (наприклад, метода Сімпсона). Виконуючи зазначені дії в циклі для інших значень параметра  $p$ , одержимо наближений графік функції  $S(p)$ , який складатиметься з лінійних відрізків. Згідно з наведеним вище, критичні значення визначатимуться за допомогою вертикальних складових кусково-лінійного графіка функції  $S(p)$ .

3. Дослідження коливань математичного маятника, стан якого описано системою диференціальних рівнянь [5]:

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t); \quad \frac{d}{dt} y(t) = -0,2y(t) - 9.8 \sin(x(t)). \quad (7)$$

На якісному рівні покажемо, що для математичного маятника «критичним» параметром може служити *початкова швидкість* його руху, яка визначається початковою умовою  $y(0)$ . В залежності від величини  $y(0)$  коливання будуть або загасаючими, або «обертovими» навколо точки підвісу. Тобто зміна певного значення початкової швидкості  $y(0)$  може розмежувати «якість» коливань.

Розв'язувати систему диференціальних рівнянь (7) будемо

чисельно методом Рунне-Кута з початковими умовами  $x(0)$  і  $y(0)$ . Для тестування програми (складеної в середовищі мови Maple) обрано умови  $x(0) = 0$  і  $6 < y(0) < 8$ .

На рис. 4 наведено анімаційні кадри зміни фазового портрету, з яких визначаються критичні значення початкової швидкості  $y_1(0) = 6,65$  і  $y_2(0) = 7,6$ , які забезпечують, відповідно, одне чи два обертання.

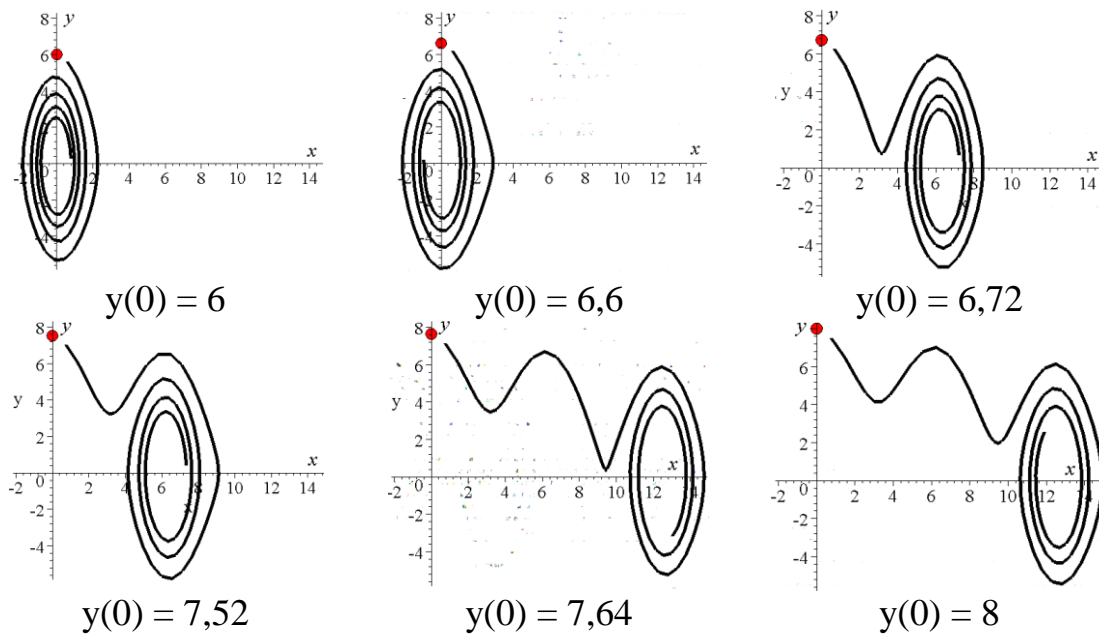


Рис. 4. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від  $y(0)$ .

Тобто, при критичних значеннях маятник має здійснити переворот навколо точки підвісу. На рисунках колом позначається точка, що відповідає початковим умовам. При цьому крок між точками на фазовій кривій обирався  $\Delta = 0,1$ ; кількість точок  $M=1000$ .

На рис. 5 наведено графік функції  $S(p)$  залежно від кількості ітерацій  $N$ , де визначені критичні значення  $y_1(0) = 6,65$  і  $y_2(0) = 7,6$ .

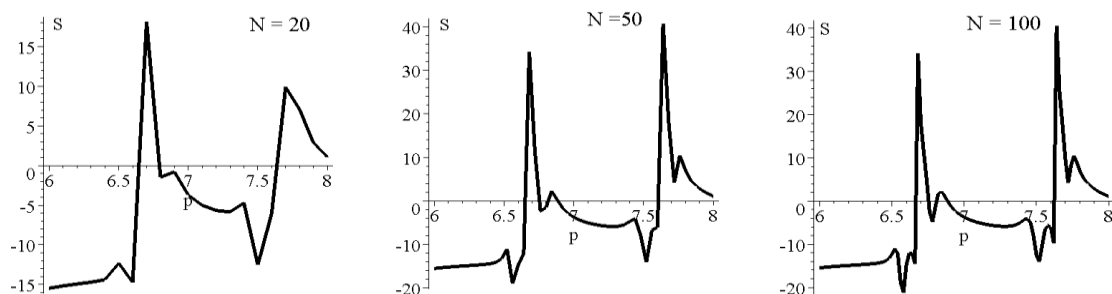


Рис. 5. Графік функції  $S(p)$  залежно від кількості ітерацій  $N$ .

Незмінність положення точок критичних значень при  $N=50$  і  $N=100$  вказує на прийнятну збіжність процесу обчислень.

Більш цікавим є випадок аналізу коливань за умови  $0 < x(0) < 6$  і  $y(0) = 8$ . На рис. 6 наведено кадри зміни фазового портрету залежно від значень  $x(0)$ . На рис. 7 наведено графік відповідної функції  $S(p)$  зі знайденими критичними значеннями  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 2$  і  $x_3(0) = 4,8$ .

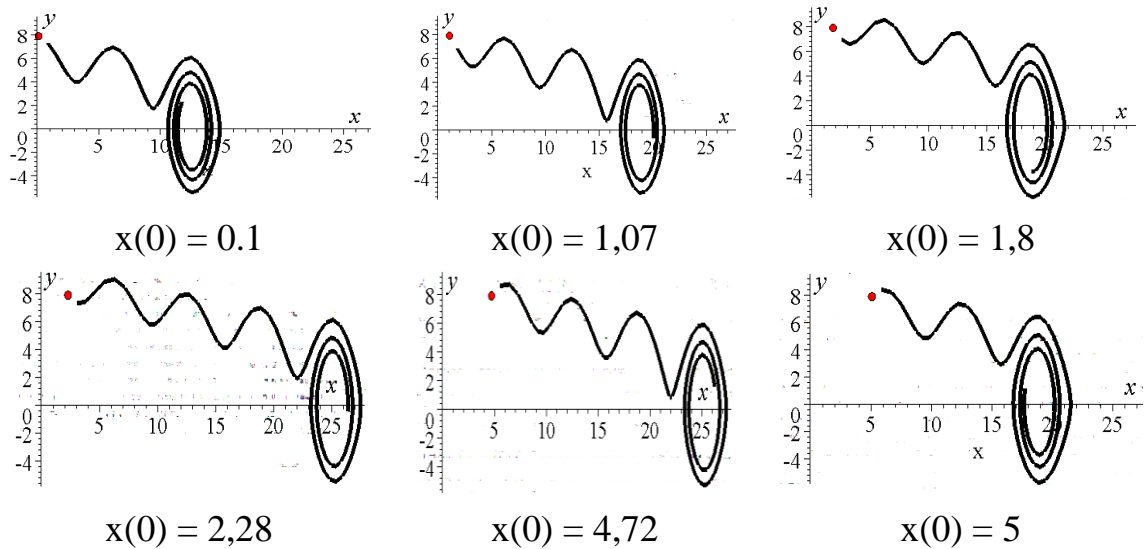


Рис. 6. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від  $x(0)$ .

Використання способу наближеного обчислення кривини за допомогою радіуса кола, проведеного через три точки, було необхідно тому, що чисельним способом вдалося наближено обчислити лише значення функції та її похідної. А для обчислення кривини необхідно знати ще і другу похідну. Тому після аналізу поширених чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь було прийнято рішення наближено обчислювати кривини за допомогою радіуса «дотичного» кола.

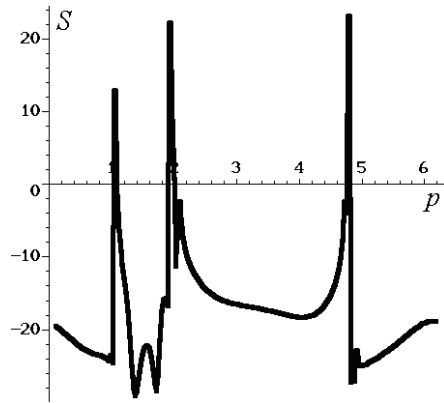


Рис.7. Графік функції  $S(p)$ .

**Висновок.** Для визначення критичних значень параметра  $p$  сім'ї фазових траєкторій необхідно знайти координати на осі абсцис вертикальних складових на графіку  $S=S(p)$  залежності від параметра  $p$  інтеграла функції кривини  $k(t)$  (або стрибків значень функції  $S(p)$ ).

#### Література

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин.- М.: Наука, 1974. – 331 с.
2. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н.Баутин, Е.А Леонтович -

- М.: Наука, 1990. – 287с.
3. *Китаев Д.Б.* Развитие качественной теории дифференциальных уравнений в XIX столетии: дис... канд. техн. наук: 07.00.10 / Д.Б. Китаев - М: Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН. – 2011. – 140 с.
  4. *Мищенко А.С.* Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии / А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев , А.Т.Фоменко – М: Изд. ФМЛ, 2001. – 352 с.
  5. *Бутенин Н.В.* Теория колебаний / Н.В.Бутенин - М.: Высшая школа, 1963. – 187 с.
  6. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство / Т.Шуп - Пер. с англ. - М.: Мир, 1982 -238с.
  7. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний / В.Л.Бидерман - М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОМОЩИ КРИВИЗН ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ**

Л.Н. Куценко, О.М. Семкив

*Аннотация* – в работе приведен способ определения критических значений параметров фазовых траекторий дифференциальных уравнений второго порядка, который базируется на понятии искривленности фазовых траекторий и учитывает изменение знака их кривизны вдоль траекторий.

### **DETERMINATION CRITICAL VALUES OF PARAMETERS DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VIBRATIONS THROUGH CURVATURES OF PHASE TRAJECTORIES**

L. Kutsenko, O. Semkiv

#### *Summary*

A graphic analytical method over of determination of critical values of parameters of phase trajectories of differential equalizations is Brought the second order, that is based on the concept of distorted of phase trajectories and takes into account the change of sign of their curvature along trajectories.