

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, докторант Университета гражданской защиты Украины МЧС Украины (г. Харьков)<sup>2</sup>Д-р физ.-мат. наук, заведующая кафедрой Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры МОН Украины

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ СПУСКА В ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Проведено исследование оптимизационной задачи размещения многоугольных неориентированных объектов в полосе, рассматриваемой в линеаризованной постановке. Выделены дополнительные свойства области допустимых решений, предложена схема метода поиска локального минимума функции цели. Рассмотрена схема определения направления движения по границе компоненты связности линеаризованной области допустимых решений.

**Ключевые слова:** размещение неориентированных многоугольников, линейная аппроксимация, область допустимых решений, локальный минимум.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу оптимального размещения конечного набора неориентированных многоугольных геометрических объектов в заданной многоугольной области. Данная задача принадлежит к классу задач оптимизационного геометрического проектирования [1–3] и представляет интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. К задачам такого рода относятся, например, задачи раскроя изотропного материала (металлопрокат, ткань, стекло, пластмасса и т. д.) на многоугольные заготовки. При этом, если над геометрическим объектом допустимо аффинное преобразование поворота, то такой геометрический объект называют неориентированным.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется набор  $R = \{R_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$  выпуклых неориентированных многоугольных объектов, заданных в арифметическом евклидовом пространстве  $E^2$ , и область размещения  $R_0 = \{(x, y) \in E^2 | x \in [0, z], y \in [0, W], W = \text{const}, z = \text{var}\}$  – полубесконечная полоса. Объект  $R_i$  задается упорядоченным набором  $\{(x_i^n, y_i^n)\}$ ,  $n = \overline{1, n_i}$  координат его вершин в собственной системе координат  $X_i O_i Y_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  (рис. 1).

Положение объекта  $R_i$  в общей системе координат  $XOY$ , связанной с областью  $R_0$ , определяется вектором параметров размещения  $u_i = (v_i, \varphi_i) =$

$= (x_i, y_i, \varphi_i)$ , задающим начало  $O_i$  системы координат  $X_i O_i Y_i$ , при этом  $O_i \in \text{int } R_i$ .

Компонента  $v_i = (x_i, y_i)$  задает трансляцию  $O_i$ , а угол  $\varphi_j$  – поворот системы координат  $X_i O_i Y_i$  относительно  $O_i$ .

Необходимо разместить набор  $R_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  объектов без взаимных наложений в области  $R_0$  так, чтобы длина занятой части полосы  $z$  была минимальной.

Математическая модель оптимизационной задачи размещения имеет вид:

$$\text{найти: } u^* = \arg \min_{u \in D \subset E^{3N+1}} cu, \quad (1)$$

где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N, z) = (x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2, \dots, x_N, y_N, \varphi_N, z)$ ;  $c = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ;  $D = D_1 \cap D_2$  – область допустимых решений задачи; подобласть  $D_1 \subset E^{3N+1}$  определяется ограничениями на размещение объектов  $R_i$  в полосе  $R_0$ :

$$R_i \subset R_0, \quad i = \overline{1, N}; \quad (2)$$

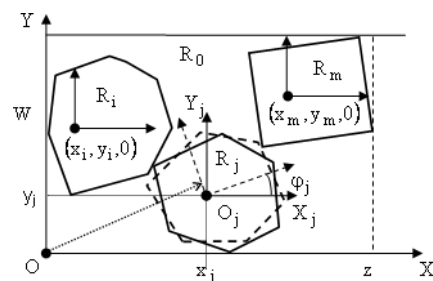


Рис. 1. Область размещения  $R_0$  с размещаемыми объектами  $R_i, R_j, R_m$

$D_2 \subset E^{3N+1}$  задається умовами взаємного попарного непересечения об'єктів  $(R_i, R_j)$ :

$$\text{int} R_i \cap \text{int} R_j = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j. \quad (3)$$

Аналитическое описание условия (2) задается системой  $F_l(u) \geq 0 := \{f_i^{hn}(u_i) \geq 0, \quad n = \overline{1, n_i}; \quad h = \overline{1, 4}; \quad i = \overline{1, N}$  нелинейных неравенств, причем функции  $f_i^{hn}(u_i)$  имеют вид:

$$f_i^{hn}(u_i) \in \{x_i - \xi_i^n; y_i - \psi_i^n; -y_i + W - \psi_i^n; z - x_i - \xi_i^n\}, \quad (4)$$

где  $\xi_i^n = |x_i^n \cos \varphi_i + y_i^n \sin \varphi_i|$ ;  $\psi_i^n = |y_i^n \cos \varphi_i - x_i^n \sin \varphi_i|$ .

Условие (3) задается системой  $F_2(u) \geq 0$  наборов  $F_{ij}^h(u_i, u_j) \geq 0$  нелинейных неравенств вида:

$$F_{ij}^h(u_i, u_j) \geq 0; \quad f_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0, \\ h = \overline{1, n_i}, \quad l = \overline{1, n_j}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j.$$

При этом функции  $f_{ij}^{hl}$  в зависимости от типа касания [3] пары  $(R_i, R_j)$  имеют вид:

$$(A \cos \varphi_i + B \sin \varphi_i)(x_j - x_i) + (B \cos \varphi_i - A \sin \varphi_i)(y_j - y_i) + \\ + (A x_j^k + B y_j^k) \cos(\varphi_i - \varphi_j) - (B x_j^k - A y_j^k) \sin(\varphi_i - \varphi_j) - \\ - (B y_i^l + A x_i^l) \quad (5)$$

или

$$(A \cos \varphi_j + B \sin \varphi_j)(x_j - x_i) + (B \cos \varphi_j - A \sin \varphi_j)(y_j - y_i) - \\ - (A x_i^l + B y_i^l) \cos(\varphi_j - \varphi_i) + (B x_i^l - A y_i^l) \sin(\varphi_j - \varphi_i) + \\ + (B y_j^k + A x_j^k), \quad (6)$$

где  $x_i^l, y_i^l, x_j^k, y_j^k$  – координаты вершин объектов  $R_i, R_j$ ;  $A, B$  – функции координат их вершин.

Данная задача является многомерной многоэкстремальной задачей нелинейного невыпуклого программирования со специфичной областью допустимых решений, что затрудняет или делает невозможным применение классических методов условной оптимизации [4]. Эффективные точные методы решения задач практической размерности отсутствуют.

Актуальность рассматриваемого класса задач обуславливает необходимость создания программного обеспечения процесса решения, основанного на современном математическом инструментарии.

В статье [5] предложена методика линейной аппроксимации области  $D$  и построено преобразование  $\mathfrak{S}(D, \varepsilon): D \xrightarrow{\mathfrak{S}} D^L$ , такое, что его применение к нелинейным функциям ограничений задачи (1) с точностью  $\varepsilon > 0$  продуцирует аппроксимационное

множество  $D^L$  (соответственно  $D_1 \xrightarrow{\mathfrak{S}} D^{L_1}, D_2 \xrightarrow{\mathfrak{S}} D^{L_2}$ ) с кусочно-линейной границей [5].

Целью настоящей статьи является выделение дополнительных свойств линеаризованной области  $D^L$  допустимых решений и построение метода поиска локального минимума функции цели задачи, основанного на использовании идеи активного набора [5].

## 2. ОБЩАЯ СХЕМА АКТИВНОГО НАБОРА

Приведем интерпретацию общей схемы активного набора в применении к задаче линейного программирования (LP) вида:

$$\text{найти } \min_{u \in D \subset E^n} c^T u, \quad (7)$$

$$A u \geq b,$$

где  $A$  есть  $m \times n$  – матрица коэффициентов,  $m > n$ ,  $A = (a_j), j = \overline{1, m}$ .

В схеме активного набора  $(h + 1)$ -я итерация имеет вид [5]

$$u^{h+1} = u^h + \Delta u^h \cdot p^h, \quad (8)$$

где  $u^h$  – значение на предыдущей итерации;  $\Delta u^h$  – шаг,  $p^h$  – направление спуска.

Активным набором называют те ограничения задачи LP (7), которые обращаются в текущей точке  $u^h$  в равенства:  $a_j^T u^h = b_j$ .

Рабочим списком называют те ограничения активного набора, которые учитываются при расчете направления поиска (не все обращающиеся в равенства в точке  $u^h$  ограничения задачи (7) попадут в рабочий список). Обозначим  $I$  – множество индексов ограничений рабочего списка,  $|I| = n$ .

Для задачи LP (7) можно организовать движение к оптимуму  $u^*$  так, что число ограничений  $a_j^T u^h = b_j$  в рабочем списке на каждой итерации будет совпадать с числом переменных:  $\bar{A} u^h = \bar{b}, \bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{n \times n}$ , причем матрица  $\bar{A}$  ограничений невырожденная, то есть  $u^h$  – вершина  $D$  [5]. В точке  $u^h$  по схеме активного набора определяются знаки компонент вектора множителей Лагранжа  $\lambda$ . Последний представляет собой решение невырожденной системы линейных уравнений

$$\bar{A}^T \lambda = c. \quad (9)$$

Если все компоненты  $\lambda \geq 0$ , то  $u^h$  есть решение LP. Если найдется отрицательная (например,  $\lambda_s < 0$ ), то целевую функцию можно уменьшить, двигаясь по направлению, вдоль которого левая часть  $s$ -го огра-

ничення возрастает (исключается из рабочего списка), а остальные ограничения рабочего списка остаются равенствами (левые части таких ограничений не изменяются:  $a_j^{-T} p = 0 \quad j \neq s$ ).

Направление  $p$  определяется как решение линейной системы вида

$$\bar{A}p = e_s, \quad (10)$$

где через  $e_s$  обозначен  $s$ -й столбец единичной матрицы, т. е.  $p$  –  $s$ -й столбец матрицы  $\bar{A}^{-1}$ .

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОБЛАСТИ $D^L$

Аппроксимационное многогранное множество  $D^{L_1}$  в диапазоне изменения углового параметра  $\varphi_i \in [-0,36; 0,36]$  с заданной погрешностью  $\epsilon_{\cos}$  [5] задается системой  $F_1^L(u) \geq 0 = \{\mathfrak{S}_i^{hn}(u_i) \geq 0, n = \overline{1, n_i}; h = \overline{1, 4}; i = \overline{1, N}$  наборов  $\mathfrak{S}_i^{hn}(u_i) \geq 0$  линейных неравенств. При этом функции набора  $\mathfrak{S}_i^{lj}(u_i)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_i^{ln} &\approx x_i - x_i^n g^L(\varphi_i) - y_i^n \varphi_i = \\ &= \langle -x_i + x_i^n g_k^L(\varphi_i) + y_i^n \varphi_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $g_k^L(\varphi_i) = a_k^i \varphi_i + b_k^i$  (при  $k = \overline{1, 3}$  коэффициенты  $a_k^i, b_k^i$  приведены в табл. 1).

Аналогично записываются аппроксимации  $\mathfrak{S}_i^{hn}(u_i)$  функций  $f_i^{hn}$ ,  $h = \overline{2, 4}$ .

Многогранное множество  $D^{L_2}$  задается системой  $F_2^L(u) \geq 0$  наборов  $F_{ij}^L(u_i, u_j) \geq 0$  линейных неравенств вида:

$$\begin{aligned} F_{ij}^L(u_i, u_j) \geq 0 &:= \langle \mathfrak{S}_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0, \\ h = \overline{1, n_i}, l = \overline{1, n_j}, i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом набор  $\mathfrak{S}_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0 = \langle \xi_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \geq 0$  является линейной аппроксимацией функций  $f_{ij}^{hl_1}$  вида (4), (5). Последние с учетом применения функции  $g_k^L(\varphi_i) = a_k^i \varphi_i + b_k^i$  могут быть выписаны в виде

$$\begin{aligned} C_{1k}^i \varphi_i x_j - C_{1k}^i \varphi_i x_i + C_{2k}^i \varphi_i y_j - C_{2k}^i \varphi_i y_i + C_1^j \varphi_i \varphi_j + \\ + b_k^i (Ax_j - Ax_i + By_j - By_i) + \varphi_i (C_1^j a_k^i + C_2^j) + \\ + \varphi_i (C_1^j a_h^j - C_2^j) + C_1^j (b_k^i + b_h^j - 1) - C_i^k, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $C_{1k}^i = B + Aa_k^i$ ;  $C_{2k}^i = Ba_k^i - A$ ;  $C_1^j = Ax_j^1 + By_j^1$ ;  $C_2^j = (Bx_j^1 - Ay_j^1)$ ;  $C_i^k = (By_i^k + Ax_i^k)$ .

Кусочно-линейная аппроксимация  $\Gamma_v^L$  функций  $\Gamma_v = \varphi_i \omega_v$ ,  $\omega_v \in \{x_j, x_i, y_j, y_i, \varphi_j\}$ ,  $v = \overline{1, 5}$  в заданных диапазоне изменения параметров осуществляется с помощью набора  $T$  линейных функций вида:

$$A_{vt} \omega_v + B_{vt} \varphi_i + D_{vt}, \quad t = \overline{1, T}.$$

Тогда функция  $f_{ij}^{hl_1}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} (C_{1k}^i A_{1t} + b_k^i A) x_j - (C_{1k}^i A_{2t} + b_k^i A) x_i + \\ + (C_{2k}^i A_{3t} + b_k^i B) y_j - (C_{2k}^i A_{4t} + b_k^i B) y_i + \\ + (C_1^j B_{5t} + C_1^j a_h^j - C_2^j) \varphi_j + (C_{1k}^i B_{1t} - C_{1k}^i B_{2t} + \\ + C_{2k}^i B_{3t} - C_{2k}^i B_{4t} + C_1^j A_{5t} + C_1^j a_k^i + C_2^j) \varphi_i + D, \end{aligned}$$

где  $D = C_{1k}^i D_{1t} - C_{1k}^i D_{2t} + C_{2k}^i D_{3t} - C_{2k}^i D_{4t} + C_1^j D_{5t} + C_1^j (b_k^i + b_h^j - 1) - C_i^k$ .

Отметим, что одноименные (относительно  $t$ ) коэффициенты  $A_{vt}, B_{vt}, D_{vt}$ ,  $v = \overline{1, 4}$  равны для всех  $t$ .

Таким образом, задача (1) приобретает вид:

$$\text{найти } u^* = \arg \min_{u \in D^L \subset E^{3N+1}} z. \quad (14)$$

Приведем основные свойства области  $D^L$ , необходимые для дальнейших построений.

**Свойство 1.** Область  $D^L$  – несвязное ограниченное точечное множество, имеющее кусочно-линейную границу  $\Psi^L = Fr D^L$ ,  $\Psi \subset E^{3N+1}$ :

$$D^L = \bigcup_{q=1}^Q D_q^L,$$

где  $D_q^L$  – компонента связности области  $D^L$ .

**Свойство 2.** Функции ограничений (3), (4) являются невыпуклыми (обратно выпуклыми), следовательно, наборы вида (11), (12) описывают невыпуклые линейные многообразия.

Таблица 1

$\varphi_i$	$b_k^i$	$a_k^i$	$\varphi_i$	$b_k^i$	$a_k^i$
$[\varphi^1; \varphi^2] = [0; 0,12]$	1	-0,6	$[-\varphi^2; -\varphi^1] = [-0,12; 0]$	1	0,6
$[\varphi^2; \varphi^3] = [0,12; 0,24]$	1,0144	-0,18	$[-\varphi^3; -\varphi^2] = [-0,24; -0,12]$	1,0144	0,18
$[\varphi^3; \varphi^4] = [0,24; 0,36]$	1,0432	-0,3	$[-\varphi^4; -\varphi^3] = [-0,36; -0,24]$	1,0432	0,3

**Свойство 3.** Каждое неравенство вида (4), (5), становясь активным ограничением, определяет условие касания объекта границы области размещения или условие касания пары размещаемых объектов.

**Свойство 4.** Число ограничений  $S$ , описывающих область  $D^L$  задачи (1), квадратично зависит от числа размещаемых объектов и равно

$$S = S_1 + S_2 = O\left(4NK \max_{i=1, N} n_i\right) + O\left(KTN^2 \max_{i=1, N} n_i\right), \tag{15}$$

где  $S_1, S_2$  – число ограничений, описывающих подобласти  $D^{L_1}, D^{L_2}$  соответственно,  $K, T$  – параметры, определяемые точностью аппроксимации.

**Свойство 5.** Каждая компонента связности  $D_q^L$  области  $D^L$  может быть представлена в виде объединения конечного числа  $G_q$  выпуклых многогранных подобластей  $D_{q_g}^L$  вида

$$D_q^L = \bigcup_{g=1}^{G_q} D_{q_g}^L.$$

При этом границу области  $D_{q_g}^L$  задает набор уравнений, содержащий, по крайней мере, по одному из ограничений каждого набора вида (11), (12).

**Свойство 6.** В силу линейности функций ограничений области  $D^L$  и функции цели (1) оптимальная точка  $u^*$  задачи (как и любое текущее приближение  $u^h$ ) описывается системой  $F^*u = 0$   $I = 3N + 1$  активных в точке  $u$  ограничений из систем  $\{F_1^L(u) \geq 0, F_2^L(u) \geq 0\}$  наборов линейных неравенств. При этом система  $F^h u = 0$  (особенно на начальных этапах алгоритма оптимизации) может содержать также уравнения вида  $\varphi_i = (\pm)\varphi^k$  (табл. 1).

**Свойство 7.** Для точки  $u^h$ , включая  $u^*$ , справедливо соотношение

$$u^h \in \bigcap_{r>1} D_{q_r}^L,$$

где  $D_{q_r}^L$  – выпуклая подобласть области  $D^L$ .

#### 4. МЕТОД ПОИСКА НАПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ (МПНД)

Общая схема метода такова. Пусть имеется допустимая начальная точка  $u^0$  ( $h = 0$ ), определяемая системой уравнений  $F^h u = 0$ .

Шаг 1. Проверка условий останова. Если выполнено условие  $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, I}$ , где  $\lambda_i$  – множители Лагранжа, определяемые по формуле

$$(F^h)^T \lambda = e_{3N+1},$$

то  $u^h$  – искомое решение.

Шаг 2. Расчет допустимого направления поиска  $p^h$ . Если при некотором  $s \in I, \lambda_s < 0$ , направление  $p^h$  есть  $s$ -й столбец матрицы  $(F^h)^{-1}$ .

Реализация данной схемы МПНД обладает рядом особенностей, учитывающих характер формирования области допустимых решений задачи (14).

#### 4.1. Особенности определения направления поиска $p^h$

**Пример 1.** Пусть имеется объект  $R_1$  с вершинами  $\{(-5,3), (-3,-3), (2,1)\}$  и полоса  $R_0, W = 10$ . Начальная точка  $u^0 = (x_1^0, y_1^0, \varphi_1^0, z_1^0) = (5, 3, 0, 7)$  (объект  $R_1^1$  и его полюс  $\Pi_1$  на рис. 2). Положим  $u^0 \in D_{q_1}^L$ . Система  $F^0 u = b$ , задающая точку  $u^0$  (рабочий список), и система  $F_{q_1} u \geq b_{q_1}$ , описывающая выпуклое многогранное множество  $D_{q_1}^L$  (рассматривается ослабленная задача без части ограничений, не нарушаемых в точке  $u^0$ ), имеют соответственно вид:

$$F_{q_1} u^0 = b_{q_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3, 3\varphi_1 = 5, \\ y_1 + 3, 18\varphi_1 = 3, \\ \varphi_1 = 0, \\ -x_1 - 0, 88\varphi_1 + z_1 = 2, \end{cases}$$

$$F_{q_1} u = b_{q_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3, 3\varphi_1 \geq 5, \\ y_1 + 3, 18\varphi_1 \geq 3, \\ \varphi_1 \geq 0, \\ -x_1 - 0, 88\varphi_1 + z_1 \geq 2, \\ -\varphi_1 \geq 0, 12. \end{cases} \tag{16}$$

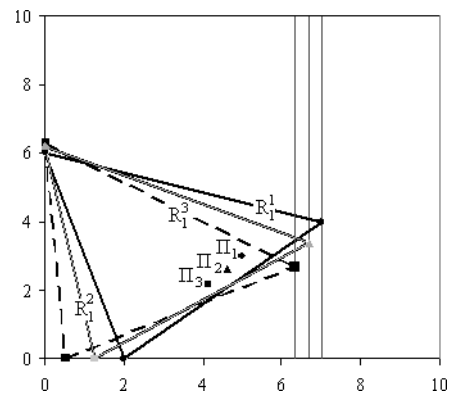


Рис. 2. Иллюстрация примера 1

Вектор множителей Лагранжа, вычисляемый как решение системы  $(\bar{F}^0)^T \lambda = c$  (формула 9):  $\lambda = (1; 0; -2,42; 1)$ . Таким образом, из системы  $F^0 u = b$  исключается третье уравнение. Вектор направления движения  $p$  для системы  $F^0 u = b$ , вычисленный по формуле (10), имеет вид:  $p = (-3,3; -3,18; 1; -2,42)$ . На рис. 2 приведены результаты двух следующих итераций:  $R_1^2: u^1 = (4,604; 2,6184; 0,12; 6,7096)$  и  $R_1^3: u^2 = (4,136; 2,1936; 0,24; 6,3184)$ .

**Замечание 1.** Согласно Свойствам 2, 4 точка  $u^1$  является единственной смежной вершиной областей  $D_{q_1}^L$  и  $D_{q_2}^L$ , а вершина  $u^2 \in D_{q_2}^L \cap D_{q_3}^L$  (при этом угол  $\varphi_1 > 0$ ). Согласно (11) системе неравенств  $F_{q_i} u \geq b_{q_i}$ , задающие области  $D_{q_i}^L$ ,  $i = 2,3$ , имеют вид:

$$F_{q_2} u \geq b_{q_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3,9\varphi_1 \geq 5,07, \\ y_1 + 3,54\varphi_1 \geq 3,04, \\ \varphi_1 \geq 0,12, \\ -x_1 - 0,64\varphi_1 + z_1 \geq 2,029, \end{cases}$$

$$F_{q_3} u \geq b_{q_3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4,5\varphi_1 \geq 5,22, \\ y_1 + 3,9\varphi_1 \geq 3,13, \\ \varphi_1 \geq 0,24, \\ -x_1 - 0,4\varphi_1 + z_1 \geq 2,09, \\ -\varphi_1 \geq 0,3. \end{cases} \quad (17)$$

**Замечание 2.** Согласно Свойствам 2, 4 точка  $u^0$  является единственной смежной вершиной областей  $D_{q_1}^L$  и  $D_{q_4}^L$ , где коэффициенты системы ограничений  $F_{q_4} u \geq b_{q_4}$  множества  $D_{q_4}^L$  есть функции отрицательного угла поворота  $\varphi_1$  (табл. 1):

$$F_{q_4} u = b_{q_4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2,7\varphi_1 = 5, \\ y_1 + 2,82\varphi_1 = 3, \\ -\varphi_1 = 0, \\ -x_1 - 1,12\varphi_1 + z_1 = 2, \end{cases}$$

$$F_{q_4} u \geq b_{q_4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2,7\varphi_1 \geq 5, \\ y_1 + 2,82\varphi_1 \geq 3, \\ -\varphi_1 \geq 0, \\ -x_1 - 1,12\varphi_1 + z_1 \geq 2. \end{cases}$$

Очевидно, в общем случае заранее неизвестно, какая из областей  $-D_{q_1}^L$  или  $D_{q_4}^L$  является перспективной для дальнейшего спуска. Поэтому задача определения направления движения  $p$  предполагает проверку знаков множителей Лагранжа как для ограничений рабочего списка  $F_{q_4} u = b_{q_4}$  (для данной системы  $\lambda = (1; 0; 1,58; 1)$ ), так и для ограничений рабочего списка  $F_{q_1} u^v = b_{q_1}$ . Другими словами, задача предполагает наличие перебора вариантов, что нарушает концепцию направленного спуска. На рис. 3 представлены проекции ограничений областей  $D_{q_1}^L$  или  $D_{q_4}^L$  на плоскость  $X(Z)O\varphi$ . Ряды 1x (1z) и 2x (2z) соответствуют 1-му (4-му) ограничениям области  $D_{q_1}^L$  ( $D_{q_4}^L$ ). Ряд 5 соответствует границе области  $D_{q_1}^L$  (область  $D_{q_1}^L$  отмечена штриховкой вида  $\text{///}$ ).

**Утверждение 1.** Для определения направления движения в невыпуклой области  $D_{q_1}^L$  необходимо рассмотреть комплиментарную область  $D_{q_{\text{compl}}}^L$  (на рис. 3. область  $D_{q_1}^L$  отмечена штриховкой вида  $\text{///}$ ), которую формируют ограничения областей  $D_{q_1}^L$  и  $D_{q_4}^L$ , взятые с обратным знаком.

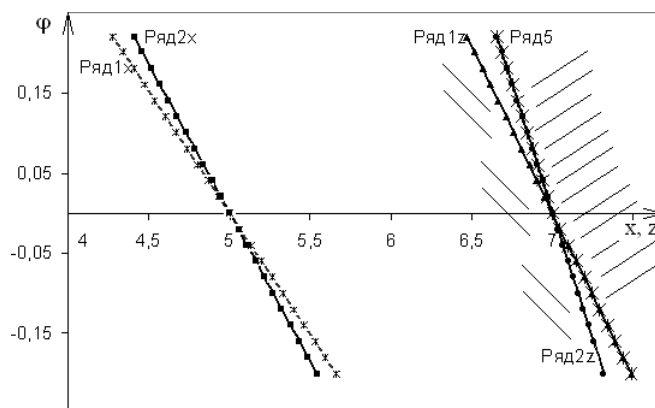


Рис. 3. Иллюстрация замечания 2

Доказательство Утверждения 1 непосредственно следует из факта осуществления спуска по границе области  $D_q^L$ , при этом  $FrD_q^L = D_{q\_compl}^L$  и свойства выпуклости области  $D_{q\_compl}^L$ .

**Замечание 3.** Во всех рассмотренных случаях Примера 1 аналитические описания соответствуют одним и тем же геометрическим ограничениям (условиям касания).

**4.2. Особенности проверки условий останова**

Алгоритм проверки свойства оптимальности текущего приближения  $u^h$  в силу Свойств 6, 7 и Замечания 2 включает следующие шаги.

Шаг 1. Выделение набора выпуклых множеств  $D_{q_r}^L, r = 1, 2, \dots, r_q$ , (Свойство 7), вершиной которых является точка  $u^h$  и организация их перебора,  $i$ -я итерация которого состоит из двух составляющих:

Шаг i1. Построение на каждом из множеств  $D_{q_r}^L$  двух систем уравнений, задающих данную точку  $u^h$ , при этом экзогенные коэффициенты систем уравнений вычисляются в зависимости от знака приращения углового параметра.

Шаг i2. Построение и проверка векторов множителей Лагранжа для двух систем уравнений, построенных на предыдущем шаге.

Шаг 2. Если для всех построенных систем наборы множителей Лагранжа содержат неотрицательные компоненты, то  $u^h$  – оптимальная точка.

**Пример 2.** На рис. 4 вектор  $u_3 = (4,136; 2,1936; 0,24; 6,3184)$ , определяющий положение объекта  $R_2^3$ , задается следующими системами уравнений:

$$Fu^{3+} = b^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1,72\varphi_1 = 4,06, \\ y_1 + 3,82\varphi_1 = 3,04, \\ -y_1 + 3,36\varphi_1 = -4,97, \\ -x_1 - 1,82\varphi_1 + z_1 = 3,04, \end{cases}$$

$$Fu^{3-} = b^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0,28\varphi_1 = 4,06, \\ y_1 + 3,36\varphi_1 = 3,04, \\ -y_1 + 2,64\varphi_1 = -4,97, \\ -x_1 - 2,18\varphi_1 + z_1 = 3,04. \end{cases}$$

Векторы множителей Лагранжа для систем  $Fu^{3+} = b^3$  и  $Fu^{3-} = b^3$  соответственно имеют вид:  $\lambda^+ = (1; 0,014; 0,014; 1)$ ,  $\lambda^- = (1; 0,31; 0,31; 1)$ . Следовательно, по критерию останова данная точка  $u_3$  является оптимальной.

**Пример 3.** Рассмотрим точку  $u^0$  для задачи размещения двух многоугольников (на рис. 5 соответствующее

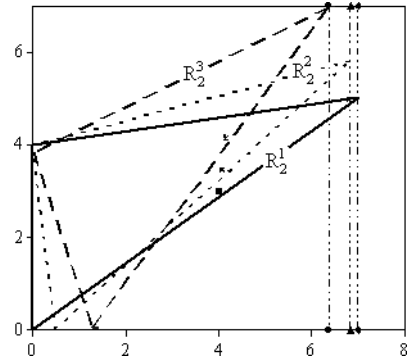


Рис. 4. Иллюстрация критерия останова

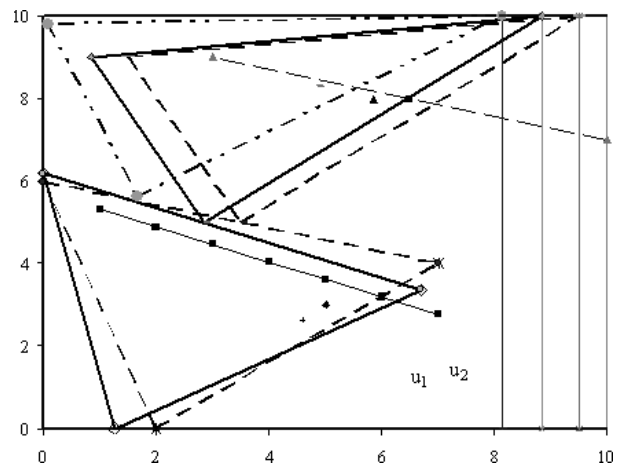


Рис. 5. Иллюстрация примера 3

положение многоугольников показано штриховой линией). Точка  $u^0 = (5; 3; 0; 6,5; 8; 0; 9,5)$  определяется системой вида:

$$\begin{cases} -2,07x_1 - 6,98y_1 - 13,63\varphi_1 + 2,07x_2 + 6,98y_2 + \\ \phantom{-2,07x_1 - 6,98y_1 - 13,63\varphi_1 + 2,07x_2 + 6,98y_2 +} + 16,37\varphi_2 = 38, \\ x_1 + 3,3\varphi_1 = 5, \\ y_1 + 3,18\varphi_1 = 3, \\ \varphi_1 = 0, \\ -x_2 + 1,82\varphi_2 + z = 3, \\ -y_2 + 3,12\varphi_2 = -8, \\ \varphi_2 = 0, \end{cases}$$

где коэффициенты первого ограничения рассчитаны по формуле (13).

Вектор множителей Лагранжа  $\lambda = (0,48; 1; 3,37; -7,44; 1; 3,37; -20,26)$  содержит два отрицательных множителя:  $\lambda_4$  и  $\lambda_7$ , следовательно, из системы можно исключить четвертое и седьмое уравнения.

Положим, исключается четвертое уравнение. Вектор  $p$  направления спуска имеет вид:  $p = (-3,3; -3,18;$

1; -7,43626; 0; 0; -7,43626). Простейший шаг в направлении  $p$  приводит в точку  $u^1 = (4,6; 2,62; 0,12; 5,85; 8; 0; 8,85)$  (рис. 5, сплошная линия), определяемую системой

$$\begin{cases} -2,83x_1 - 6,71y_1 - 10,39\varphi_1 + 2,83x_2 + 6,71y_2 + \\ \phantom{-2,83x_1 - 6,71y_1 - 10,39\varphi_1 + 2,83x_2 + 6,71y_2 +} + 11,76\varphi_2 = 38,39, \\ x_1 + 3,9\varphi_1 = 5,07, \\ y_1 + 3,54\varphi_1 = 3,03, \\ \varphi_1 = 0,12, \\ -x_2 + 1,82\varphi_2 + z = 3, \\ -y_2 + 3,12\varphi_2 = -8, \\ \varphi_2 = 0. \end{cases}$$

На рис. 5 штрихпунктирной линией показано положение 2-го многоугольника при выборе в качестве удерживающего 7-го уравнения и соответствующего направления спуска  $p = (0; 0; 0; -18,43; 3,12; 1; -20,25)$ .

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе проведено исследование оптимизационной задачи размещения многоугольных неориентированных объектов в полосе, рассматриваемой в линеаризованной постановке, и выделены дополнительные свойства линеаризованной области допустимых решений задачи. На этой базе разработан метод поиска локального минимума функции цели, основанный на использовании идеи активного набора, рассмотрена схема определения направления движения по границе компоненты связности линеаризованной области допустимых решений задачи. Приведены примеры реализации шагов алгоритма спуска. Изложенный материал является теоретическим базисом при разработке программного обеспечения процесса решения практических задач оптимизации размещения неориентированных многоугольных объектов, основанного на современном математическом инструментарии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. – К. : Наук. думка, 1986. – 268 с.
2. Гиренко К. А. Математична модель та метод розв'язання задачі розміщення неорієнтованих складених геометричних об'єктів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 01.05.02 «Математичне моделювання і обчислювальні методи» / К. А. Гиренко. – Харків, 2009. – 18 с.
3. Новожилова М. В. Методологія розв'язання оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування / Новожилова М. В. // Вісник Запорізького державного університету. – 1999. – № 1. – С. 56–60.
4. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. – М. : Мир, 1985. – 509 с.
5. Чуб И. А., Новожилова М. В. // Системи обробки інформації. – 2009. – Вып. 4 (78). – С. 160–163.

Надійшла 15.12.2009

Чуб І. А., Новожилова М. В.

### ВИЗНАЧЕННЯ НАПРЯМКУ СПУСКУ В ЛІНЕАРИЗОВАНІЙ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ НЕОРІЄНТОВАНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Проведено дослідження оптимізаційної задачі розміщення багатокутних неорієнтованих об'єктів у смуги, розглянутої в линеаризованій постановці. Виділено додаткові властивості області припустимих рішень, запропоновано схему методу пошуку локального мінімуму функції мети. Розглянуто схему визначення напрямку руху по межі компоненти зв'язності линеаризованої області припустимих рішень.

**Ключові слова:** розміщення неорієнтованих багатокутників, лінійна апроксимація, область припустимих рішень, локальний мінімум.

Chub I. A., Novozhilova M. V.

### DETERMINATION OF DESCENT DIRECTION IN LINEARIZED PROBLEM OF NON-ORIENTED GEOMETRIC OBJECTS ARRANGEMENT

The problem of non-oriented polygonal objects arrangement optimization is considered in the linearized formulation. Additional properties of the constraint region have been studied. The method of searching an objective local minimum is proposed. The scheme for determining a descent direction along the boundary of connectivity component of the linearized constraint region is described.

**Key words:** non-oriented polygons arrangement, linear approximation, constraint region, local minimum.