УДК 519.6

М.В. НОВОЖИЛОВА, И.А. ЧУБ, М.Н. МУРИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СЕТИ ПОСТАВОК В УСЛОВИЯХ БЮДЖЕТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрен метод оптимизации двухуровневой децентрализованной сети поставок товара в предположении, что на поведение производителей наложено бюджетное ограничение. Выделены условия, определяющие равновесное состояние рынка с учетом возможности получения производителями дополнительных инвестиций. Данная задача в общем случае является задачей многокритериальной оптимизации. Процесс оптимизации сводится к определению седловой точки функции Лагранжа, при этом на каждой итерации решения осуществляется модификация функции Лагранжа с учетом оценки величины необходимых кредитных средств. Проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: децентрализованная сеть поставок, бюджетное ограничение, функция Лагранжа.

ВВЕДЕНИЕ

Сеть поставок товара представляет собой модель взаимодействия различных агентов рынка: производителей товара и ритейлоров (розничных торговцев), причем каждый субъект экономических отношений стремится к максимизации своей прибыли, конкурируя или вступая в кооперацию с другими субъектами рынка [1]. Это достигается определением состояния равновесия данного рынка товаров. Поведение агентов рынка, взаимодействующих в рамках сети поставок, описывается такими основными функциями, как производственные функции, функции транзакционных издержек, спроса, прибыли. Задача определения равновесного состояния рынка представляет стратегический интерес для производителей товара при принятии решения об объемах выпуска в качестве основы осуществления прогноза реакции рынка на увеличение объемов поставок продукции, коррекцию ценовой политики, появление новых субъектов рынка и, следовательно, принятия инвестиционных решений. Сеть поставок является децентрализованной, если каждый агент рынка принимает решение о стратегии своего поведения самостоятельно. При этом необходимо принимать во внимание, что на любом этапе жизненного цикла рынка актуальной является задача привлечения производителями дополнительных финансовых ресурсов (оборотных средств) для обеспечения оптимального объема выпуска товара. Одним из возможных источников обеспечения необходимых средств может служить банковский кредит. Ставка кредита выступает параметром, влияющим на положение рыночного равновесия.

В настоящее время существует достаточно много научных публикаций по различным аспектам моделирования и решения задачи оптимизации сети поставок [2–8]. Основное внимание специалистов сосредоточено на подходах, развивающих оптимизационные методы решения подобных задач. В работах научной школы A. Nagurney [6, 7] предложены оптимизационные детерминированные и вероятностные модели двух- и трехуровневых сетей поставок с различными характеристиками спроса.

В исследованиях [2–8] необходимые условия оптимальности сформулированы в виде соответствующего вариационного неравенства, для решения которого разработано множество подходов [9, 10].

В работе [11] построен и реализован более простой и эффективный метод решения задачи оптимизации децентрализованной сети поставок в предположении о квадратичном (линейном) характере функций себестоимости, транзакционных издержек и спроса.

Цель настоящей статьи — построение и реализация методики решения задачи оптимизации двухуровневой децентрализованной сети поставок с учетом бюджетного ограничения на объем оборотных средств производителей и возможности привлечения дополнительных инвестиций.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Использовав обозначения из работы [8], составим математическую модель задачи оптимизации децентрализованной двухуровневой сети поставок (рис. 1). Вершины сети представляют два множества агентов рынка: производителей S_1, каждый из которых выпускает товар в количестве q_i, и ритейлоров — розничных торговцев S_2. Дугами сети показано направление движения товара по сети в количестве q_{ik}, $i \in S_1$, $i = 1, 2, \dots, I$, $k \in S_2$, $k = I+1, I+2, \dots, I+K$, $I = |S_1|$, $K = |S_2|$, $q_i = \sum_{k \in S_2} q_{ik}$.

В рассмотрение также введен вектор $Q_1 = (q_{1(I+1)}, \dots, q_{ik}, \dots, q_{|S_1||S_2|})$.

Пусть производственные затраты i-го производителя составляют $f_i(q_i)$, транзакционные затраты $c_{ik}(q_{ik})$ есть функции от q_{ik}, операционные издержки и функция спроса k-го ритейлора составляют соответственно $c_k(Q_1)$ и $d_k(\rho_k)$, $i \in S_1$, $k \in S_2$.

Свойство 1. Функции $f_i(q_i)$, $c_{ik}(q_{ik})$, $c_k(Q_1)$, $d_k(\rho_k)$ являются непрерывными, монотонно возрастающими, в общем случае нелинейными.

Как отмечалось в [11], на основе анализа специфики структурной идентификации функций $f_i(q_i)$, $c_{ik}(q_{ik})$, $c_k(Q_1)$, $d_k(\rho_k)$ как трендовых моделей по статистическим рядам данных, а также опираясь на концептуальное положение о соответствии между уровнями точности аналитической модели точности имеющихся статистических данных, можно сделать обоснованный вывод о достаточном уровне сложности формализации рассматриваемых характеристик реальной сети поставок. Тогда справедливо следующее допущение.

Допущение 1. Функции производственных затрат $f_i(q_i)$, транзакционных затрат $c_{ik}(q_{ik})$, операционных издержек $c_k(Q_1)$ и спроса $d_k(\rho_k)$, $i \in S_1$, $k \in S_2$, являются полиномами не выше второго порядка.

Свойство 2. Все субъекты децентрализованной сети поставок конкурируют таким образом, что каждый из них независимо от остальных пытается максимизировать свою прибыль по всей возможной номенклатуре товаров.

В таком случае оптимальные в сложившихся условиях внешней среды соотношения цены единицы товара и объема выпуска достигаются в точке равновесия рынка.

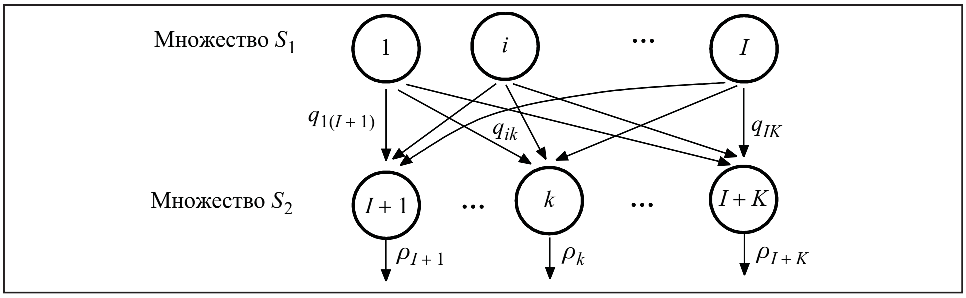

Рис. 1. Графическая модель двухуровневой сети поставок

Следовательно, функция дохода i-го производителя составляет $\sum_{k \in S_2} \rho_{ik}^* q_{ik}$, причем цена ρ_{ik}^* единицы товара, передаваемого i-м производителем k-му ритейлору, является равновесной, т.е. соответствует состоянию равновесия всей сети поставок. Таким образом, цена ρ_{ik}^* — экзогенная величина для i-го производителя.

Введем в рассмотрение бюджетное ограничение

$$f_i(q_i) \le F_i, \tag{1}$$

где F_i — стоимостная оценка ресурсного потенциала производителя. Обозначим $q_i^{F_i}$ количество товара, соответствующее предельным возможностям производителя, т.е. $f_i(q_i^{F_i}) = F_i$. Тогда задача максимизации прибыли i-го производителя имеет вид

$$\sum_{k \in S_2} \rho_{ik}^* q_{ik} - \left[f_i(q_i) + \sum_{k \in S_2} c_{ik}(q_{ik}) \right] \to \max \tag{2}$$

при условиях

$$\begin{cases} f_i(q_i) \le F_i, \\ q_{ik} \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ограничения $q_{ik} \ge 0$ считаем тривиальными и всюду далее учтенными неявно.

В свою очередь, задача максимизации прибыли k-го ритейлора имеет вид

$$\rho_k \sum_{i \in S_1} q_{ik} - \left[c_k(Q_1) + \sum_{i \in S_1} \rho_{ik}^* q_{ik} \right] \to \max \tag{4}$$

при условии

$$\sum_{i \in S_1} q_{ik} = d_k(\rho_k). \tag{5}$$

Свойство 3. Спрос $d_k(\rho_k)$ ограничен сверху некоторой заданной величиной $\bar{d}_k(\rho_k)$.

Изложим необходимые условия оптимальности первого порядка для задач (2), (3) и (4), (5). Проведем анализ постановки (2), (3) задачи максимизации прибыли i-го производителя. На рис. 2 представлена графическая интерпретация задачи (2), (3) в случае одного ритейлора на рынке, т.е. $K = 1$. Вертикальным штриховым линиям *1* и *2* соответствуют различные значения $q_i^{F_i(1)}$ и $q_i^{F_i(2)}$.

Положение *2* означает, что задача (2), (3) может быть решена как задача безусловной оптимизации. Другими словами, i-й производитель имеет достаточно ресурсов для выпуска оптимального количества продукции: $q_i^{eqi} < q_i^{F_i(2)}$.

В этом случае условия оптимальности первого порядка функции цели (2)

$$\frac{\partial}{\partial q_{ik}} \left\{ \sum_{k \in S_2} \rho_{ik}^* q_{ik} - \left[f_i(q_i) + \sum_{k \in S_2} c_{ik}(q_{ik}) \right] \right\} = 0 \tag{6}$$

представляют систему линейных (согласно допущению 1) уравнений вида

$$\rho_{ik}^* - \frac{\partial}{\partial q_{ik}} \{ f_i(q_i) + c_{ik}(q_{ik}) \} = 0, \ k \in S_2, \tag{7}$$

решение $(q_{i(I+1)}^{eqi}, \ldots, q_{i(I+K)}^{eqi})$ которой задает оптимальные величины выпуска продукции для i-го производителя.

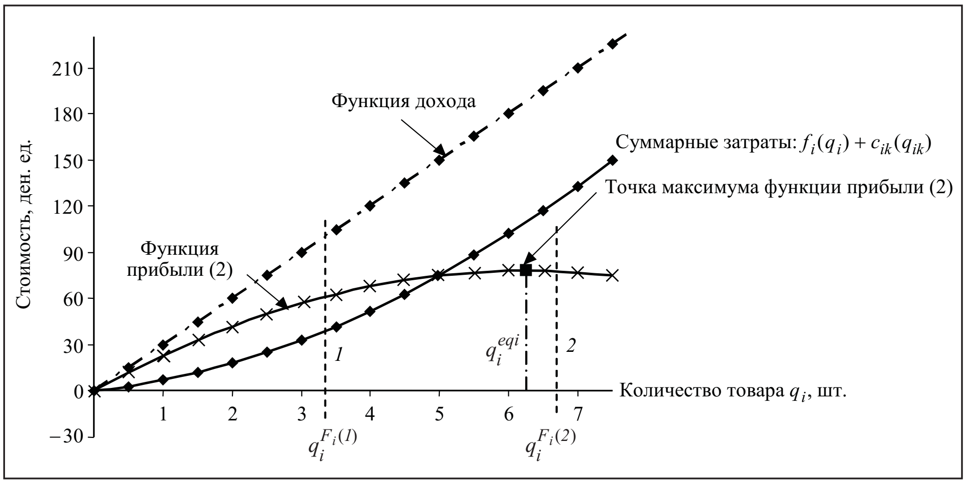

Рис. 2. Функции поведения *i*-го производителя

Из (7) непосредственно следует, что при $q_{ik} > 0$

$$\frac{\partial}{\partial q_{ik}} \{f_i(q_i) + c_{ik}(q_{ik})\} = \rho_{ik}^*. \tag{8}$$

В случае, если предельные издержки $\frac{\partial}{\partial q_{ik}} \{f_i(q_i) + c_{ik}(q_{ik})\}$ больше равновесной цены ρ_{ik}^*, *i*-й производитель не поставляет товар *k*-му ритейлору, т.е. $q_{ik} = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда ресурсный потенциал *i*-го производителя является недостаточным для производства количества товара $q_i^{eqi} = \sum_k q_{ik}^{eqi}$ (положение *1* на рис. 2). Таким образом, точка $(q_{i(I+1)}^{eqi}, \ldots, q_{i(I+K)}^{eqi})$ не является допустимой: $q_i^{eqi} > q_i^{F_i(1)}$, и ограничение (1) становится удерживающим. В этом случае вводится в рассмотрение невязка $\Delta q_i = \{f_i(q_i) - F_i\} > 0$ и задача (2), (3) становится задачей условной оптимизации с ограничениями типа равенства.

Если производитель принимает решение о выпуске количества $q_i^{F_i}$ товара, соответствующего его предельным возможностям, то общий объем выпуска падает и равновесные цены имеют тенденцию к увеличению, т.е. точка общего равновесия рынка смещается. Имеет место ситуация, когда предельные издержки $\frac{\partial}{\partial q_{ik}} \{f_i(q_i) + c_{ik}(q_{ik})\}$ становятся меньше равновесной цены ρ_{ik}^*. Тогда *i*-й производитель может рассмотреть возможность получения кредита для пополнения оборотных средств и выпуска продукции объема q_i^*, $q_i^{F_i} < q_i^* < q_i^{eqi}$.

Предположим, что планирование осуществляется на определенный период времени (год) и в конце периода планирования производитель должен возвратить сумму кредита и провести оплату за его использование. Таким образом, стоимость кредита определяется как

$$(1+r)\Delta(\hat{q}_i), \ \hat{q}_i = \sum_j \hat{q}_{ij} \ \text{ при } \ \hat{q}_{ij} = (q_i^* - q_i^{F_i}), \tag{9}$$

где r — процентная ставка. Тогда бюджетное ограничение (1) принимает вид

$$f_i(\hat{q}_{ik} + q_{ik}^{F_i}) = F_i + \Delta(\hat{q}_{ik}).$$

При этом функцию прибыли (2) i-го производителя можно записать так:

$$\sum_{k \in S_2} \rho_{ik}^* (\hat{q}_{ik} + q_{ik}^{F_i}) - \left[f_i (\hat{q}_i + q_i^{F_i}) + (1+r)\Delta(\hat{q}_i) + \sum_{k \in S_2} c_{ik} (\hat{q}_i + q_i^{F_i}) \right] \to \max. \quad (10)$$

Следовательно, оптимальный объем дополнительной продукции $\hat{q}_i^*$ определяется, исходя из необходимых условий максимума функции прибыли (10):

$$\rho_{ik}^* - \frac{\partial}{\partial \hat{q}_{ik}} [f_i (\hat{q}_i + q_i^{F_i}) + (1+r)\Delta(\hat{q}_i) + c_{ik} (\hat{q}_{ik} + q_i^{F_i})] = 0. \quad (11)$$

Согласно допущению 1 общий вид функции $f_i(q_i)$ имеет вид $f_i(q_i) = = aq_i^2 + bq_i + c$, где a, b, c — экзогенные параметры, определяемые характеристиками ресурсного потенциала предприятия. Тогда невязка определяется как

$$\Delta(\hat{q}_i) = a(\hat{q}_i + q_i^{F_i})^2 + b(\hat{q}_i + q_i^{F_i}) + c - a(q_i^{F_i})^2 - bq_i^{F_i} - c =$$
$$= a\hat{q}_i^2 + 2a\hat{q}_i q_i^{F_i} + b\hat{q}_i. \quad (12)$$

В случае, если функция производственных затрат линейна, имеем $\Delta(\hat{q}_i) = b\hat{q}_i$.

Пример 1. Предположим, что на рынке имеется один производитель, оценка ресурсных возможностей которого $F_1 = 20$, и один ритейлор: $q_1 = q_{12}$, $i = 1$, $k = 2$. Функции производственных и транзакционных затрат агентов рынка имеют вид $f_1(q_1) = q_{12}^2 + 3q_{12}$ и $c_{12}(q_{12}) = q_{12}^2 + 2q_{12}$ соответственно. Положим равновесную цену ρ_{12}^*, равной 40 денежным единицам.

Следуя (2), (3), выпишем оптимизационную задачу, исходя из примера:

$$\rho_{12}^* q_{12} - [(q_{12}^2 + 3q_{12}) + (q_{12}^2 + 2q_{12})] \to \max,$$

$$\begin{cases} q_{12}^2 + 3q_{12} \le 20, \\ q_{12} \ge 0. \end{cases}$$

Условия оптимальности первого порядка (6) без учета ограничения (1) здесь имеют вид

$$\rho_{12}^* - [(2q_{12} + 3) + (2q_{12} + 2)] = \rho_{12}^* - 4q_{12} - 5 = 0.$$

Следовательно, равновесное количество q_{12}^{eqi} без учета ограничения (1) составляет 8.75 единиц товара, значение функции прибыли — 153.125 денежных единиц (точка максимума на рис. 3). Однако значение q_{12}^{eqi} не удовлетворяет бюджетному ограничению $q_{12}^2 + 3q_{12} \le 20$.

Максимальное количество товара, которое (в условиях данного примера) производитель может выпустить самостоятельно: $q_1^{F_1} = 3.217$, прибыль производителя в этом случае составит 91.897 денежных единиц (на рис. 3 данная точка обозначена ромбом).

Рассмотрим возможность получения инвестиций. Не уменьшая общности рассуждений, составим функцию (10) прибыли при $r = 0$:

$$\rho_{12}^* (\hat{q}_{12} + 3.217) - [2(\hat{q}_{12} + 3.217)^2 + 5(\hat{q}_{12} + 3.217) + (\hat{q}_{12})^2 + 6.434\hat{q}_{12} + 3\hat{q}_{12}],$$

условия оптимальности первого порядка (11) которой

$$\rho_{12}^* - [4(\hat{q}_{12} + 3.217) + 5 + 2\hat{q}_{12} + 6.434 + 3] = \rho_{12}^* - [6\hat{q}_{12} + 27.32] = 0$$

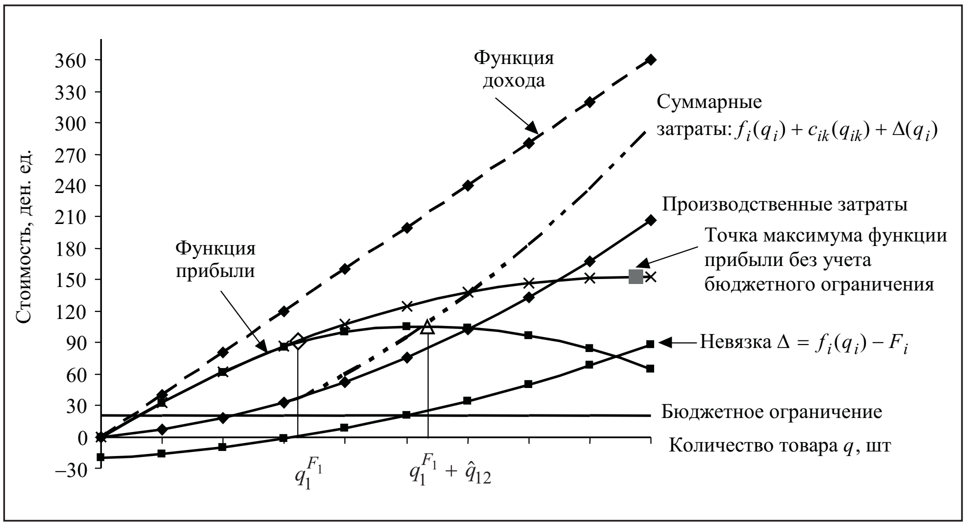

Рис. 3. График оценки объема необходимых инвестиций

позволяют получить величину $\hat{q}_{12} = 2.116$. Следовательно, оптимальный объем выпуска с учетом кредита составляет $q_1^* = 5.33$, прибыль — 105.33 ден. ед., величина инвестиций (уже учтенная в затратах) — 24.44 ден. ед.

Рассмотрим задачу определения равновесного состояния двухуровневой децентрализованной цели поставок в целом.

Задача (4), (5) максимизации прибыли k-го ритейлора также представляет задачу нелинейной оптимизации с одним ограничением-равенством, причем вектор равновесных цен $(\rho_{1k}^*, \rho_{2k}^*, \ldots, \rho_{Ik}^*)$ является экзогенным. Соответствующая задаче (4), (5) функция Лагранжа $L(\delta_k, q_{ik}, \rho_k)$:

$$L(\delta_k, q_{ik}, \rho_k) = \rho_k \sum_{i \in S_1} q_{ik} - \left[c_k(q_k) + \sum_{i \in S_1} \rho_{ik}^* q_{ik} \right] - \delta_k \left(\sum_{i \in S_1} q_{ik} - d_k(\rho_k) \right), \quad (13)$$

где δ_k — множитель Лагранжа, генерирует необходимые условия максимума функции прибыли k-го ритейлора в виде системы уравнений

$$\frac{\partial L(\delta_k, q_{ik}, \rho_k)}{\partial q_{ik}} = \rho_k - \left(\frac{\partial c_k}{\partial q_{ik}} + \rho_{ik}^* \right) - \delta_k = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L(\delta_k, q_{ik}, \rho_k)}{\partial \rho_k} = \sum_{i \in S_1} q_{ik} + \delta_k \frac{\partial d_k(\rho_k)}{\partial \rho_k} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L(\delta_k, q_{ik}, \rho_k)}{\partial \delta_k} = \sum_{i \in S_1} q_{ik} - d_k(\rho_k) = 0, \; k = I+1, I+2, \ldots, I+K. \quad (16)$$

Для определения условий равновесия децентрализованной сети поставок в целом необходимо рассмотреть систему уравнений (7), (14)–(16), получаемую согласно условиям оптимальности первого порядка функций прибыли (2), (6). Решением задачи оптимизации сети поставок являются характеристики положения равновесия рынка: равновесные цены ρ_{ik}^*, равновесные количества товаров, а также вектор цен ρ_k^* ритейлоров.

Предлагаемый метод решения представим поэтапно следующим образом.

Этап 1. Положим, производители обладают достаточным ресурсным потенциалом F_i для выпуска оптимального количества товара, т.е. (2) является задачей безусловной оптимизации. Тогда вектор

$$Q^{eqi} = (q^{eqi}_{1(I+1)}, \dots, q^{eqi}_{ik}, \dots, q^{eqi}_{|S_1||S_2|}, \rho^{eqi}_{1(I+1)}, \dots, \rho^{eqi}_{ik}, \dots, \rho^{eqi}_{|S_1||S_2|}, \rho^{eqi}_{I+1}, \dots, \rho^{eqi}_{I+K},$$

$$\delta_{I+1}, \dots, \delta_{I+K})$$

соответствующего объема выпуска товаров, равновесных цен и цен ритейлоров есть решение системы $A^{\text{reduce}}Q = 0$ уравнений (7), (14)–(16).

Размерность матрицы коэффициентов A^{reduce} для всей сети поставок соответствует величине

$$N = 2K(I+1). \tag{17}$$

Если монотонно убывающие функции спроса являются полиномами второго порядка, то согласно методике линеаризации, изложенной в работах [12, 13], процесс решения полученной нелинейной системы $A^{\text{reduce}}Q = 0$ представляет решение последовательности линейных систем уравнений $A^{\text{reduce}}_n Q_n = 0,\ n = 0, 1, \dots$ Для этого на каждом шаге приближения функция спроса $d_k(\rho_k)$ представляется некоторой линейной аппроксимацией $d^{\text{lin}}_k(\rho_k)$ с использованием свойства 3. Если функции спроса линейны, достаточно однократного обращения матрицы A^{reduce}.

Этап 2. Пусть для некоторого $i = \vartheta,\ \vartheta \in S_1$, бюджетное ограничение (1) не выполняется. Тогда задача (2), (3) для производителя ϑ представляет задачу условной оптимизации. Отметим, что уменьшение выпуска продукции одного производителя сдвигает точку равновесия и приводит в общем случае к увеличению выпуска других производителей: $\{q^{F_i}_i + \theta_i\},\ i \in S_1 / \vartheta$, т.е. к потенциальной возможности нарушения их бюджетных ограничений. Всестороннее изучение этого вопроса представляет особый интерес и вызывает необходимость рассмотрения данной проблемы, как задачи многокритериальной оптимизации. Без потери общности ограничимся случаем, когда запас оборотных средств остальных производителей позволяет осуществить такое увеличение: $f_i(q^{F_i}_i + \theta_i) \le F_i$, $i = 1, 2, \dots, I / \vartheta$. Тогда этап 2 включает следующие шаги.

Шаг 1. Определение вектора

$$Q^{F_\vartheta} = (q^{F_\vartheta}_{1(I+1)}, \dots, q^{F_\vartheta}_{ik}, \dots, q^{F_\vartheta}_{|S_1||S_2|}, \rho^{F_\vartheta}_{1(I+1)}, \dots, \rho^{F_\vartheta}_{ik}, \dots, \rho^{F_\vartheta}_{|S_1||S_2|},$$

$$\rho^{F_\vartheta}_{I+1}, \dots, \rho^{F_\vartheta}_{I+K}, \delta_{I+1}, \dots, \delta_{I+K})$$

значений как решение задачи поиска равновесного состояния рынка вида

$$\sum_{k \in S_2} \rho^*_{\vartheta k} q_{\vartheta k} - \left[f_\vartheta(q_\vartheta) + \sum_{k \in S_2} c_{\vartheta k}(q_{\vartheta k}) \right] \to \max \tag{18}$$

при ограничении $f_\vartheta(q_\vartheta) = F_\vartheta$.

Условия оптимальности первого порядка функции цели (18) основаны на построении функции Лагранжа

$$L(\lambda, q_{\vartheta k}) = \sum_{k \in S_2} \rho^*_{\vartheta k} q_{\vartheta k} - \left[f_\vartheta(q_\vartheta) + \sum_{k \in S_2} c_{\vartheta k}(q_{\vartheta k}) \right] - \lambda (f_\vartheta(q_\vartheta) - F_\vartheta),$$

где λ — множитель Лагранжа, и записываются системой уравнений вида

$$\frac{\partial L(\lambda, q_{\vartheta k})}{\partial q_{\vartheta k}} = \rho^*_{\vartheta k} - \frac{\partial}{\partial q_{\vartheta k}} [(1+\lambda) f_\vartheta (q_{\vartheta k}) + c_{\vartheta k}(q_{\vartheta k})] = 0, \ \ k \in S_2, \tag{19}$$

$$\frac{\partial L(\lambda, q_{\vartheta k})}{\partial \lambda} = f_\vartheta (q_{\vartheta k}) - F_\vartheta = 0. \tag{20}$$

Таким образом, с учетом условий (14)–(16) формируется система уравнений $A^{F_\vartheta} Q = 0$ такая, что уравнение вида (20) — нелинейно.

Очевидно, что множитель $\lambda > 0$, поэтому систему $A^{F_\vartheta} Q = 0$ можно решить численно, положив λ параметром, пробегающим некоторый ряд положительных значений.

Шаг 2. Определение вектора

$$\hat{Q} = (q_{1(I+1)}, \ldots, \hat{q}_{\vartheta(I+1)}, \hat{q}_{\vartheta(I+2)}, \ldots, \hat{q}_{\vartheta(I+K)}, \ldots, q_{|S_1||S_2|},$$
$$\rho^*_{1(I+1)}, \ldots, \rho^*_{|S_1||S_2|}, \rho^*_{I+1}, \ldots, \rho^*_{I+K}, \delta_{I+1}, \ldots, \delta_{I+K}),$$

где величины $\hat{q}_{\vartheta(I+1)}, \ldots, \hat{q}_{\vartheta(I+K)}$ задают дополнительное количество продукции, подлежащей выпуску ϑ-м производителем за счет привлечения инвестиционных ресурсов.

На этом шаге задача (2), (3) для ϑ-го производителя преобразуется к виду (10). В свою очередь, задача (4), (5) максимизации прибыли k-го ритейлора формулируется следующим образом:

$$\rho_k \left\{ \sum_{i \in S_1/\vartheta} q_{ik} + \hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k} \right\} - \left[c_k (Q_1 / q_{\vartheta k}, (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k})) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i \in S_1/\vartheta} \rho^*_{ik} q_{ik} + \rho^*_{\vartheta k} (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}) \right] \to \max \tag{21}$$

при условии

$$\sum_{i \in S_1/\vartheta} q_{ik} + (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}) = d_k(\rho_k). \tag{22}$$

Запишем функцию Лагранжа для задачи (21), (22):

$$L(q_{ik}, \hat{q}_{\vartheta k}, \rho_k, \delta_k) = \rho_k \left\{ \sum_{i \in S_1/\vartheta} q_{ik} + (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}) \right\} - \left[c_k (Q_1 / q_{\vartheta k}, (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k})) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i \in S_1/\vartheta} \rho^*_{ik} q_{ik} + \rho^*_{\vartheta k} (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}) \right] - \delta_k \left(\sum_{i \in S_1/\vartheta} q_{ik} + (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}) - d_k(\rho_k) \right).$$

Тогда условия оптимальности первого порядка функции прибыли k-го ритейлора имеют вид

$$\frac{\partial L(q_{ik}, \hat{q}_{\vartheta k}, \rho_k, \delta_k)}{\partial \hat{q}_{\vartheta k}} = \rho_k - \frac{\partial}{\partial \hat{q}_{\vartheta k}} [c_k (Q_1 / q_{\vartheta k}, (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}))] - \rho^*_{\vartheta k} - \delta_k = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial L(q_{ik}, \hat{q}_\vartheta, \rho_k, \delta_k)}{\partial \rho_k} = \left\{ \sum_{i \in S_1/\vartheta} q_{ik} + (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}) \right\} + \delta_k \frac{\partial d_k(\rho_k)}{\partial \rho_k} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial L(\delta_k, q_{ik}, \rho_k)}{\partial \delta_k} = \sum_{i \in S_1/\vartheta} q_{ik} + (\hat{q}_{\vartheta k} + q^{F_i}_{\vartheta k}) - d_k(\rho_k) = 0. \tag{25}$$

Таким образом, на основе условий оптимальности (11), (23)–(25) формируется система уравнений $A^{\text{fin}}\hat{Q}=0$, решением которой является вектор $\hat{Q}$ равновесных цен и соответствующего объема выпуска товара.

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимизации двухзвенной сети поставок с параметрами $S_1=\{1,2,3\}$ и $S_2=\{4,5,6\}$.

Функции $f_i(q_i)$ стоимости производства имеют вид

$$f_1(q_1)=(q_{14}+q_{15}+q_{16})^2+3(q_{14}+q_{15}+q_{16})+10;$$

$$f_2(q_2)=(q_{24}+q_{25}+q_{26})^2+2(q_{24}+q_{25}+q_{26})+8;$$

$$f_3(q_3)=(q_{34}+q_{35}+q_{36})^2+(q_{34}+q_{35}+q_{36})+7.$$

Представим функции транзакционных $c_{ik}(q_{ik})$ и операционных $c_k(q_k)$ издержек:

$$c_{ik}(q_{ik})=q_{ik}^2+0.5q_{ik},\ c_k(q_k)=0.5q_k,$$

где $q_k=q_{1k}+q_{2k}+q_{3k}$, $k=4,5,6$.

Функции спроса ритейлоров являются линейными и имеют вид

$$d_4(\rho_4)=-3\rho_4+1500;\ d_5(\rho_5)=-3\rho_5+1200;\ d_6(\rho_6)=-2\rho_6+1000.$$

Вектор бюджетных ограничений определяется как $F=(5555, 17900, 18000)$.

Выполнение этапа 1 дает следующие результаты решения задачи оптимизации сети поставок без учета бюджетного ограничения:

- равновесные количества товара:

$$(q_{14}^{eqi},\ q_{15}^{eqi},\ q_{16}^{eqi},\ q_{24}^{eqi},\ q_{25}^{eqi},\ q_{26}^{eqi},\ q_{34}^{eqi},\ q_{35}^{eqi},\ q_{36}^{eqi})=$$

$$=(53.4,\ 31.2,\ 43.7,\ 53.4,\ 31.2,\ 43.7,\ 53.4,\ 31.2,\ 43.7);$$

- равновесные цены:

$$(\rho_{14}^{eqi},\ \rho_{15}^{eqi},\ \rho_{16}^{eqi},\ \rho_{24}^{eqi},\ \rho_{25}^{eqi},\ \rho_{26}^{eqi},\ \rho_{34}^{eqi},\ \rho_{35}^{eqi},\ \rho_{36}^{eqi})=$$

$$=(366,\ 322,\ 347,\ 366,\ 322,\ 347,\ 366,\ 322,\ 347);$$

- цены ритейлоров $(\rho_4^{eqi},\ \rho_5^{eqi},\ \rho_6^{eqi})=(446.5,\ 434.3,\ 423.6)$;
- производственные затраты: $f_1(q_1)=16800$, $f_2(q_2)=16765$, $f_3(q_3)=16727$.

Таким образом, решение задачи безусловной оптимизации децентрализованной цепочки поставок нарушает бюджетное ограничение первого производителя, при этом невязка $\Delta_1=-11249$. Значения основных функций производителей представлены в табл. 1.

На шаге 1 в результате формирования и решения системы $A^{F_1}Q=0$ получаем вектор Q^{F_1}. Его компоненты удовлетворяют бюджетному ограничению и имеют следующие показатели:

- равновесные количества товара:

$$(q_{14}^{F_1},\ q_{15}^{F_1},\ q_{16}^{F_1},\ q_{24}^{F_1},\ q_{25}^{F_1},\ q_{26}^{F_1},\ q_{34}^{F_1},\ q_{35}^{F_1},\ q_{36}^{F_1})=$$

$$=(34.6,\ 12.4,\ 25.9,\ 54.6,\ 32.4,\ 45.9,\ 54.6,\ 32.4,\ 45.9),$$

- равновесные цены:

$$(\rho_{14}^{F_1},\ \rho_{15}^{F_1},\ \rho_{16}^{F_1},\ \rho_{24}^{F_1},\ \rho_{25}^{F_1},\ \rho_{26}^{F_1},\ \rho_{34}^{F_1},\ \rho_{35}^{F_1},\ \rho_{36}^{F_1})=$$

$$=(386,\ 342,\ 369,\ 376,\ 332,\ 359,\ 376,\ 332,\ 359),$$

Таблица 1

Этапы метода решения		Функции	Значения функций производителей		
			1	2	3
Этап 1		Доход	44777	44777	44777
		Прибыль	22117	22220	22362
		Невязка Δ бюджетного ограничения	**−11249**	1134	1273
Этап 2	Шаг 1	Доход	27225	47790	47790
		Прибыль	19607	41600	41600
		Невязка Δ бюджетного ограничения	**0**	30	170
	Шаг 2	Доход	29539	47355	47473
		Прибыль	20357	41234	41234
		Невязка Δ бюджетного ограничения	**0**	170	309

- цены ритейлоров $(\rho_4^{F_1},\ \rho_5^{F_1},\ \rho_6^{F_1}) = (452,\ 374.3,\ 441.2)$,
- производственные затраты: $f_1(q_1)=5555, f_2(q_2)=17870, f_3(q_3)=17830$.

При этом значение множителя Лагранжа составляет $\lambda = 1.125$.

Отметим, что объем выпуска и, следовательно, прибыль первого производителя уменьшаются, соответственно эти же показатели остальных производителей существенно увеличиваются. Значения основных функций производителей представлены в табл. 1.

На шаге 2 метода решения определяется величина инвестиционных средств объемом $\Delta(\hat{q}_1)$, обеспечивающих оптимальные значения объема выпуска ϑ-го производителя в сложившихся условиях функционирования рынка, а также соответствующие рыночные цены на товар. Формируется матрица $A^{\text{fin}}\hat{Q}=0$. В результате обращения матрицы A^{fin} получен вектор дополнительных объемов производства $(\hat{q}_{14}, \hat{q}_{15}, \hat{q}_{16}) = (4.1; 0.3; 2.4)$.

В результате решения задачи оптимизации с учетом бюджетного ограничения получаем

- равновесные количества товара:

$$(q_{14}^*,\ q_{15}^*,\ q_{16}^*,\ q_{24}^*,\ q_{25}^*,\ q_{26}^*,\ q_{34}^*,\ q_{35}^*,\ q_{36}^*) =$$
$$= (38.7,\ 12.7,\ 28.4,\ 54.1,\ 32.5,\ 45.5,\ 54.2,\ 32.5,\ 45.5);$$

- равновесные цены:

$$(\rho_{14}^*,\ \rho_{15}^*,\ \rho_{16}^*,\ \rho_{24}^*,\ \rho_{25}^*,\ \rho_{26}^*,\ \rho_{34}^*,\ \rho_{35}^*,\ \rho_{36}^*) =$$
$$= (382,\ 342,\ 366,\ 375,\ 332,\ 358,\ 375,\ 332,\ 358);$$

- цены ритейлоров $(\rho_4^*,\ \rho_5^*,\ \rho_6^*) = (451,\ 374,\ 440)$;
- производственные затраты: $f_1(q_1)=5555, f_2(q_2)=17730, f_3(q_3)=17690$.

Таким образом, дополнительные инвестиционные ресурсы объемом $\Delta(\hat{q}_1) = 77.74$ ден. ед. (уже учтенные в затратах) позволяют увеличить прибыль ϑ-го производителя на 750 ден. ед.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложены системный подход к построению математической модели и метод решения задачи оптимизации децентрализованной цепи поставок с учетом бюджетных ограничений производителей. Построены соответствующие функции Лагранжа, обеспечивающие реализацию условий оптимальности первого порядка функций прибыли агентов рынка.

Предложенные инструментальные средства моделирования при достаточно общих предположениях о структуре функций, описывающих поведение агентов рынка, обеспечивают решение широкого класса практических приложений и могут найти применение как на этапе стратегического, так и на этапе оперативного планирования. Рассматриваемый подход может быть обобщен на случай, когда производители имеют номенклатуру товаров, причем данная методика может быть использована для оптимизации характеристик рынков различных товаров и услуг, в том числе рынка углеводородов [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee L., Billington C. Material management in decentralized supply chains // Operations Research. — 1993. — **41.** — P. 835–847.
2. Chen D., Turner S.J., Cai W., Xiong M. A decoupled federate architecture for high level architecture-based distributed simulation // Journal of Parallel and Distributed Computing. — 2008. — **68.** — P. 1487–1503.
3. Walsh W.E., Wellman M.P. Decentralized supply chain formation: A market protocol and competitive equilibrium analysis // Journal of Artificial Intelligence Research. — 2003. — **19.** — P. 513–567.
4. Bousqueta F., Le Page C. Multi-agent simulations and ecosystem management: a review // Ecological Modelling. — 2004. — **176**, N 3–4. — P. 313–332.
5. Nagurney A., Dong J., Zhang D. A supply chain network equilibrium model // Transportation Research. Part E. — 2002. — **38**, N 5. — P. 281–303.
6. Nagurney A., Dong J., Zhang D. Supply chain network equilibrium model with random demands // European Journal of Operational Research. — 2004. — **156.** — P. 194–212.
7. Nagurney A., Toyasaki F. Supply chain supernetworks and environmental criteria // Transportation Research. Part D. — 2003. — **8**, N 3. — P. 185–213.
8. Hsueh Che-Fu, Mei-Shiang Chang. Equilibrium analysis and corporate social responsibility for supply chain integration // European Journal of Operational Research. — 2008. — **190.** — P. 116–129.
9. Marcotte P. Application of Khobotovs algorithm to variational inequalities and network equilibrium problems // INFOR. — 1991. — **29**, N 4. — P. 258–270.
10. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 316 p.
11. Новожилова М.В., Штань И.В. Решение детерминированной задачи оптимизации трехуровневой сети поставок одного товара // АСУ и приборы автоматики. — 2014. — № 167. — С. 55–59.
12. Чуб И.А., Иванилов А.С., Новожилова М.В. Постановка и решение оптимизационной динамической задачи управления ограниченными ресурсами проекта // Проблемы машиностроения. — 2010. — **4**, № 2. — С. 79–84.
13. Новожилова М.В., Мурин М.Н., Чуб И.А. Оптимизационная задача распределения ограниченных ресурсов проекта с сепарабельными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 4. — С. 74–88.
14. Кирик Е.Е., Яковлева А.П. Комплексные оптимизационные модели и задачи добычи, распределения и хранения газа // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — **50**, № 3. — С. 137–144.

Поступила 16.03.2015