

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ**

**В.М. Комяк, А.А. Лісняк, О.М. Соболев, В.О. Собина**

**ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ  
ОБЛАСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИМИ  
ОБ'ЄКТАМИ ЗІ ЗМІННИМИ  
МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

*Монографія*

**Харків 2013**

Друкується за рішенням  
вченої ради НУЦЗУ  
Протокол від 21.11.13 № 2

**Рецензенти:**

доктор технічних наук, професор О.Є. Басманов,  
доктор технічних наук, професор В.М. Шатохін,

УДК 514.18

Оптимізація покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками: монографія / Комяк В.М., Лісняк А.А., Соболев О.М., Собина В.О. – Х.: НУЦЗУ, КП "Міська друкарня", 2013. – 136 с.

ISBN

Робота присвячена розробці методу та способів оптимізаційного покриття заданих областей у просторі  $R^2$  геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Розроблено підхід до побудови класу  $\omega$ -функцій для геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками. Введено поняття та створено спосіб комп'ютерного моделювання  $\omega$ -поверхонь. Розроблено загальну математичну модель, методи та способи оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Наведено результати комп'ютерного моделювання оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Призначено для наукових працівників та аспірантів у галузі прикладної геометрії, а також слухачів вищих навчальних закладів, що вивчають методи геометричної оптимізації.

Іл. 96. Бібліогр.: 146 назв.

© В.М. Комяк, А.А. Лісняк,  
О.М. Соболев, В.О. Собина, 2013  
© НУЦЗУ, 2013

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	5
<b>Розділ 1. Огляд методів геометричного моделювання об'єктів і процесів</b> .....	8
1.1. Методи Геометричного моделювання об'єктів та процесів: сучасний стан та можливості застосування для розв'язання класу задач оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	8
1.2. Огляд класу задач оптимізаційного геометричного проектування та методів їх розв'язання.....	13
1.3. класифікація задач оптимізаційного геометричного проектування .....	22
<b>Розділ 2. Постановка та формалізація обмежень задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками</b> .....	26
2.1. Постановка задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	26
2.2. Формалізація обмежень в задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	37
2.3. Побудова $\Omega$ -поверхонь в задачах оптимізаційного покриття геометричних об'єктів.....	52
<b>Розділ 3. модель та метод оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками</b> .....	59
3.1. Загальна модель оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	59
3.2. Область припустимих розв'язків та аналіз особливостей задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	67
3.3. Метод Оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	74

3.3.1. Метод оптимізаційного покриття однозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками.....	75
3.3.2. Спосіб оптимізаційного покриття однозв'язної області колами змінного радіуса, колами та багатокутниками зі змінними метричними характеристиками.....	80
3.3.3. Спосіб оптимізаційного покриття багатозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками.....	83
3.3.4. Спосіб оптимізаційного покриття багатозв'язної області колами змінного радіуса, колами та багатокутниками зі змінними метричними характеристиками.....	85
3.3.5. Спосіб оптимізаційного покриття багатозв'язної області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, початки локальних систем координат яких розміщуються на фіксованих місцях.....	88
3.3.6. Спосіб оптимізаційного покриття ланок ломаних ліній, що належать неопуклому багатокутнику, геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	92
<b>Розділ 4. Комп'ютерне моделювання оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....</b>	<b>96</b>
4.1. Комп'ютерне моделювання оптимізаційного покриття однозв'язних та багатозв'язних багатокутників геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	96
4.2. Комп'ютерне моделювання оптимізаційного покриття ланок ломаних ліній геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.....	107
4.3. Комп'ютерне моделювання раціонального покриття об'єктів (ділянок) залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів.....	112
<b>Висновки.....</b>	<b>120</b>
<b>Література.....</b>	<b>122</b>



## ВСТУП

На теперішній час актуальною науково-прикладною задачею є розробка нових методів обробки та оптимізаційного перетворення складної геометричної інформації для її подальшого ефективного використання. Це обумовлено тим, що із перетворенням геометричної інформації пов'язані задачі з різних галузей діяльності людини, які мають важливе теоретичне та практичне значення: автоматизація процесів проектування різноманітних технічних систем та пристроїв, проектування карт розкрою промислових матеріалів, проектування машинних залів електростанцій, розробка генеральних планів та визначення варіантів компоновки будівель і споруд, нормування ресурсів служби цивільного захисту тощо. Слід зазначити, що вищенаведені задачі можуть бути зведеними у своїх постановках до задач оптимального розміщення, покриття та розбиття геометричних об'єктів, які, в свою чергу, відносяться до класу задач оптимізаційного геометричного проектування.

Незважаючи на величезну кількість досліджень стосовно розв'язання класу задач оптимізаційного геометричного проектування, існує ціла низка актуальних задач, до теперішнього часу не розв'язаних. Саме до таких відноситься задача раціонального покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками (на відміну від інших задач, де форма і розміри об'єктів покриття є заданими). Сутність даної задачі полягає у необхідності покриття заданих геометричних об'єктів (опуклі та неопуклі багатокутники), а також відрізків прямих, точок тощо мінімальною кількістю однозв'язних плоских об'єктів, метричні характеристики яких визначаються в процесі розв'язання задачі. Інакше кажучи, форма і розміри геометричних об'єктів покриття залежать від характеристик заданої області та визначаються з урахуванням місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття (задачі логістики, нормування ресурсів у різних галузях тощо).

Необхідно зазначити, що до теперішнього часу дана задача не була розв'язаною, що обумовлено її складністю, а саме, наявністю нелінійних обмежень та недостатнім ступенем формалізації. У зв'язку з цим, виникає необхідність у розробці методу геометричного моделювання раціонального покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Теоретичною базою досліджень є роботи вчених:

– з геометричного моделювання об'єктів і процесів: Ю.І. Бадаєва, В.Д. Борисенка, В.В. Ваніна, В.М. Верещаги, М.С. Гумена, О.Т. Дворецького, С.М. Ковальова, Ю.М. Ковальова, В.М. Корчинського, Л.М. Куценка, Є.В. Мартина, В.Є. Михайленка, В.М. Найдиша, А.В. Найдиша, В.С. Обухової, А.В. Павлова, С.Ф. Пилипаки, О.Л. Підгорного, А.М. Підкоритова, В.О. Плоского, Є.В. Пугачова, К.О. Сазонова, І.А. Скідана, А.Н. Хомченка, В.П. Юрчука та їх учнів;

– з геометричного проектування: М.І. Гіля, О.М. Кисельової, В.М. Комяк, Е.Г. Петрова, В.Л. Рвачова, Т.Є. Романової, Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева та їх учнів.

Структурно монографія складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури.

В *першому розділі* розглянуто існуючі методи геометричного моделювання об'єктів і процесів та можливість їх застосування для розв'язання класу задач оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Здійснено огляд класу задач оптимізаційного геометричного проектування та методів їх розв'язання. Розроблено класифікацію задач оптимізаційного геометричного проектування, що дозволила виявити перспективні напрямки наукових досліджень стосовно зазначеного класу задач.

В *другому розділі* визначено клас геометричних об'єктів, що може виступати у якості геометричних моделей реальних області та об'єктів покриття, досліджено питання побудови геометричних моделей області та об'єктів покриття. Здійснено теоретико-множинні постановки задач оптимізаційного покриття заданих областей плоскими геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Отримав подальшого розвитку підхід до побудови класу  $\omega$ -функцій для геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками. Введено поняття та розроблено спосіб комп'ютерного моделювання  $\omega$ -поверхонь в задачах оптимізаційного покриття геометричних об'єктів.

*Третій розділ* присвячено розробці загальної моделі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками та дослідженню її властивостей; геометричному моделюванню областей припустимих

розв'язків в задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками; розробці методу та способів оптимізаційного покриття заданих областей (однозв'язний та багатозв'язний неопуклий багатокутник, ланки ломаних ліній, що належать неопуклому багатокутнику) геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками (опуклі та не опуклі багатокутники, кола). Отримано оцінки складності розроблених методу та способів.

**Четвертий розділ** присвячено комп'ютерному моделюванню оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Розроблено алгоритмічне та програмне забезпечення, здійснено комп'ютерне моделювання для задач:

- оптимізаційного покриття однозв'язних та багатозв'язних багатокутників геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками;

- оптимізаційного покриття ланок ломаних ліній геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Одержано результат розв'язання актуальної практичної задачі, а саме, задачі раціонального покриття об'єктів (ділянок) залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів. На основі одержаних результатів зроблено рекомендації щодо підвищення ефективності захисту об'єктів залізниці в Харківській області від надзвичайних ситуацій різного характеру.

У **висновках** зазначено найбільш вагомі результати роботи, що мають наукове та практичне значення.

# РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД МЕТОДІВ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ І ПРОЦЕСІВ

## 1.1 Методи геометричного моделювання об'єктів та процесів: сучасний стан та можливості застосування для розв'язання класу задач оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

На сьогоднішній день розв'язання будь-яких наукових чи інженерних проблем практично неможливе без побудови та аналізу геометричних моделей об'єктів, процесів, тощо. Основна перевага саме таких моделей – адекватність і наочність, тобто створювана модель із заданою точністю відображає характерні риси об'єкта або процесу і, разом з тим, є максимально доступною під час досліджень.

Необхідно відзначити, що значні теоретичні досягнення та суттєві практичні результати в області геометричного моделювання отримано завдяки зусиллям таких провідних вчених, як Ю.І. Бадаєв, В.Д. Борисенко, В.В. Ванін, В.М. Верещага, М.С. Гумен, О.Т. Дворецький, С.М. Ковальов, Ю.М. Ковальов, В.М. Корчинський, Л.М. Куценко, Є.В. Мартин, В.Є. Михайленко, В.М. Найдиш, А.В. Найдиш, В.С. Обухова, А.В. Павлов, С.Ф. Пилипака, О.Л. Підгорний, А.М. Підкоритов, В.О. Плоский, Є.В. Пугачов, К.О. Сазонов, І.А. Скідан, А.Н. Хомченко, В.П. Юрчук та їх учнів, а також закордонних вчених таких, як Р. Безьє, У. Ньюмен, І. Фергюсон, Д. Роджерс, З. Кунс, Р. Різенфельд, А. Форрест, Е. Уачспресс та ін.

Так, роботи В.Є. Михайленка присвячено розробці методів прикладної геометрії для моделювання архітектурних конструкцій, наприклад [1,2], аналізу сучасного стану методів геометричного та комп'ютерного моделювання та напрямкам їх розвитку [3], аналізу загального стану прикладної геометрії в Україні [4], здобуткам і задачам Української асоціації з прикладної геометрії [5], еволюції змісту і значенню нарисної геометрії [6], загальному дискретному геометричному моделюванню [7] і т.д.

В роботі [8] розглянуті теоретичні та прикладні питання конструювання і моделювання кривих ліній та поверхонь на базі поняття

інтегральної моделі кривої; введено поняття оптимальної дискретизації кривих, розглянуті питання дискретного конструювання еквідистант.

В роботі [9] розглянуто задачу оптимального проектування форми оболонки розрахункового фрагмента водопідпірної споруди, тобто задачу, в якій необхідно вибрати такі параметри конструкції, що задовольняли б певним критеріям оптимальності. Розв'язання даної задачі можна здійснити за допомогою методів геометричної оптимізації в зв'язку з тим, що подібні задачі не мають загальної математичної формалізації.

Тобто в роботі [9] наведено ситуацію, характерну для багатьох задач геометричного моделювання, а саме, відсутність математичної формалізації.

Роботи [10,11] присвячено біонічними принципами енергозбереження в архітектурі та дизайні, а також науковим та методичним засадам формування курсу біодизайну.

Роботи С.М. Ковальова присвячено дискретному геометричному моделюванню поверхонь в просторових архітектурних конструкціях [1], основним напрямком розвитку дискретної прикладної геометрії кривих ліній та поверхонь [12,13] і т.д.

Так, в [12] наведені основні напрямки розвитку дискретної геометрії у київській геометричній школі протягом останніх двох десятиріч. Зазначено, що в основу досліджень покладено статико-геометричний спосіб подання дискретних сіток, що описують криву лінію або поверхню. Вказано, що подальший розвиток проблематики пов'язаний з дослідженням апроксимації, екстраполяції та оптимізації дискретно поданих геометричних об'єктів.

В [14] розглянуто метод утворення рівноланкової дискретно поданої кривої при заданому графіку залежності кривини кривої від її довжини дугами клотоїди з другим порядком гладкості. В [15] розглядається можливість керування дискретними параметрами дискретно визначеної кривої в задачах одновимірної інтерполяції з використанням кубічного поліному.

Роботу [16] присвячено питанням параметризації, при цьому зазначено, що параметричне число багатогранника з трикутними гранями, який не має метричних обмежень, дорівнює  $p = 3n_0$ , де  $n_0$  - кількість вершин. Але ця властивість не стосується багатогранників з довільними багатокутними гранями. Доведено, що число параметрів форми довільного багатогранника з довільною формою граней

(у тому числі із трикутними), який не має метричних обмежень, дорівнює числу його ребер.

В роботі [17] розглядається підрахунок параметрів симплексів  $m$ -просторів в  $n$ -просторах, а також доведено властивість рівності чисел параметрів форми і положення симплексу  $n$ -простору.

Роботи [16,17] є важливими для здійснення параметризації геометричних моделей об'єктів, що використовуються при розв'язанні задач оптимізаційного покриття.

Роботи Л.М. Куценка присвячено теоретичним основам та геометричному застосуванню методу А-відображень [20], застосуванню чотиримісних R-операцій для опису геометричних об'єктів [21], формоутворенню поверхонь [22], дослідженню нелінійних диференціальних рівнянь [23], геометричними властивостям гравітаційного більярду [24] тощо.

В роботі [25] наведено огляд дисертацій по прикладній геометрії, що виконані в харківському регіоні.

Роботи О.Л. Підгорного присвячено геометричному моделюванню просторових конструкцій в архітектурі [2,26], геометричному моделюванню явищ і процесів в розділах архітектурно-будівельної фізики (акустика, природне і штучне освітлення, інсоляція, геометричні питання надходження сонячної радіації на різні поверхні, енергозбереження тощо) [27-30].

В роботі [31] наведено результати та перспективи розвитку прикладної геометрії в архітектурно-будівельній галузі.

Наукові дослідження В.С. Обухової пов'язані з розвитком конструктивно-прикладної теорії нелінійних відображень. Так, в роботі [32] наведено проєктивний спосіб отримання подвійних ліній торсів 8-го порядку та його значення для розвитку дослідження торсів; роботу [33] присвячено торсовим поверхням з напрямним конусом 2-го порядку і т.д.

Роботу [34] присвячено перспективам розвитку прикладної геометрії алгебраїчних поверхонь вищих порядків.

Дослідження В.О. Плоского присвячено принципам системності в прикладній геометрії [35-39], тобто системності методів геометричного моделювання та геометричних моделей. Зазначено, що до принципових ознак системності відносяться [39]: теоретико-методологічна системність; організаційна системність; системність міжнаукової взаємодії; інструментальна системність; типологічна

системність; структурна системність; операційна системність; технологічна системність; ієрархічна системність; інтерпретаційна системність; системність раціонального вибору; системність в оцінці якості методів геометричного моделювання та/або геометричних моделей; системність аналізу об'єктів моделювання.

Також роботи професора В.О. Плоского системній класифікації методів геометричного моделювання [40], зокрема методам моделювання рельєфу тощо.

Наукові дослідження А.М. Підкоритова стосуються геометричного моделювання спряжених криволінійних поверхонь, що включають інтерференцію. Так, в роботі [41] розроблено новий метод криволінійних перетворень, який дозволяє формувати геометричну та математичну моделі квазігвинтових поверхонь. В роботі [42] наведено геометричне моделювання спряжених квазігвинтових поверхонь із точковим контактом, що виключає інтерференцію і т.д.

Наукові дослідження В.М. Корчинського та його учнів присвячено геометричному моделюванню зображень проекційної природи інваріантного до факторів, що обумовлюють їх формування. Результати досліджень створюють умови для розв'язання важливої прикладної проблеми розпізнавання та інтерпретації відеоінформації, що отримано дистанційними засобами.

Так, в роботі [43] розглянуто питання реєстрації зображень з використанням ентропійних критеріїв, в роботі [44] – геометричну та радіометричну корекцію проекційних багатоспектральних зображень, в роботі [45] – аналіз геометричних форм проекційних зображень на основі вейвлет-перетворень, в [46] – оптимальне дискретне подання напівтонових проекційних зображень.

Дослідження Є.В. Пугачова присвячено дискретному геометричному моделюванню скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки. Так, наприклад, в роботі [47] проведено розрахунок освітленості від світлових шахт у вигляді зрізаного колового конуса з дифузним відбиванням світла, робота [48] присвячена визначенню типу апроксимувального об'єкта точкової множини за характеристиками самої множини, в роботі [49] здійснено порівняння методів визначення коефіцієнта корисної дії циліндричної дзеркально відбиваючої світлової шахти та проаналізовано отримані результати.

Роботи А.Н. Хомченка присвячено ймовірнісним моделям в прикладній геометрії. Наприклад, в [50] розглянуто основні напрямки застосування методів стохастичної геометрії в конструюванні, наближенні та реконструкції просторових форм, причому особливу увагу приділено проблемам апроксимації багатовидів, заданих на дискретних точкових множинах. В роботі [51] розглянуто проблему збереження геометричної ізотропії на серендипових елементах вищих порядків, в [52] наведено візуалізацію процедури гладкої зшивки поверхонь Біркофа-Гарабедіана і т.д.

Розробці основ прикладної дискретної геометрії присвячено численні дослідження мелітопольської школи прикладної геометрії, а саме, В.М. Найдиша, В.М. Верещаги, А.В. Найдиша та їх учнів [53-64]. Досліджено питання, що стосуються дискретних елементів на площині, диференціальних характеристик дискретно представленої кривої, дискретної інтерполяції дискретно представленої кривої, питання, що стосуються дискретно представлених просторових кривих ліній, дискретно представлених поверхонь. Здійснено побудову алгебри тривекторів.

Необхідно також відзначити велику кількість робіт в галузі геометричного моделювання об'єктів, явищ та процесів, що присвячені наступним проблемам:

- органічного зв'язку прикладної геометрії з системами автоматизації проектування [65,66];
- енергозбереження, ефективного використання сонячної енергії, комп'ютерного моделювання потоку відбитих променів, освітленню житлових приміщень тощо [67-69];
- геометричному моделюванню кінематичних поверхонь в спеціальних координатах (узагальнених циліндричних, гіперболічних, квазісферичних та ін.) [70-72];
- розробці основ теорії проєктивних раціональних поверхонь [73];
- комп'ютерним методам деформативного конструювання геометричних об'єктів на основі політканинних перетворень;
- конструюванню поверхонь та їх неперервному вигинанню в кінцеві форми на основі керування натуральними параметрами [74];
- розвитку багатовимірної геометрії [75-77];



- геометричному моделюванню робочих коліс турбомашин [78];
- дослідженню геометрії широкого кола упорядкованих потоків в природі та техніці [79];
- застосуванню структурно-параметричного підходу в прикладній геометрії [80];
- геометричної оптимізації [81];
- моделюванню мінімальних поверхонь [82].

Таким чином, на теперішній час для розв'язання дуже широкого кола наукових проблем використовуються методи прикладної геометрії. Не є винятком і задачі оптимізаційного геометричного проектування, розв'язання яких базується на методах формоутворення різноманітних геометричних об'єктів, методах дискретного геометричного моделювання, багатовимірній геометрії, методах геометричної оптимізації тощо. Разом з тим, аналіз наявної літератури не виявив існуючих методів оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. В зв'язку з цим, розглянемо існуючі підходи до розв'язання класу задач оптимізаційного геометричного проектування.

## **1.2 Огляд класу задач оптимізаційного геометричного проектування та методів їх розв'язання**

У різних сферах діяльності людини виникають задачі, що пов'язані з обробкою та перетворенням геометричної інформації та, відповідно до [83], відносяться до класу задач оптимізаційного геометричного проектування, розвиток методів розв'язання яких є актуальним. Зазначений клас задач складають:

- задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів;
- задачі оптимального покриття геометричних об'єктів;
- задачі оптимального розбиття геометричних об'єктів;
- задачі побудови оптимальних шляхів і з'єднувальних мереж.

Задача розміщення геометричних об'єктів була поставлена академіком В.Л. Рвачовим у 1963 р. [84]. В задачі розміщення геометричних об'єктів основними обмеженнями є наступні:

- умови належності геометричних об'єктів заданої форми і розмірів області розміщення (умова неперетину заданих геометрич-

них об'єктів з доповненням області розміщення до відповідного простору);

- умови взаємного неперетину геометричних об'єктів, що розміщуються в заданій області.

Класичним прикладом задачі розміщення є задача розкрою, при розв'язанні якої коефіцієнт заповнення практично ніколи не досягає одиниці (рис. 1.1).

Основні труднощі в розв'язанні розглянутої задачі полягають в аналітичному описі умов неперетинання об'єктів і умов їхнього розміщення в області. Першим кроком у побудові аналітичного опису таких умов був підхід, заснований на  $R$ -функціях, введених у роботах В.Л. Рвачова [84,85]. Цей підхід знайшов подальший розвиток у роботах Ю.Г. Стояна, в яких для формалізації відносин неперетинання об'єктів і кількісної міри ступеня виконання цих відносин введено поняття  $\Phi$ -функцій [86].  $\Phi$ -поверхнею  $\Phi$ -функції є графік вектор-функції щільного розміщення (г.ф.п.р.) об'єктів [87], що дозволяє перетворити геометричну інформацію про об'єкти в інформацію про їх можливі щільні розміщення.

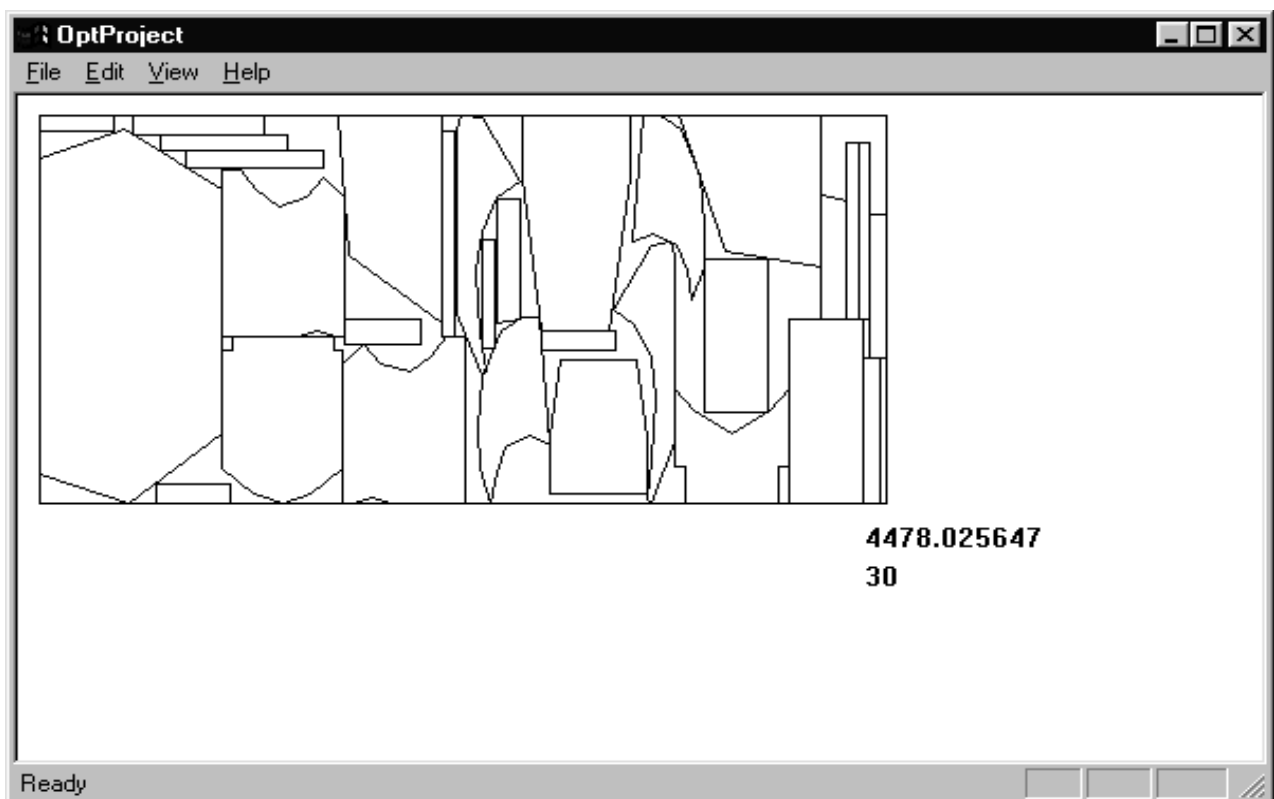


Рисунок 1.1 – Приклад розв'язання задачі розкрою

Формулювання задачі розміщення як задачі математичного програмування стало можливим з появою апарата структур лінійних нерівностей [88]. Це дозволило використовувати розроблені в рамках теорії математичного програмування підходи як основу для розробки методів розв'язання. Застосування сучасних обчислювальних засобів розв'язання оптимізаційних задач теорії дослідження операцій [89-97] до предметної області задач геометричного проектування стимулювало появу робіт, у яких, зокрема, розглядалися підходи до побудови аналітичних моделей задач розміщення, наприклад, неопуклих орієнтованих [98] і неорієнтованих [99, 100] багатокутників. У роботі [98] розглянутий метод пошуку локального мінімуму задачі розміщення орієнтованих багатокутників, проведення дослідження області припустимих розв'язків, що описується структурою лінійних нерівностей. Математична модель задачі нерегулярного розміщення неорієнтованих об'єктів у заданій області описана в роботі [99], також запропонований наближений алгоритм локальної оптимізації розміщення неорієнтованих об'єктів в області із залученням ряду апроксимуючих процедур. Математична модель задачі розміщення неорієнтованих багатокутників [100] побудована на основі предикатного опису області припустимих розв'язків та мінімаксної цільової функції.

У роботі [101] на основі апарата структур нелінійних нерівностей описуються основні обмеження задач геометричного розміщення (відносини належності області розміщення та взаємного неперетинання геометричних об'єктів) для неопуклих багатокутників, які мають кутовий параметр розміщення. Запропоновано метод локальної оптимізації задачі розміщення неопуклих неорієнтованих багатокутників, що враховує можливість оптимізації по групах змінних трансляції та кутових параметрів розміщення.

Роботи [102-103] присвячені розв'язанню оптимізаційних задач розміщення орієнтованих об'єктів, таких як кола [102], однакові багатокутники [103].

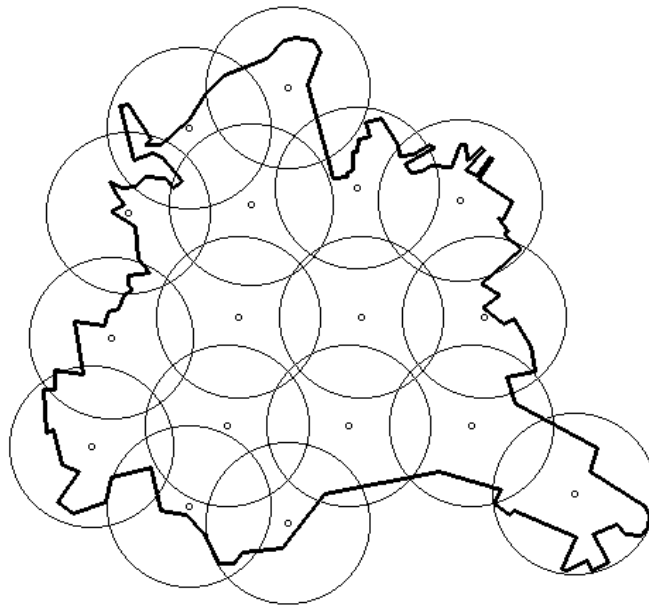
У роботах [104-105] введено визначення і приводяться основні властивості  $\Phi$ -функції.

До останніх публікацій, присвяченим розвитку апарату  $\Phi$ -функцій, а також сучасним підходам до розв'язання оптимізаційних 2D задач розміщення варто віднести роботи [106-115]. У роботі [108] приводиться  $\Phi$ -функція для неорієнтованих неопуклих бага-

токутників. У роботах [106-107, 112-115] наведено визначення, основні властивості та аналітичний опис  $\Phi$ -функцій орієнтованих геометричних об'єктів, що володіють різними просторовими формами, при цьому в [113] приводяться  $\Phi$ -функції так званих складених об'єктів, тобто об'єктів, що отримані об'єднанням або перетинанням базових, причому під базовими розуміються такі об'єкти, як коло, прямокутник, опуклий багатокутник.

Закордонні публікації по розглянутій проблемі присвячені або опису математичної моделі задачі [116-118], або розробці ефективних евристичних алгоритмів із прикладами розв'язання конкретних задач [117, 119-120]. Основна складність у цих роботах пов'язана з відсутністю математичного апарату аналітичного опису геометричних умов неперетинання.

Другим важливим класом задач геометричного проектування є задачі оптимального покриття області геометричними об'єктами [121] (рис. 1.2).



**Рисунок 1.2 – Приклад розв'язання задачі покриття заданої області колами фіксованого радіусу**

У задачах покриття висуваються наступні основні вимоги:  
- умова покриття всіх точок області геометричними об'єктами із заданими формами і розмірами (з урахуванням умови мінімуму перетину геометричних об'єктів, що покривають задану область, з доповненням цієї області до відповідного простору);

- умова мінімуму взаємного перетину геометричних об'єктів, що покривають задану область.

Для аналітичного опису міри покриття в роботі [121] введено поняття  $\omega$  - функцій. Розглянуто методи нерегулярного й регулярного покриття. В якості приклада розглянемо наступну задачу.

При проектуванні нових районів міст, а також при необхідності обґрунтування потужності пожежно-рятувальної служби та її місць дислокації, основним критерієм (критеріями) розміщення пожежно-рятувальних депо (ПД) є визначений нормативними документами радіус кругової зони обслуговування; максимальні відстані між будинком ПД і об'єктами підвищеної пожежної небезпеки, з масовим перебуванням людей; мінімальні відстані між будинком ПД і житловими, суспільними будинками.

Задачу було сформульовано наступним чином. У рамках виділених ресурсів визначити мінімальну нормовану кількість ПД для протипожежного захисту району міста (всього міста), і такі їх параметри розміщення, які дозволять скоротити час прибуття оперативних відділень до можливих осередків пожежі.

В роботі [122] здійснена декомпозиція розглянутої задачі. В основу декомпозиції, як і в задачі проектування складних економічних систем (прикладом яких є місто), покладений часовий інтервал реалізації планів міста та функціональних особливостей задачі. В результаті декомпозиції виділені два основних етапи її розв'язання.

На першому етапі розв'язання визначалася мінімальна кількість ПД, які своїми нормованими круговими зонами захисту разом із зонами захисту існуючих ПД повністю покривають місто (**Рисунок 1.2**), тобто розв'язується задача покриття колами фіксованого радіусу області довільної форми.

Задача раціонального розміщення ПД розглядалася для кожної кругової зони захисту на стадії проектування району забудови, коли, в основному, визначені архітектурні та планувальні рішення, і становить другий етап розв'язання. Дану задачу було зведено до задачі розміщення прямокутного геометричного об'єкта постійних розмірів з урахуванням нормованих максимальних і мінімальних відстаней. Область припустимих розв'язків, що враховує обмеження задачі, будується за допомогою апарату Ф-функцій з урахуванням нормованих відстаней для об'єктів і областей з постійними роз-

мірами. Метод моделювання розміщення ПД полягав у переборі точок області припустимих розв'язків із заданим кроком.

Таким чином, розглянута задача є прикладом сполучення задач оптимального покриття і розміщення геометричних об'єктів.

Третій клас задач геометричного проектування представляють задачі оптимального розбиття геометричних об'єктів. Задачі розбиття неперервної області на геометричні об'єкти розглянуті в роботах О.М. Кисельової [123], а задачі розбиття з неперервними та дискретними обмеженнями (характеристиками) розглянуті в роботі О.М. Соболя [124]. В задачах розбиття області на геометричні об'єкти основними вимогами є наступні:

- умова належності геометричних об'єктів розбиття заданій області;
- умова взаємного неперетину геометричних об'єктів розбиття;
- умова повного розбиття заданої області (коефіцієнт заповнення заданої області об'єктами розбиття повинен дорівнювати одиниці, чого, наприклад, досягнути в задачах раціонального розміщення практично неможливо, за винятком часткових випадків).

Для аналітичного опису зазначених вимог в роботі [124] введено поняття  $\xi$  - функцій. Розглянуто методи нерегулярного та регулярного розбиття. В роботі [125] на прикладі розв'язання задачі розбиття посівних площ запропоновано один з методів регулярного розбиття довільної області двома наборами взаємно-ортогональних прямих (рис. 1.3).

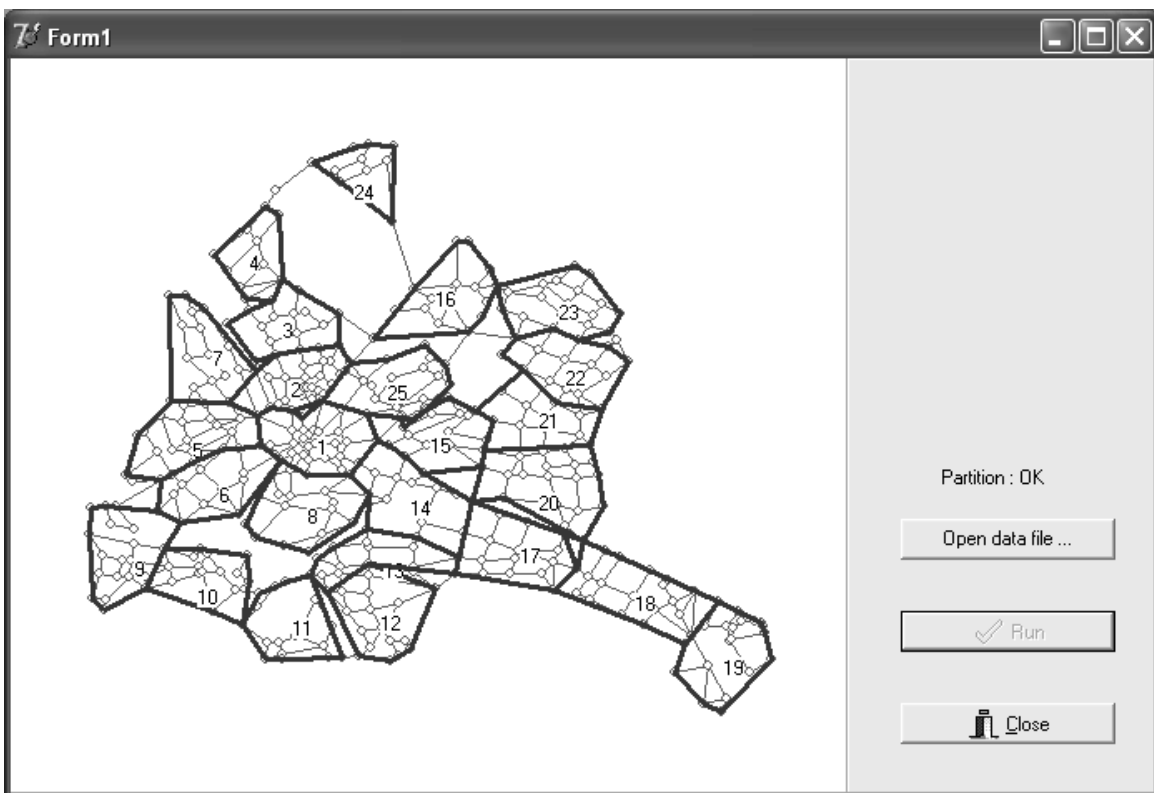
Слід відзначити, що детальна класифікація, розробка та чисельна реалізація методів раціонального розбиття наведена в роботі [124]. Геометричні моделі раціонального розбиття заданих областей на мінімальну кількість підобластей з урахуванням дискретних та неперервних обмежень наведені на рис. 1.4 – 1.5.

Задачі побудови оптимальних шляхів та з'єднувальних мереж у незв'язних областях представлені в роботах [126,127] і можуть бути розглянуті у вигляді четвертого класу задач геометричного проектування.

Даний клас розглянемо на прикладі задачі раціонального розміщення пожежних гідрантів.

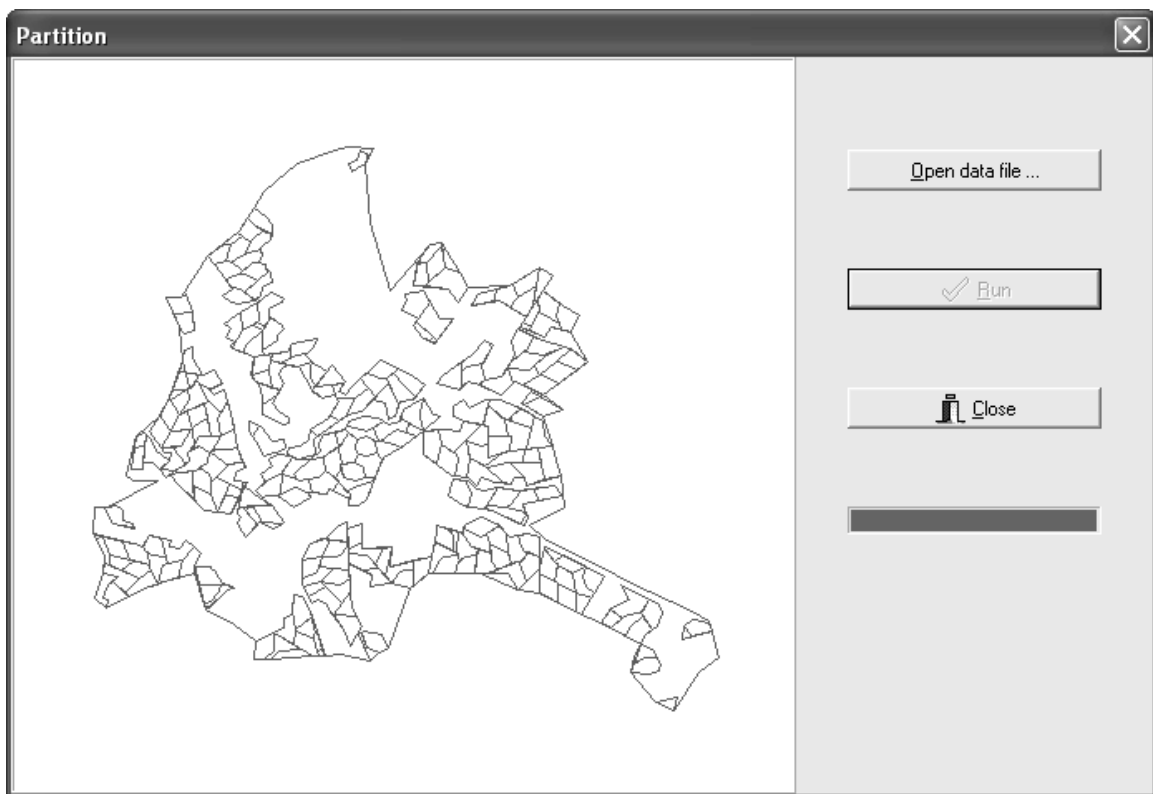


**Рисунок 1.3 – Приклад розв’язання задачі раціонального розбиття посівних площ**



**Рисунок 1.4 – Раціональне розбиття багатозв’язної області**

Розглядався район міста, який містить будинки та деякі області заборони. Кожен з будинків захищений за допомогою улаштування пожежних гідрантів (кількість яких залежить від ступеня його вогнестійкості), які є джерелами подачі води в можливий осередок пожежі по рукавних лініях довжиною  $L_j$ . Нехай один кінець рукавної лінії (точка  $A_j$ ) належить пожежному гідранту, що перебуває на мережі водопостачання. Пожежні гідранти повинні розміщуватись таким чином, щоб була забезпечена установка рукавного розгалуження біля будь-якої зовнішньої частини кожного будинку за умови обмеження довжини прокладки рукавних ліній. Це може бути забезпечено двома рукавними лініями довжиною  $L_j$ , які виходять із точки  $A_j$  та охоплюють об'єкт (будинок)  $S_i$  (рис. 1.6).



**Рисунок 1.5 – Раціональне розбиття незв'язної області**

Таким чином, необхідно створити таку систему протипожежного водопостачання в районі міста, щоб, якщо виникне потреба, забезпечити забір і подачу води по рукавних лініях до зовнішньої частини кожного будинку, при цьому кількість пожежних гідрантів має бути мінімальною.



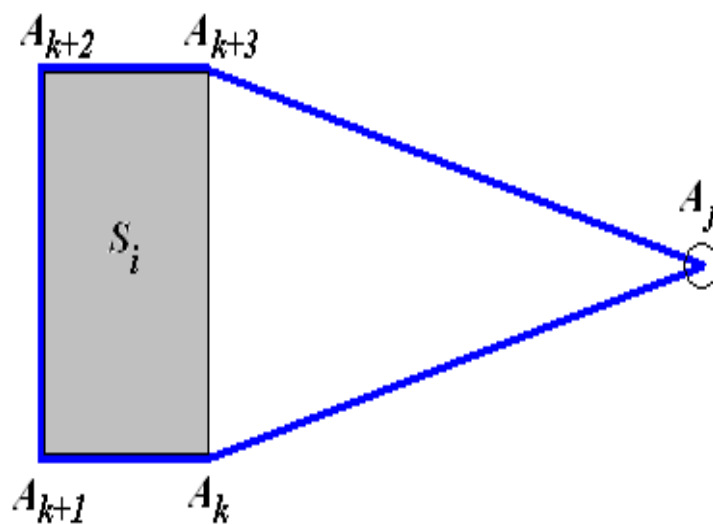


Рисунок 1.6 – Охоплення рукавними лініями об'єкта  $S_i$

При створенні інтелектуальних систем розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування, розробці ефективних методів їх розв'язання, виникає необхідність побудови єдиної обчислювальної основи подання інформації про об'єкти реального світу.

У якості адекватної математичної моделі реального об'єкта розглядаються непусті точкові множини, що задовольняють відповідним вимогам [128].

Подання інформації про геометричні об'єкти як про математичні моделі матеріальних об'єктів у задачах геометричного проектування пов'язане з поняттям геометричної інформації [83], введеної в роботах Ю.Г.Стояна як сукупності трьох елементів: просторової форми (форми) геометричного об'єкта; метричних характеристик, що визначають “розміри” об'єкта; параметрів розміщення, що задають місце розташування об'єкта в просторі (на площині). Разом з тим, відповідно до [124], слід зазначити, що таке подання геометричної інформації про геометричні об'єкти є надмірним.

У задачах геометричного проектування [83] моделюється реальний процес розміщення геометричних об'єктів (покриття, розбиття області на об'єкти). При розглянутому моделюванні здійснюється обробка та різні способи перетворення геометричної інформації, у результаті яких здійснюється пошук оптимального розміщення геометричних об'єктів (покриття, розбиття). Дані задачі пов'язані з обробкою великих об'ємів геометричної інформації та урахуванням великої кількості різних вимог і виходять за рамки класичної теорії дослідження операцій. Необхідність виділення таких задач в окре-

мий клас, так званих задач геометричного проектування, викликано нестандартністю методів їхнього моделювання та розв'язання.

Проведений аналіз існуючих методів розв'язання задач оптимізаційного геометричного проектування також не виявив методів оптимального покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Інакше кажучи, даний напрямок досліджень є актуальним та перспективним.

Більш того, незважаючи на велику кількість методів розв'язання класу задач оптимізаційного геометричного проектування, на теперішній час не існує детальної класифікації зазначеного класу задач. Таким чином, здійснення класифікації дозволить визначити перспективні напрямки розвитку теорії оптимізаційного геометричного проектування.

### 1.3 Класифікація задач оптимізаційного геометричного проектування

Дослідженню класифікації задач оптимізаційного геометричного проектування, а саме, задач оптимального розбиття геометричних об'єктів, присвячено роботу [124].

Так, за множиною розбиття задачі оптимального розбиття можуть бути класифіковані так (рис. 1.7):

- задачі розбиття однозв'язних множин;
- задачі розбиття багатозв'язних множин;
- задачі розбиття незв'язних множин.



Рисунок 1.7 – Класифікація задач розбиття за множиною розбиття

При цьому слід врахувати те, що кожній множині можуть належати:

- дискретні характеристики;
- непевні характеристики;
- дискретні та неперервні характеристики.

В залежності від методів формування підмножин розбиття розглядаються наступні типи даних задач:

- нерегулярне розбиття заданих множин;
- регулярне розбиття заданих множин.

В свою чергу, нерегулярне розбиття здійснюється:

- геометричними об'єктами з довільною формою та метричними характеристиками;
- нерегулярною сіткою;
- наборами прямих з довільними кутами нахилу.

Регулярне розбиття здійснюється:

- геометричними об'єктами заданої форми, метричні характеристики яких змінюються за заданим законом;
- регулярною сіткою.

Дослідження класу задач оптимізаційного геометричного проектування (п. 1.2) дозволило здійснити класифікацію, що наведена на рис. 1.8.

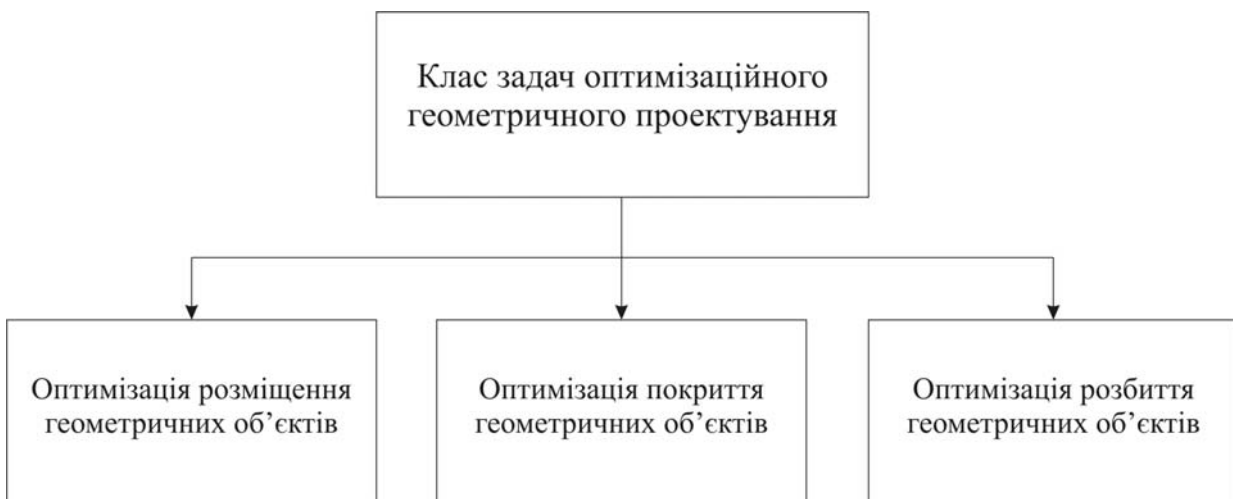
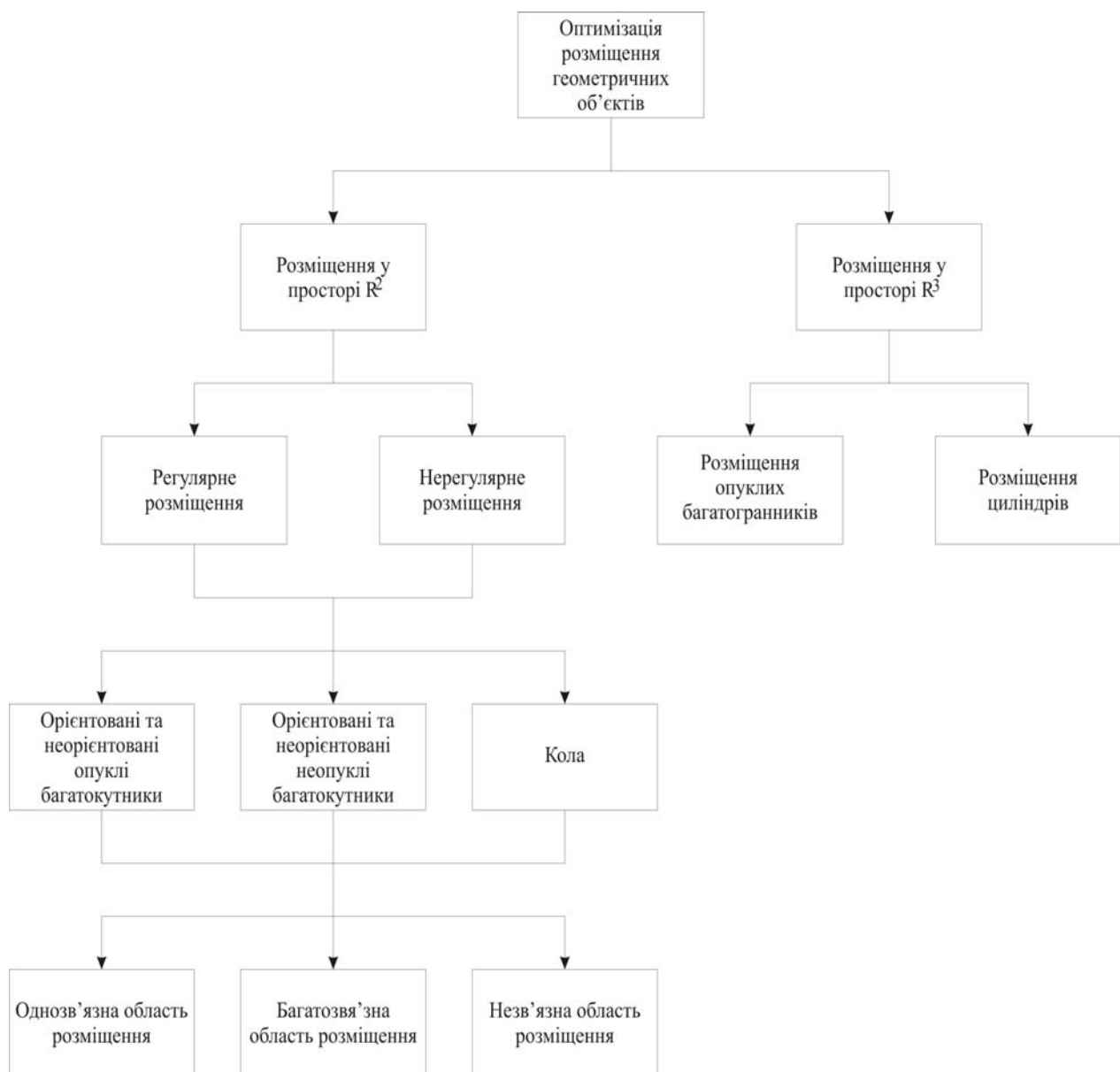


Рисунок 1.8

Детальний аналіз задач оптимального розміщення геометричних об'єктів дозволив здійснити їх класифікацію, що наведена на рис. 1.9.



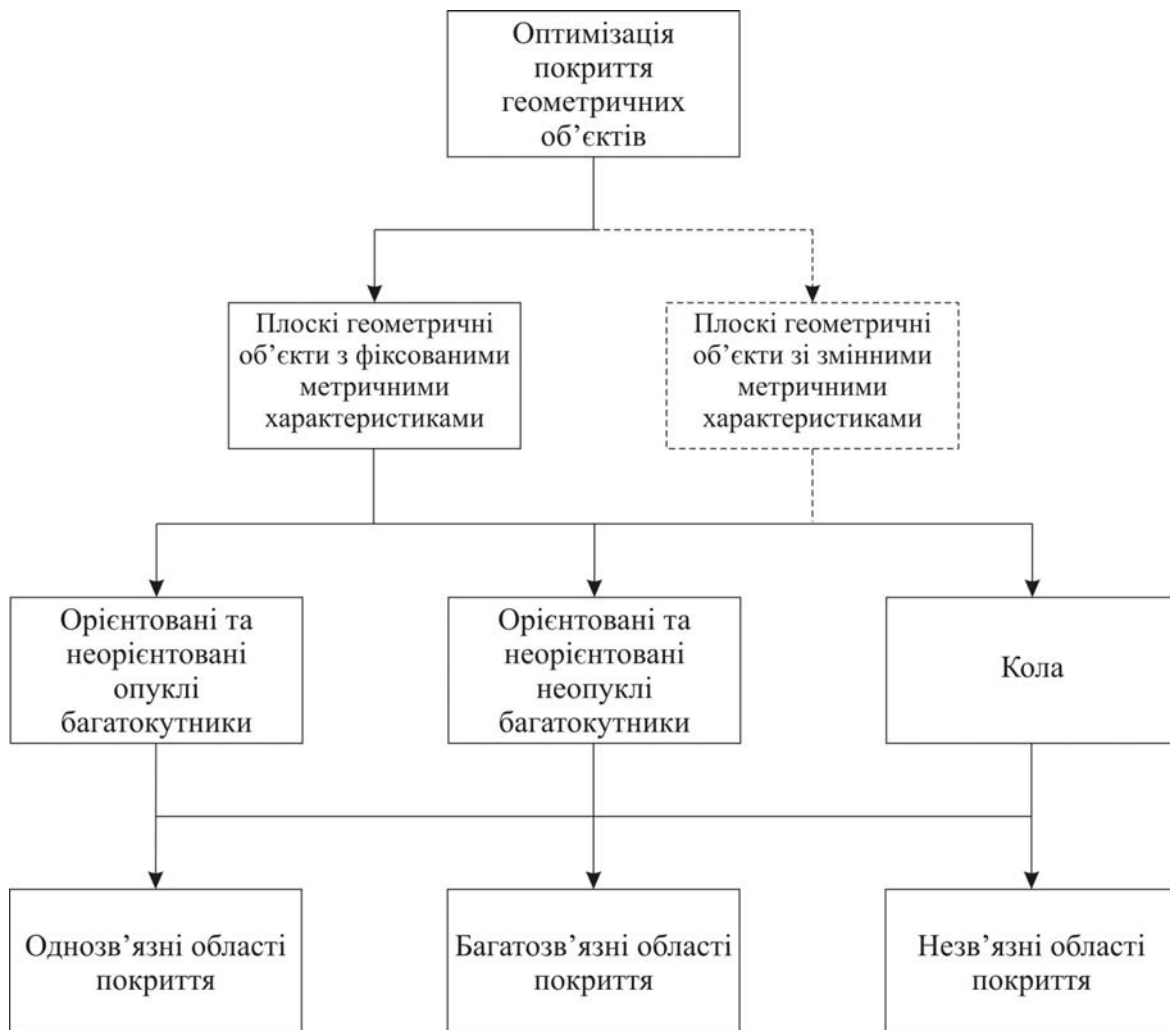
**Рисунок 1.9 – Класифікація задач оптимального розміщення**

Що стосується задач оптимального покриття геометричних об'єктів, то їх класифікація наведена на рис. 1.10.

Розроблена класифікація задач оптимізаційного геометричного проектування дозволила зробити наступні висновки щодо перспективних напрямків досліджень:

- оптимізація розміщення геометричних об'єктів з нелінійними границями;
- оптимізація розміщення геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками;
- оптимізація розміщення геометричних об'єктів у просторі  $R^3$ ;

- оптимізація покриття геометричними об'єктами зі змінним метричними характеристиками;
- оптимізація розбиття геометричних об'єктів у просторі  $R^3$ .



**Рисунок 1.10 – Класифікація задач оптимального покриття**

## РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ТА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ОБМЕЖЕНЬ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ ОБЛАСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ ЗІ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

### 2.1 Постановка задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

Незважаючи на всю різноманітність задач оптимізаційного покриття геометричних об'єктів, їх можна об'єднати в одну основну задачу.

У просторі  $R^2$  задана область покриття  $S_0$ . Дана область може бути незв'язною (набір плоских геометричних об'єктів), однозв'язною, тобто зв'язною з одним компонентом лінійної зв'язності границі, і багатозв'язною з декількома компонентами лінійної зв'язності границі (області заборони). Нехай існує набір об'єктів покриття  $S_i (i=1,2,\dots,N)$ . Об'єкти  $S_i$ , в загальному випадку, можуть бути також незв'язними, однозв'язними, та багатозв'язними. Необхідно повністю покрити задану область таким чином, щоб критерій якості покриття (кількість об'єктів покриття) приймав мінімальне значення. Обмеження, які необхідно враховувати в даних задачах, характеризуються взаємовідношенням між кожною парою об'єктів, що покривають задану область, а також між об'єктами та областю покриття. Слід відзначити, що в задачах оптимального покриття припускається можливість існування загальних точок для декількох об'єктів покриття, а також загальних точок для об'єкта покриття і доповнення області  $S_0$  до простору  $R^2$ . Якщо не врахувати дане припущення то, в загальному випадку, досягнути повного покриття області  $S_0$  буде неможливо, оскільки об'єкти покриття можуть мати довільну форму. Разом з тим, для того, щоб критерій якості покриття приймав мінімальне значення, необхідно виконання обмежень щодо забезпечення мінімальної кількості загальних точок для декількох об'єктів покриття, а також загальних точок для об'єкта покриття і доповнення області  $S_0$  до простору  $R^2$  при повному покритті заданої області. Дані обмеження можна сформулювати як

умови мінімізації взаємного перетину об'єктів покриття між собою, а також умови мінімізації перетину об'єктів покриття з доповненням  $S_0$  до простору  $R^2$ .

Необхідно відзначити, що в задачах оптимального покриття можуть бути присутніми також інші вимоги, характерні для різних предметних областей. Дані вимоги формують групу спеціальних обмежень.

Таким чином, основну задачу оптимального покриття можна сформулювати наступним чином: необхідно повністю покрити задану область  $S_0$  об'єктами  $S_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) таким чином, щоб виконувалися умови мінімізації взаємного перетину об'єктів покриття між собою, умови мінімізації перетину об'єктів покриття з доповненням  $S_0$  до простору  $R^2$ , а також спеціальні обмеження, і при цьому критерій якості покриття приймає мінімальне значення.

Для того, щоб записати теоретико-множинну постановку задачі оптимального покриття і формалізувати обмеження даної задачі, необхідно визначитися з класами геометричних об'єктів, що можуть бути моделями області та об'єктів покриття, і розглянути поняття геометричної інформації для опису даних об'єктів.

Будь-який матеріальний об'єкт, як геометричне тіло, повинен представлятися сукупністю точок, взаємне розташування яких визначало б його у вигляді креслення, натурної моделі, чи іншого зображення [121]. Розглянемо точкові множини, які можуть являти собою геометричні моделі області та об'єктів покриття.

Перш за все зауважимо, що клас точкових множин простору  $R^2$  значно ширший, ніж потрібно для побудови геометричних моделей матеріальних об'єктів. Наприклад, на рис. 2.1 зображена множина, що містить ізольовані точки; на рис. 2.2 – ніде не щільна множина [121]. Цей список можна продовжити.

Ясно, що топологічна структура зазначених множин така, що вони не можуть бути геометричними моделями реальних об'єктів. Для того, щоб виділити точкові множини в  $R^2$ , які можуть являти собою геометричні моделі реальних об'єктів, Ю.Г. Стояном було введено поняття  $\varphi$ -об'єкта [121].

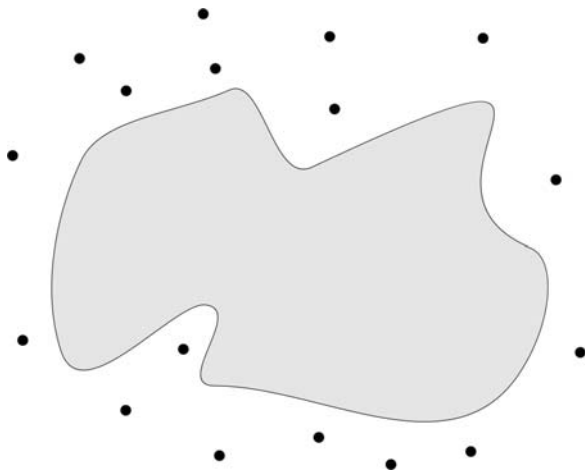


Рисунок 2.1

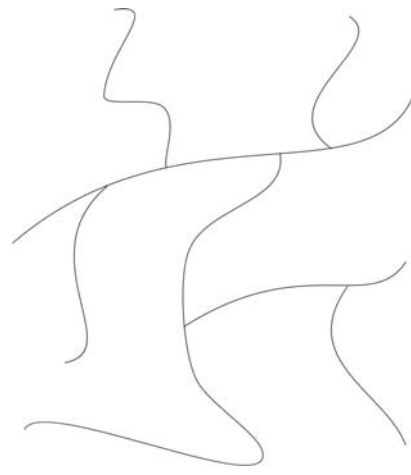


Рисунок 2.2

*Визначення 2.1* [121]. Непорожня множина  $S \subset R^2$  називається  $\varphi$  - об'єктом, якщо:

A1)  $S$  - канонічно замкнена  $(\chi^\alpha)$  чи канонічно відкрита  $(\chi^0)$  множина [121];

A2) внутрішність ( $\text{int } S$ ) і замикання ( $\text{cl } S$ ) множини  $S$  мають однаковий гомотопічний тип [121].

Важливим класом  $\varphi$  - об'єктів як точкових множин у просторі  $R^2$  є клас  $\varphi$  - багатокутників [121].

*Визначення 2.2* [121].  $\varphi$  - багатокутником називається  $\varphi$  - об'єкт, границя якого складається з кінцевого числа прямих чи променів.

Після того, як визначено клас точкових множин у просторі  $R^2$ , який може виступати в якості геометричних моделей областей та об'єктів покриття, розглянемо питання параметризації геометричних моделей даних об'єктів.

Як відомо [15], параметричне число будь-якого багатокутника може бути записано наступним чином:

$$p = p_\varphi + p_n, \quad (2.1)$$

де  $p_\varphi$  - кількість параметрів форми;  $p_n$  - кількість параметрів положення.

Слід зазначити, що параметричне число багатокутника дорівнює кількості рівнянь, за допомогою яких можна визначити даний багатокутник у просторі  $R^2$ .



Таким чином, параметричне число багатокутника дорівнює:

$$p = 2n_0, \quad (2.2)$$

де  $n_0$  - кількість вершин багатокутника.

Однак для параметризації  $\varphi$  - об'єктів, що використовуються в якості геометричних моделей реальних об'єктів в задачах геометричного проектування, введено поняття геометричної інформації [121].

Так, будь-який  $\varphi$  - об'єкт має цілком визначену форму, задані метричні характеристики, займає деяке положення в просторі  $R^2$ . Зазначені характеристики задають так звану геометричну інформацію [121] про  $\varphi$  - об'єкт:

$$g = (\{s\}, \{m\}, \{p\}). \quad (2.3)$$

Геометрична інформації про  $\varphi$  - об'єкт має наступні складові:

- сукупність форм  $\{s\}$ ;
- метричні характеристики  $\{m\}$ , які визначають розміри точкових множин, що мають форми з  $\{s\}$ ;
- параметри  $\{p\}$ , що задають місце розташування точкових множин у просторі  $R^2$ .

Форми  $\{s\}$  являють собою множини, елементами яких є класи еквівалентності по сукупності будь-яких точкових множин у відповідних лінійних метричних просторах. Як приклади форм можна вказати наступні класи еквівалентності: коло, еліпс і т. ін.

Для того, щоб розрізнити множини, що мають однакову форму, необхідно знати їхні метричні характеристики. Як компоненти  $\{m\}$  можуть виступати, наприклад, координати вершин багатокутників, радіус кола і т. ін.

Визначення положення будь-якого  $\varphi$  - об'єкта в просторі  $R^2$  здійснюється за допомогою параметрів  $\{p\}$ . В якості елементів компоненти  $\{p\}$  обираються параметри, що характеризують положення власної системи координат  $\varphi$  - об'єкта відносно глобальної системи координат. Початок власної системи координат являє собою полюс  $\varphi$  - об'єкта [121].

Компонента  $\{p\}$ , в загальному випадку, містить в собі і кутові параметри, що характеризують орієнтацію множини в просторі  $R^2$ . Отже, компонента  $\{p\}$  являє собою не що інше, як параметри розміщення  $\varphi$  - об'єкта.

Будь-яка геометрична інформація  $g$  у просторі  $R^2$  визначає точкову множину (або набір точкових множин), обумовлену чисельними значеннями компонентів  $\{m\}$  і  $\{p\}$ , а також формою  $\{s\}$ . Таким чином, цієї інформації достатньо для опису геометричної моделі будь-якого матеріального об'єкта. Наприклад, для багатокутника  $S_0$  (рис. 2.3) геометрична інформація записується наступним чином:

$$g = \left( \{ \text{багатокутник} \}, \{ x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n} \}, \{ x_0, y_0 \} \right).$$

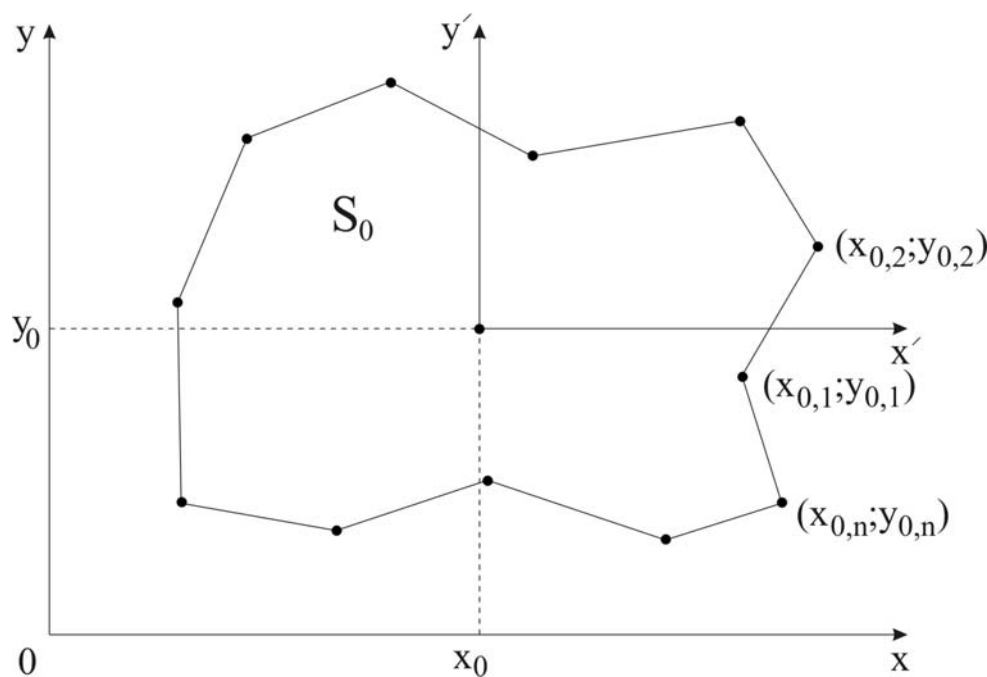


Рисунок 2.3 - Однозв'язний багатокутник

Слід зауважити, що кількість параметрів вищенаведеної геометричної інформації перевищує параметричне число багатокутника (2.2). Інакше кажучи, кількість параметрів, що складають геометричну інформацію про  $\varphi$  - об'єкт, є надлишковою.

Розглянемо об'єкти, що можуть являти собою геометричні моделі області покриття. Так, в даній роботі область  $S_0$  може бути представленою однозв'язними та багатозв'язними багатокутниками

яким, у свою чергу, можуть належати ланки ломаної лінії, точки тощо.

*Властивість 2.1.* В задачах оптимізаційного покриття область покриття  $S_0$ , в загальному випадку, не являє собою  $\varphi$  - об'єкт.

Що стосується однозв'язних багатокутників, то вони задаються координатами вершин у локальній системі координат, причому нумерація вершин здійснюється проти годинникової стрілки:

$$g = (\{x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n}\}, \{x_0, y_0\}), \quad (2.4)$$

або

$$g = \{x_0 + x_{0,1}, y_0 + y_{0,1}; x_0 + x_{0,2}, y_0 + y_{0,2}; \dots; x_0 + x_{0,n}, y_0 + y_{0,n}\}. \quad (2.5)$$

Слід зауважити, що вираз (2.5) описує однозв'язний багатокутник у глобальній системі координат.

Завдання багатозв'язної області покриття  $S_0$ , компонентами зв'язності якої, в загальному випадку, є неопуклі багатокутники, має певні особливості. Наприклад, область покриття, що зображена на рис. 2.4., може бути представленою за допомогою наступного виразу:

$$g = (\{p_0\}, \{p_{0,1}\}, \{p_{0,2}\}, \{x_0, y_0\}). \quad (2.6)$$

У виразі (2.6)  $\{p_0\} = \{x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n}\}$  - координати вершин зовнішньої компоненти зв'язності області  $S_0$ , що задані у локальній системі координат, причому нумерація даних вершин здійснюється проти годинникової стрілки;  $\{p_{0,1}\} = \{x_{0,1}^1, y_{0,1}^1; \dots; x_{0,n_1}^1, y_{0,n_1}^1\}$  та  $\{p_{0,2}\} = \{x_{0,1}^2, y_{0,1}^2; \dots; x_{0,n_2}^2, y_{0,n_2}^2\}$  - координати вершин внутрішніх компонент зв'язності  $S_0^1$  та  $S_0^2$  відповідно, що також задані у локальній системі координат, причому нумерація вершин даних компонент зв'язності здійснюється за годинниковою стрілкою. Нумерація вершин компонент зв'язності області  $S_0$  проти та за годинниковою стрілкою необхідна для того, щоб відрізнити зовнішню компоненту зв'язності від внутрішніх.

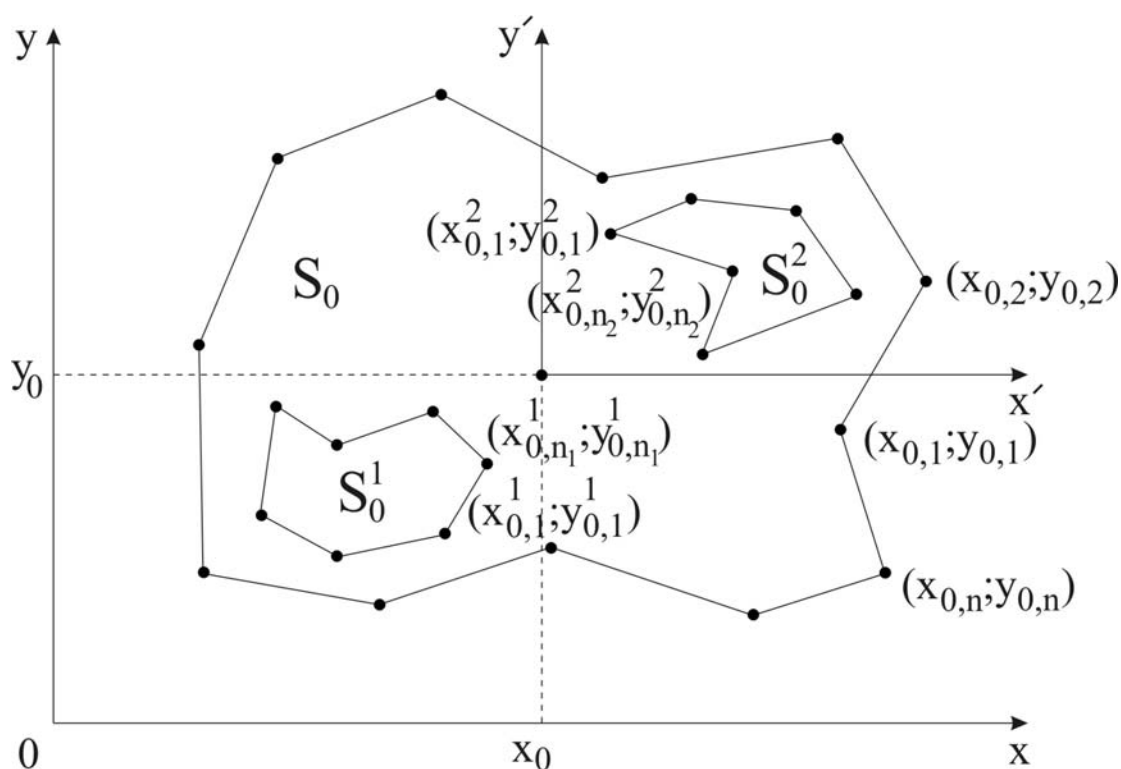


Рисунок 2.4 - Багатозв'язний багатокутник

В глобальній системі координат вираз (2.6) буде мати наступний вигляд:

$$g = \left( \left\{ x_0 + x_{0,1}, y_0 + y_{0,1}; x_0 + x_{0,2}, y_0 + y_{0,2}; \dots; x_0 + x_{0,n}, y_0 + y_{0,n} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x_0 + x_{0,1}^1, y_0 + y_{0,1}^1; \dots; x_0 + x_{0,n_1}^1, y_0 + y_{0,n_1}^1 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x_0 + x_{0,1}^2, y_0 + y_{0,1}^2; \dots; x_0 + x_{0,n_2}^2, y_0 + y_{0,n_2}^2 \right\} \right). \quad (2.7)$$

Якщо області  $S_0$ , яка у загальному випадку є багатозв'язною (рис. 2.4), належать ділянки ломаної лінії, то дані елементи задаються наступним чином:

$$g = \left( \{p_0\}, \{p_{0,1}\}, \{p_{0,2}\}, \{p_{0,L}\}, \{x_0, y_0\}, L \right). \quad (2.8)$$

У виразі (2.8)  $\{p_{0,L}\} = \{x_{L,1}^0, y_{L,1}^0; \dots; x_{L,n_L}^0, y_{L,n_L}^0\}$  - вершини ломаної лінії;  $L$  - матриця, що формує ланки ломаної і має наступний вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Якщо елемент матриці  $l_{ij} = 0$ , то відповідні вершини ломаної не з'єднані між собою. Якщо  $l_{ij} = 1$ , то зазначені вершини являють собою кінці відповідного відрізка, при цьому  $l_{ii} = 0$ .

Слід відзначити, що для однозв'язної області  $S_0$  у виразі (2.8) будуть відсутніми компоненти  $\{p_{0,1}\}$  та  $\{p_{0,2}\}$ .

Розглянемо об'єкти, що можуть являти собою геометричні моделі об'єктів покриття  $S_i (i=1,2,\dots,N)$ . Так, в даній роботі об'єкти  $S_i (i=1,2,\dots,N)$  завдаються у вигляді однозв'язних опуклих та неопуклих багатокутників і кіл.

*Властивість 2.2.* В задачах оптимізаційного покриття об'єкти покриття  $S_i (i=1,2,\dots,N)$  являють собою  $\phi$  - об'єкти.

Якщо об'єкти покриття розглядаються у вигляді опуклих та неопуклих однозв'язних багатокутників, то вони можуть бути представлені наступним чином:

$$g = \{x_i + x_{i,1}, y_i + y_{i,1}; x_i + x_{i,2}, y_i + y_{i,2}; \dots; x_i + x_{i,n_i}, y_i + y_{i,n_i}\}, \quad (2.10)$$

де  $n_i$  - кількість вершин  $i$ -го багатокутника. Нумерація вершин багатокутників – проти годинникової стрілки.

Якщо об'єкти покриття являють собою кола радіуса  $r_i$ , то вони можуть бути задані наступним чином:

$$g = (\{r_i\}, \{x_i, y_i\}), \quad (2.11)$$

де  $\{x_i, y_i\}$  - положення локальної системи координат кола відносно глобальної.

Важливою особливістю об'єктів покриття є те, що їх метричні характеристики є змінними, тобто залежать від кількості та координат

нат вершин, положень локальних систем координат об'єктів покриття.

*Властивість 2.3.* В задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками дані характеристики являють собою площі об'єктів покриття.

*Властивість 2.4.* Кількість та координати вершин (радіуси) об'єктів покриття  $S_i (i=1,2,\dots,N)$ , а також положення їх локальних систем координат відносно глобальної системи координат, є змінними.

*Властивість 2.5.* Якщо об'єкти покриття  $S_i (i=1,2,\dots,N)$  представляють собою однозв'язні опуклі або (та) неопуклі багатокутники, то кількість та координати вершин даних об'єктів не є обмеженою і визначається в залежності від положення їх локальних систем координат, а також виходячи із спеціальних умов задачі оптимізаційного покриття заданої області.

*Властивість 2.6.* У частковому випадку, кількість вершин багатокутників покриття може бути заданою, проте їх координати визначаються в процесі мінімізації цільової функції задачі оптимального покриття.

*Властивість 2.7.* В даній роботі виключається можливість повороту локальних систем координат області та об'єктів покриття.

Таким чином, виникає наступна задача: необхідно повністю покрити задану область  $S_0$  об'єктами  $S_i (i=1,2,\dots,N)$  таким чином, щоб виконувалися умови мінімізації взаємного перетину об'єктів покриття між собою, умови мінімізації перетину об'єктів покриття з доповненням  $S_0$  до простору  $R^2$ , а також спеціальні обмеження, і при цьому критерій якості покриття приймає мінімальне значення з урахуванням того, що кількість та координати вершин (радіуси) об'єктів покриття, а також положення їх локальних систем координат є змінними і визначаються в процесі розв'язання задачі.

Розглянемо теоретико-множинні постановки задач оптимізаційного покриття заданих областей плоскими геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Враховуючи типи областей  $S_0$ , що підлягають покриттю, можна виділити 2 основні задачі.

### Задача 1.

Нехай задано область покриття  $S_0$ , що являє собою, в загальному випадку, неопуклий багатозв'язний багатокутник у просторі  $R^2$ . Даній області належать області заборони (на розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття)  $S_0^v$ ,  $v=1,2,\dots,N_v$ , - компоненти зв'язності, що являють собою неопуклі багатокутники.

Необхідно покрити область  $S_0$  мінімальною кількістю геометричних об'єктів  $S_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$  (опуклі та неопуклі однозв'язні багатокутники, кола), зі змінними метричними характеристиками таким чином, щоб виконувалися наступні обмеження:

- покриття всієї заданої області  $S_0$

$$S_0 \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) = S_0; \quad (2.12)$$

- мінімум площі взаємного перетину геометричних об'єктів  $S_i$

$$S_i \cap S_j \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad j=i+1,\dots,N; \quad (2.13)$$

- мінімум площі перетину об'єктів  $S_i$  з областями заборони  $S_0^v$

$$S_i \cap S_0^v \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad v=1,2,\dots,N_v; \quad (2.14)$$

- належність об'єктів  $S_i$  області  $S_0$

$$cS_0 \cap S_i \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad cS_0 \cup S_0 = R^2; \quad (2.15)$$

- спеціальні умови, що формують об'єкти покриття

$$p_i \in F_i(S_0); \quad i=1,2,\dots,N; \quad (2.16)$$

де  $F_i(S_0)$  - множина форм і розмірів  $i$ -го об'єкта покриття.

### Задача 2.

Нехай задано область покриття  $S_0$ , що являє собою, в загальному випадку, неопуклий багатозв'язний багатокутник у просторі  $R^2$ . Даній області належать області заборони  $S_0^v$ ,  $v=1,2,\dots,N_v$ , та множина  $L_u^0$ ,  $u=1,2,\dots,N_u$ . Дану множину складають ланки ломаних ліній, відрізки прямих, точки тощо.

Необхідно покрити множину  $L_u^0$ ,  $u=1,2,\dots,N_u$ , мінімальною кількістю геометричних об'єктів  $S_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , зі змінними метричними характеристиками таким чином, щоб виконувалися наступні обмеження:

- покриття всієї множини  $L_u^0$ ,  $u=1,2,\dots,N_u$

$$\left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) = \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \right); \quad (2.17)$$

- мінімум площі взаємного перетину геометричних об'єктів  $S_i$

$$S_i \cap S_j \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad j=i+1,\dots,N; \quad (2.18)$$

- мінімум площі перетину об'єктів  $S_i$  з областями заборони  $S_0^v$

$$S_i \cap S_0^v \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad v=1,2,\dots,N_v. \quad (2.19)$$

- належність об'єктів  $S_i$  області  $S_0$

$$cS_0 \cap S_i \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad cS_0 \cup S_0 = R^2. \quad (2.20)$$

- спеціальні умови, що формують об'єктів покриття

$$p_i \in F_i(S_0); \quad i=1,2,\dots,N. \quad (2.21)$$

Особливістю задач оптимізаційного покриття є те, що у частковому випадку обмеження (2.12) та (2.17) можуть мати наступний вигляд:



$$S_0 \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) \rightarrow S_0; \quad (2.22)$$

$$\left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) \rightarrow \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \right). \quad (2.23)$$

Інакше кажучи, дані обмеження являють собою вимоги максимізації покриття області  $S_0$  та множини  $L_u^0$ ,  $u = 1, 2, \dots, N_u$ , відповідно.

Таким чином, можна зробити висновок про те, що до теперішнього часу задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками не розглядалися. Розробка підходу до формалізації обмежень (2.12)÷(2.16) та (2.17)÷(2.21) дозволить побудувати моделі та розробити методи розв'язання зазначених задач.

## 2.2 Формалізація обмежень в задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

В роботі [112] та в п. 1.2 розглянуто апарат  $\Phi$ -функцій та його використання при формалізації задач оптимізаційного розміщення плоских геометричних об'єктів. Даний клас функцій є природнім для запису умов взаємного неперетину та розміщення їх в заданій області. Разом з тим, при формалізації умов покриття області необхідно розглядати сукупність  $\phi$ -об'єктів, що робить неефективним використання  $\Phi$ -функцій, оскільки при цьому дана функція залежить від усіх змінних геометричної інформації, яка характеризує дану сукупність. Побудова такої  $\Phi$ -функції є надзвичайно складною. В зв'язку з цим, виникла необхідність у введенні спеціального класу функцій, що дозволить досить легко формалізувати умови покриття заданої області.

Нехай множина об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  може бути заданою наступним чином:

$$g = (\{p_1; \dots; p_N\}, \{x_1, y_1; \dots; x_N, y_N\}), \quad (2.24)$$

де  $p_i$  координати вершин (радіус)  $i$ -го об'єкта покриття.

За допомогою суперпозиції теоретико-множинних операцій побудуємо множину:

$$\Omega = B(S_1, S_2, \dots, S_N). \quad (2.25)$$

Тоді множина  $\Omega$  може бути заданою за допомогою інформації  $g_*$  наступного виду:

$$g_* = B(g_1, g_2, \dots, g_N) = g_1 * g_2 * \dots * g_N, \quad (2.26)$$

де  $g_i = (\{\delta_i\}, \{x_i, y_i\})$ , а знак  $*$  визначає взаємовідносини між відповідними об'єктами в залежності від виду оператора  $B$  у виразі (2.25). Слід зазначити, що в задачах оптимізаційного покриття знак  $*$  замінюється операцією  $\cap$ .

Інформація  $g_*$  утворює деякий простір  $G_*$ . Задамо в даному просторі функцію:

$$\omega_\Omega(g_*) = \omega_\Omega(p_1; \dots; p_N; x_1, y_1; \dots; x_N, y_N) = \mu(\Omega), \quad (2.27)$$

де  $\mu(\cdot)$  - міра Лебега.

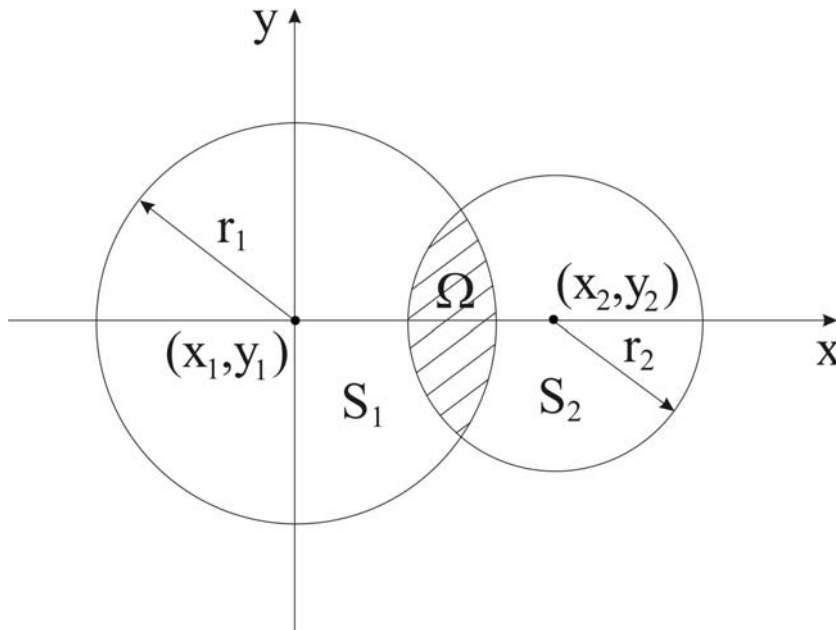
Таким чином, функції, що визначаються виразом (2.27), називаються  $\omega$ -функціями [121].

У якості приклада розглянемо інформації  $g_1 = (\{r_1\}, \{x_1, y_1\})$  та  $g_2 = (\{r_2\}, \{x_2, y_2\})$ , що описують у просторі  $R^2$  кола  $S_1$  та  $S_2$  (рис. 2.5).

Нехай  $\Omega = S_1 \cap S_2$ , причому  $r_1 \geq r_2$ . Тоді  $\omega$ -функція для даного випадку буде мати наступний вигляд:

$$\omega_\Omega(r_1, r_2, x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} 0; & \rho_{12} \geq r_1 + r_2, \\ \pi r_2^2; & \rho_{12} \leq r_1 - r_2, \\ r_1^2 \arccos \alpha_1 + r_2^2 \arccos \alpha_2 - \\ - r_1^2 \alpha_1 \sqrt{1 - \alpha_1^2} - r_2^2 \alpha_2 \sqrt{1 - \alpha_2^2}; & \\ r_1 - r_2 \leq \rho_{12} \leq r_1 + r_2, & \end{cases} \quad (2.28)$$

де  $\rho_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ,  $\alpha_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \rho_{12}^2}{2r_1\rho_{12}}$ ,  $\alpha_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + \rho_{12}^2}{2r_2\rho_{12}}$ .



**Рисунок 2.5**

У випадку довільних  $r_1$  та  $r_2$  у виразі (2.26) замість  $r_1$  слід писати  $\max\{r_1, r_2\}$ , а замість  $r_2$  -  $\min\{r_1, r_2\}$ .

Розглянемо основні властивості  $\omega$ -функцій [121].

*Властивість 2.8.*  $\omega$ -функція є позитивною. Це впливає з позитивності міри  $\mu(\cdot)$ .

*Властивість 2.9.* Еквівалентним геометричним інформаціям відповідають рівні  $\omega$ -функції, оскільки еквівалентні інформації задають рівні з точністю до власних конгруентних перетворень точкові множини.

*Властивість 2.10.* Значення  $\omega$ -функції не залежить від вибору центрів локальних систем координат  $\phi$ -об'єктів.

*Властивість 2.11.* Має місце наступна рівність:

$$\begin{aligned} \omega_{\Omega}(p_1; \dots; p_N; x_1, y_1; \dots; x_N, y_N) &\equiv \\ &\equiv \omega_{\Omega}(p_1; \dots; p_N; x_1 + p_x^0, y_1 + p_y^0; \dots; x_N + p_x^0, y_N + p_y^0). \end{aligned} \quad (2.29)$$

*Властивість 2.12.*  $\omega$ -функція є неперервною та майже всюди диференціюємою.

*Властивість 2.13.* Розглянемо криву  $\gamma_{12}$ , що описується наступним рівнянням:

$$\omega_{\Omega}(p_1; p_2; x_1, y_1; x_2, y_2) = \varepsilon. \quad (2.30)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  крива  $\gamma_{12}$  сходиться до кривої, що описує 0-рівень  $\Phi$ -функції об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ .

*Властивість 2.14.* Якщо  $\Phi(p_1; p_2; x_1, y_1; x_2, y_2) \geq 0$ , то  $\omega_{\Omega}(p_1; p_2; x_1, y_1; x_2, y_2) = 0$ . Якщо  $\Phi(p_1; p_2; x_1, y_1; x_2, y_2) < 0$ , то  $\omega_{\Omega}(p_1; p_2; x_1, y_1; x_2, y_2) > 0$ .

Таким чином, властивості 2.13 та 2.14 показують взаємозв'язок між  $\Phi$ -функцією та  $\omega$ -функцією.

Слід відзначити, що на теперішній час розроблено апарат  $\omega$ -функцій для формалізації обмежень в задачах оптимізаційного покриття заданих областей плоскими геометричними об'єктами з фіксованими формами та розмірами відносно локальних систем координат даних об'єктів. При цьому залишається не дослідженим питання побудови  $\omega$ -функцій для задач оптимізаційного покриття заданих областей плоскими геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Розглянемо наступні випадки покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками:

а) покриття заданої області у просторі  $R^2$  однозв'язними опуклими багатокутниками;

б) покриття заданої області у просторі  $R^2$  однозв'язними неопуклими багатокутниками;

в) покриття заданої області у просторі  $R^2$  однозв'язними опуклими багатокутниками та колами;

г) покриття заданої області у просторі  $R^2$  однозв'язними неопуклими багатокутниками та колами;

д) покриття заданої області у просторі  $R^2$  однозв'язними опуклими та неопуклими багатокутниками.

Геометрична інтерпретація *випадку а)* має вигляд, наведений на рис. 2.6 (одне з можливих взаємних положень об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ ).

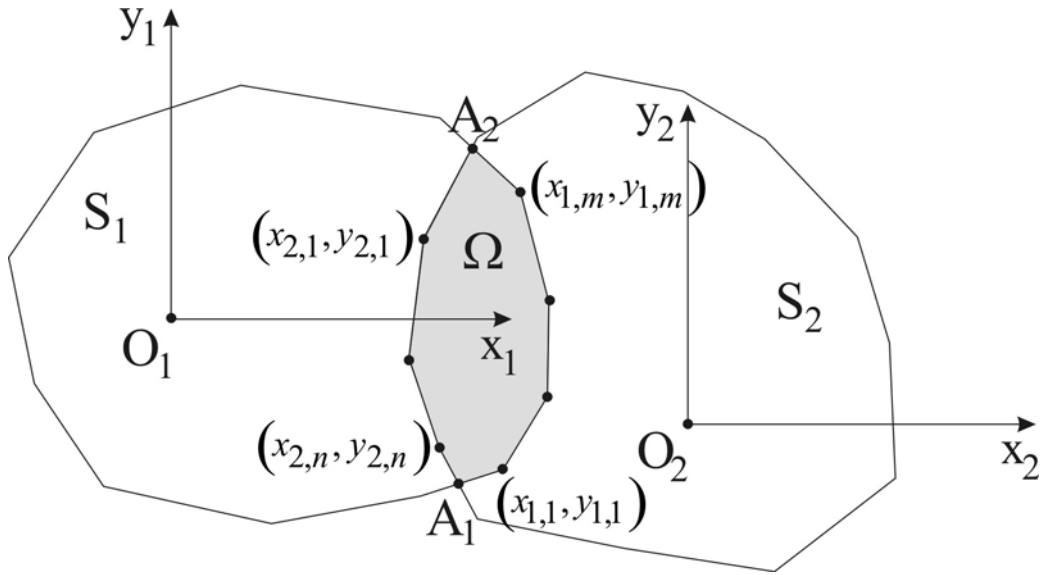


Рисунок 2.6

Тоді  $\omega$ -функцію для даного випадку запишемо наступним чином:

$$\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[ x_{A_1} \cdot (y_{2,n} - y_{1,1}) + x_{1,1} \cdot (y_{A_1} - y_{1,2}) + \sum_{i=2}^{m-1} x_{1,i} \cdot (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + \right. \\ \left. + x_{1,m} \cdot (y_{1,m-1} - y_{A_2}) + x_{A_2} \cdot (y_{1,m} - y_{2,1}) + x_{2,1} \cdot (y_{A_2} - y_{1,2}) + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^{n-1} x_{2,j} \cdot (y_{2,j-1} - y_{2,j+1}) + x_{2,n} \cdot (y_{2,n-1} - y_{A_1}) \right]. \quad (2.31)$$

Слід зазначити, що у виразі (2.31) та у подальших випадках координати вершин об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  розглядаються в глобальній системі координат. В протилежному випадку, в даному виразі слід приймати:

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= x_1 + x_{1,i}; \\ y_{1,i} &= y_1 + y_{1,i}; \\ x_{2,j} &= x_2 + x_{2,j}; \\ y_{2,j} &= y_2 + y_{2,j}; \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Тут  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$  - координати початків локальних систем координат об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  в глобальній системі координат.

Розглянемо побудову  $\omega$ -функції для інших часткових випадків, що наведені на рис. 2.7 та 2.8.

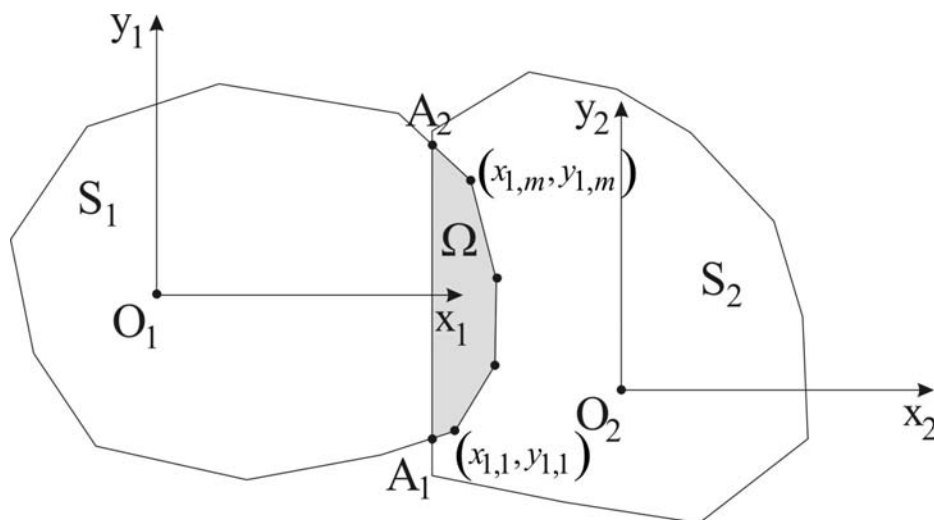


Рисунок 2.7

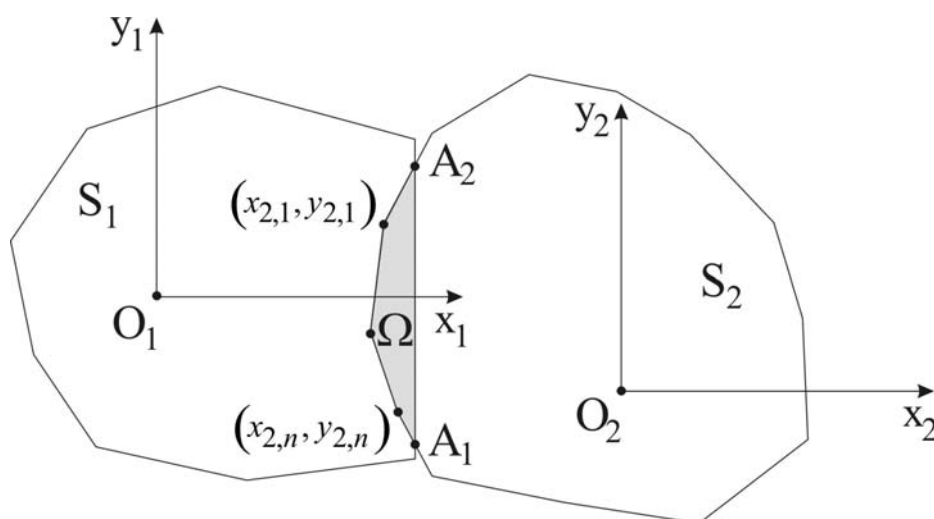


Рисунок 2.8

Так, для випадку, що наведений на рис. 2.7,  $\omega$ -функція прийме наступний вигляд:

$$\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[ x_{A_1} \cdot (y_{A_2} - y_{1,1}) + x_{1,1} \cdot (y_{A_1} - y_{1,2}) + \sum_{i=2}^{m-1} x_{1,i} \cdot (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + x_{1,m} \cdot (y_{1,m-1} - y_{A_2}) + x_{A_2} \cdot (y_{1,m} - y_{A_1}) \right]. \quad (2.32)$$

Що стосується випадку, який наведений на рис. 2.8, то для нього  $\omega$ -функцію запишемо наступним чином:

$$\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[ x_{A_1} \cdot (y_{2,n} - y_{A_1}) + x_{A_2} \cdot (y_{A_1} - y_{2,1}) + x_{2,1} \cdot (y_{A_2} - y_{1,2}) + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^{n-1} x_{2,j} \cdot (y_{2,j-1} - y_{2,j+1}) + x_{2,n} \cdot (y_{2,n-1} - y_{A_1}) \right]. \quad (2.33)$$

Розглянемо опуклі багатокутники  $S_1$  та  $S_2$ , що наведені на рис. 2.9. Необхідно зазначити, що в даному випадку ми маємо найбільш загальний вигляд перетину двох геометричних об'єктів  $S_1$  і  $S_2$ . Інакше кажучи, кількість точок перетину  $A_i$  границь двох об'єктів дорівнює  $p$ , тобто  $i=1, \dots, p$ . Позначимо вершини області  $\Omega$ , що обмежені точками  $A_i$  і  $A_{i+1}$  наступним чином:  $(x_1^{A_i}, y_1^{A_i}), (x_2^{A_i}, y_2^{A_i}), \dots, (x_{n_{A_i}}^{A_i}, y_{n_{A_i}}^{A_i})$ .

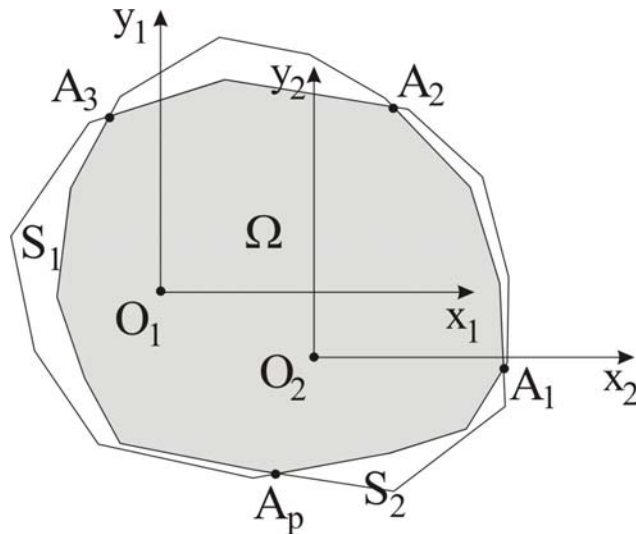


Рисунок 2.9

Тоді  $\omega$ -функцію можна записати у наступному вигляді:

$$\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[ x_{A_1} \cdot (y_{n_{A_p}}^{A_p} - y_1^{A_1}) + \dots + x_{n_{A_1}}^{A_1} \cdot (y_{n_{A_1}-1}^{A_1} - y_{A_2}) + \right. \\ \left. + x_{A_2} \cdot (y_{n_{A_1}}^{A_1} - y_1^{A_2}) + \dots + x_{n_{A_p}}^{A_p} \cdot (y_{n_{A_p}-1}^{A_p} - y_{A_1}) \right]. \quad (2.34)$$

У випадку, коли геометричний об'єкт  $S_2$  належить об'єкту  $S_1$  ( $S_2 \subset S_1$ , рис. 2.10), то  $\omega$ -функція буде дорівнювати площі геометричного об'єкта  $S_2$ , вираз (2.35).

$$\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[ x_{2,1} \cdot (y_{2,n} - y_{2,2}) + \sum_{i=2}^{n-1} x_{2,i} \cdot (y_{2,i-1} - y_{2,i+1}) + x_{2,n} \cdot (y_{2,n-1} - y_{2,1}) \right]. \quad (2.35)$$

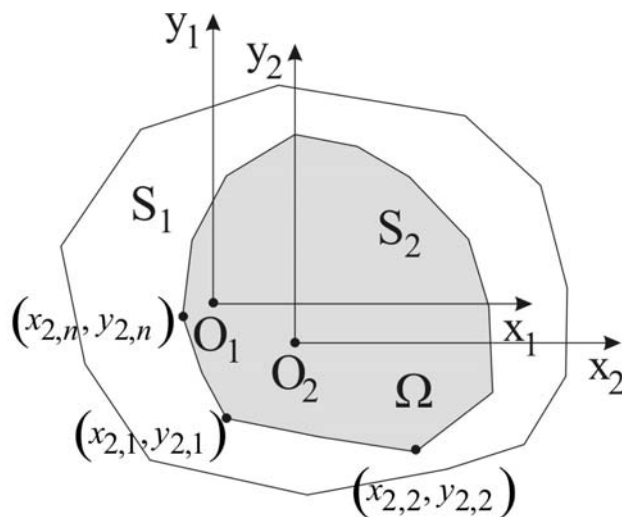


Рисунок 2.10

Якщо геометричні об'єкти  $S_1$  і  $S_2$  не перетинаються (торкаються), що наведено на рис. 2.11 та 2.12, то  $\omega_{\Omega} = 0$ .

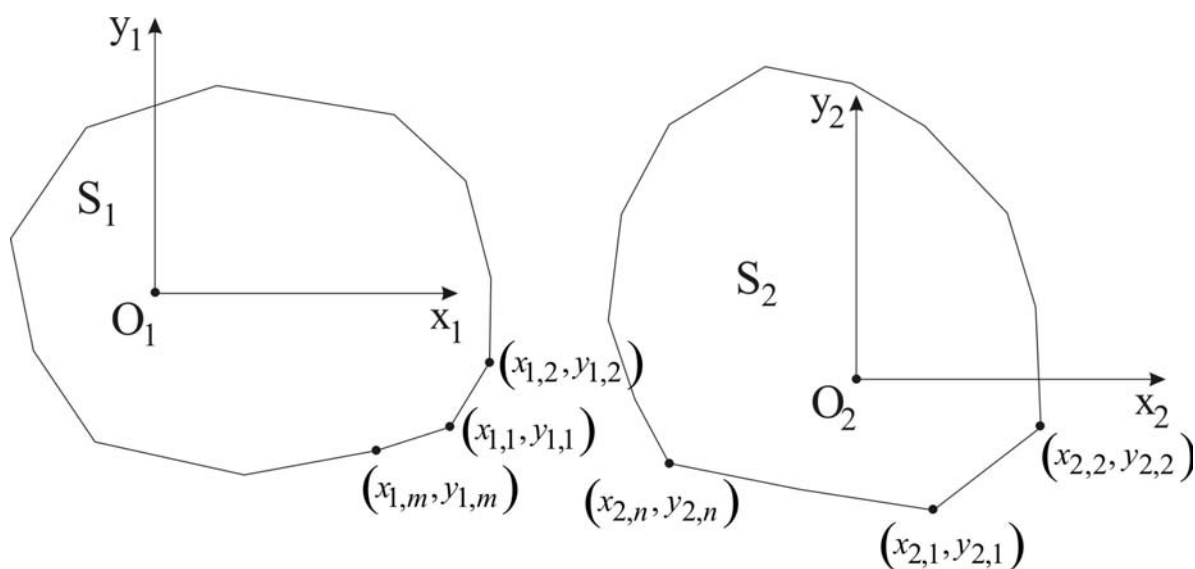


Рисунок 2.11



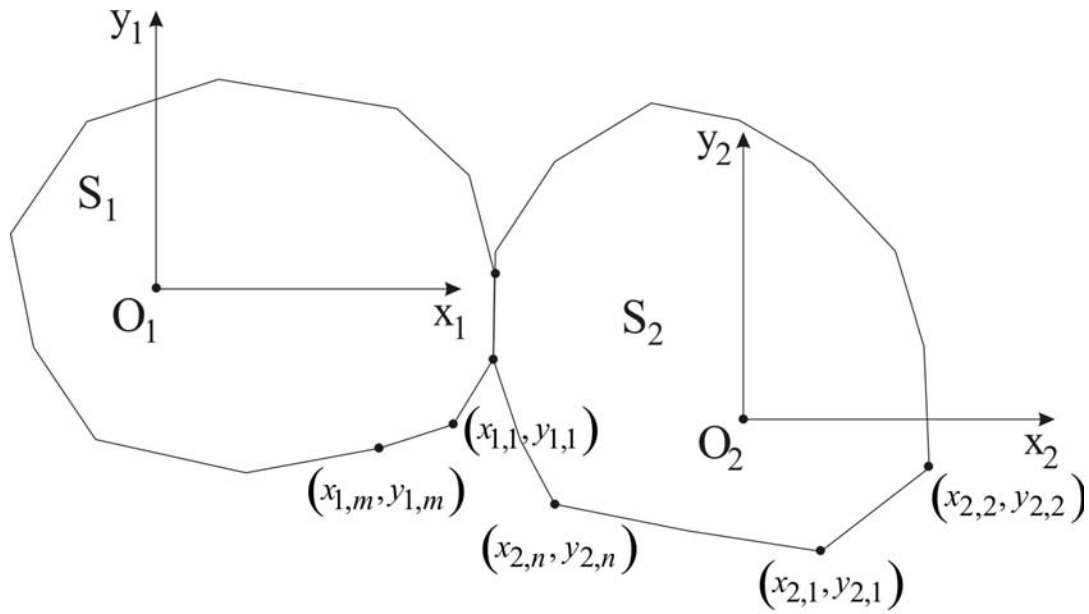


Рисунок 2.12

Таким чином, у загальному випадку  $\omega$ -функцію для 2-х опуклих однозв'язних багатокутників можна записати наступним чином:

$$\omega_{\Omega} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ x_{2,1} \cdot (y_{2,n} - y_{2,2}) + \sum_{i=2}^{n-1} x_{2,i} \cdot (y_{2,i-1} - y_{2,i+1}) + x_{2,n} \cdot (y_{2,n-1} - y_{2,1}) \right], & \text{і } \delta \text{è } S_1 \cap S_2 = S_2; \\ \frac{1}{2} \left[ x_{A_1} \cdot (y_{n_{A_p}}^{A_p} - y_1^{A_1}) + \dots + x_{n_{A_1}}^{A_1} \cdot (y_{n_{A_1}-1}^{A_1} - y_{A_2}) + x_{A_2} \cdot (y_{n_{A_1}}^{A_1} - y_1^{A_2}) + \dots + x_{n_{A_p}}^{A_p} \cdot (y_{n_{A_p}-1}^{A_p} - y_{A_1}) \right], & \text{і } \delta \text{è } S_1 \cap S_2 \neq \emptyset; \\ 0, & \text{і } \delta \text{è } S_1 \cap S_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (2.36)$$

*Властивість 2.15.* Якщо об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  такі, що може існувати ситуація  $S_1 \cap S_2 = S_1$ , то у виразі (2.36) координати вершин об'єкта  $S_2$  замінюються координатами вершин об'єкта  $S_1$ .

У виразах (2.31)÷(2.36) не наведено аргументи  $\omega$ -функцій. Разом з тим, зрозуміло, що даними аргументами є координати вершин

та положення початків локальних систем координат відповідних геометричних об'єктів.

Геометрична інтерпретація випадку б) наведена на рис. 2.13 та 2.14.

Для випадку, зображеного на рис. 2.13,  $\omega$ -функція записується аналогічно (2.31). Якщо геометричні об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  взаємодіють так, як це наведено на рис. 2.14, то  $\omega$ -функція буде мати наступний вигляд:

$$\omega_{\Omega} = \omega_{\Omega_1} + \omega_{\Omega_2}, \tag{2.37}$$

де  $\omega_{\Omega_1}$  і  $\omega_{\Omega_2}$  записуються аналогічно (2.31).

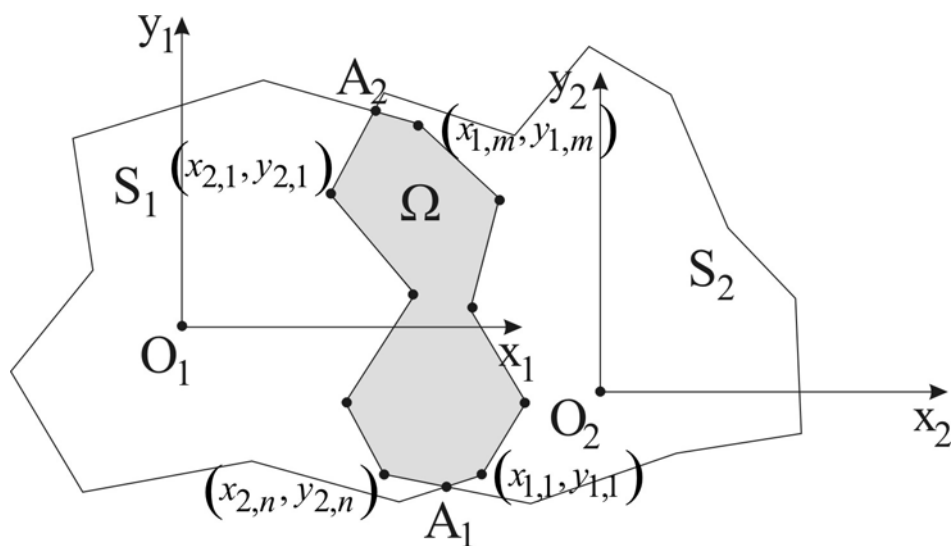


Рисунок 2.13

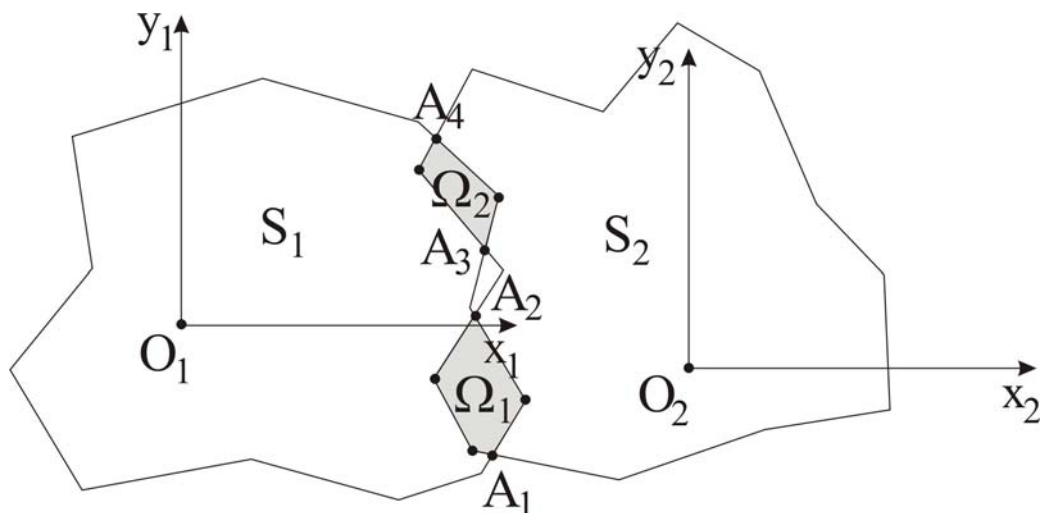


Рисунок 2.14

В загальному випадку,  $\omega$ -функція для двох однозв'язних неопуклих багатокутників записується так:

$$\omega_{\Omega} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ x_{2,1} \cdot (y_{2,n} - y_{2,2}) + \sum_{i=2}^{n-1} x_{2,i} \cdot (y_{2,i-1} - y_{2,i+1}) + x_{2,n} \cdot (y_{2,n-1} - y_{2,1}) \right], & i \delta \in S_1 \cap S_2 = S_2; \\ \sum_j \omega_{\Omega_j}, & i \delta \in S_1 \cap S_2 \neq \emptyset; \\ 0, & i \delta \in S_1 \cap S_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (2.38)$$

Для даного випадку також має місце властивість 2.15. Геометрична інтерпретація випадку в) наведена на рис. 2.15.

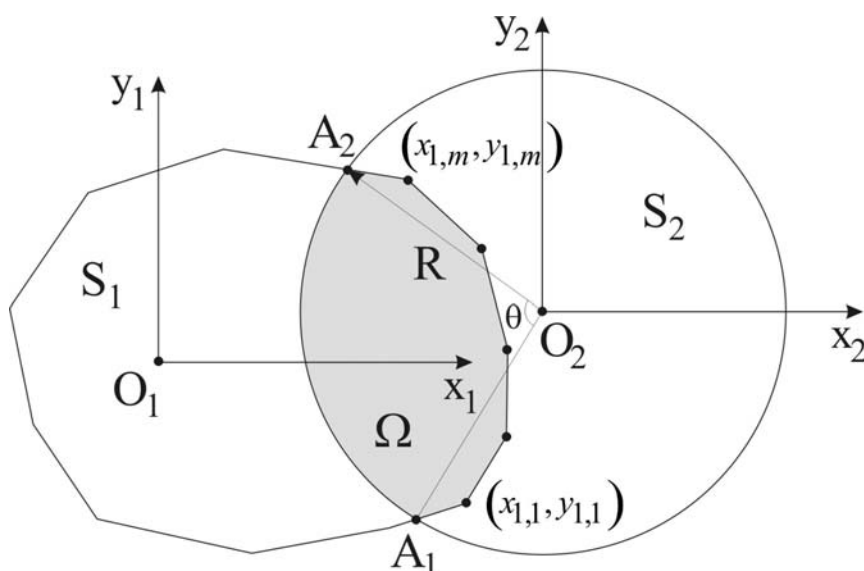


Рисунок 2.15

Тут  $\omega$ -функція приймає наступний вигляд:

$$\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[ x_{A_1} \cdot (y_{A_2} - y_{1,1}) + x_{1,1} \cdot (y_{A_1} - y_{1,2}) + \sum_{i=2}^{m-1} x_{1,i} \cdot (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + x_{1,m} \cdot (y_{1,m-1} - y_{A_2}) + x_{A_2} \cdot (y_{1,m} - y_{A_1}) + R^2 (\theta - \sin \theta) \right]. \quad (2.39)$$

Розглянемо наступні варіанти взаємодії геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , що наведені на рис. 2.16 та 2.17. Для зазначених варіантів  $\omega$ -функція буде мати вигляд (2.40) та (2.41) відповідно.

$$\omega_{\Omega} = \pi R^2. \quad (2.40)$$

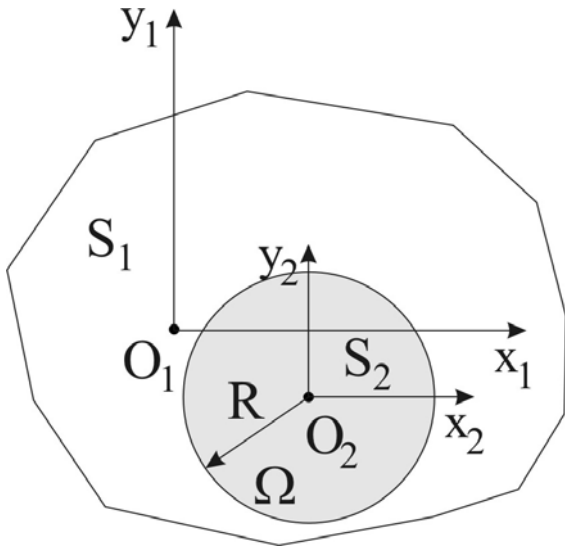


Рисунок 2.16

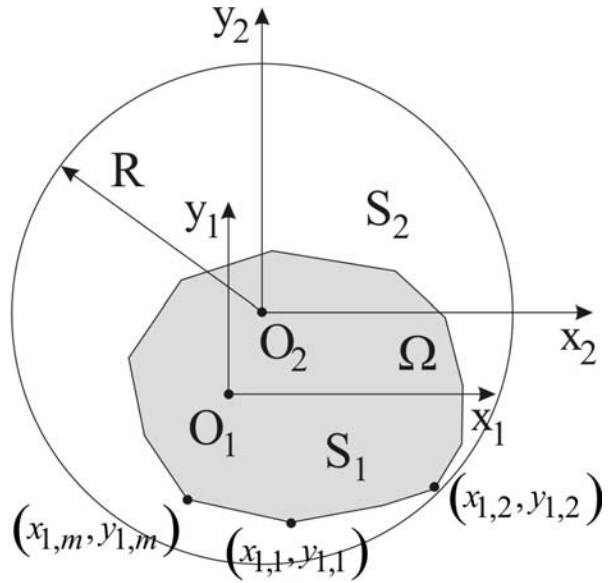


Рисунок 2.17

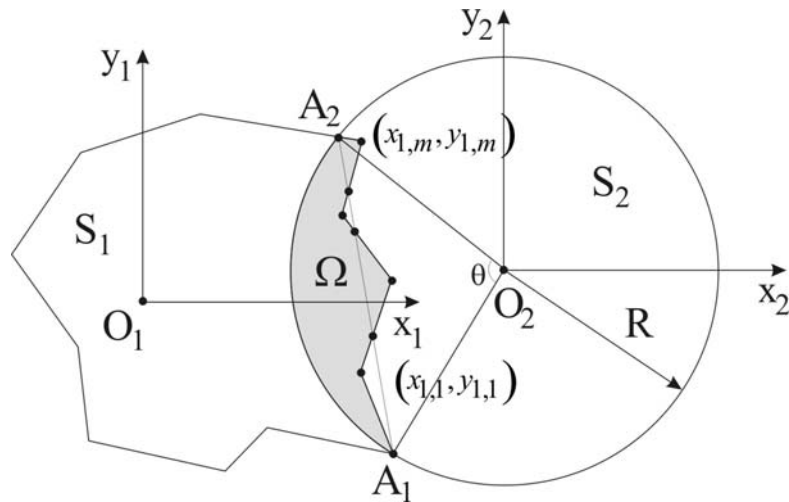
$$\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[ x_{1,1} \cdot (y_{1,m} - y_{1,2}) + \sum_{i=2}^{m-1} x_{1,i} \cdot (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + x_{1,m} \cdot (y_{1,m-1} - y_{1,1}) \right]. \quad (2.41)$$

В загальному випадку,  $\omega$ -функція для двох однозв'язних опуклого багатокутника та кола записується так:

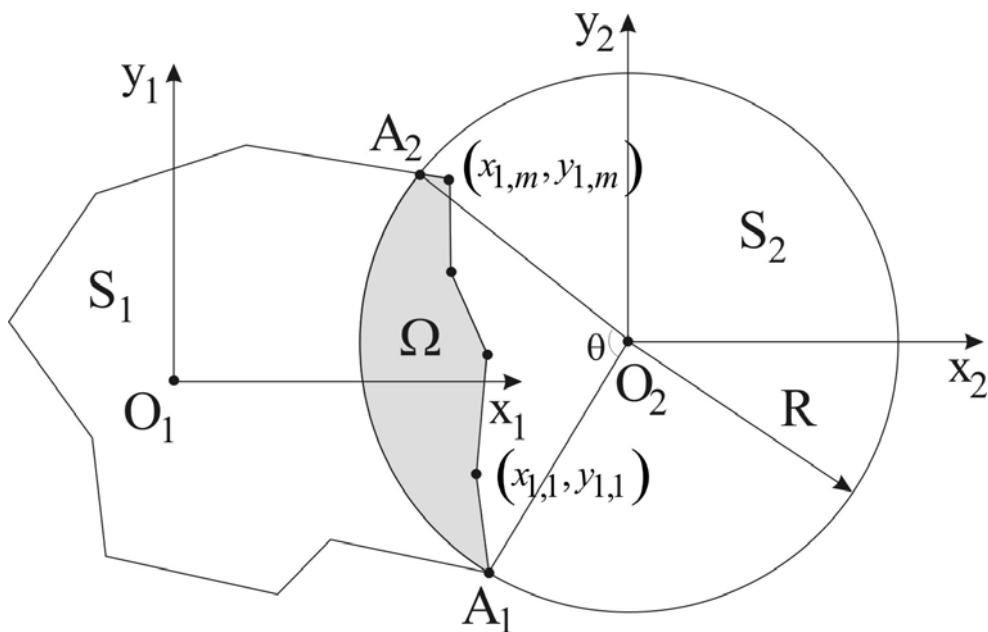
$$\omega_{\Omega} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ x_{1,1} \cdot (y_{1,m} - y_{1,2}) + \sum_{i=2}^{m-1} x_{1,i} \cdot (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + x_{1,m} \cdot (y_{1,m-1} - y_{1,1}) \right], & \text{нпу } S_1 \cap S_2 = S_1; \\ \frac{1}{2} \left[ x_{A_1} \cdot (y_{A_2} - y_{1,1}) + x_{1,1} \cdot (y_{A_1} - y_{1,2}) + \sum_{i=2}^{m-1} x_{1,i} \cdot (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + x_{1,m} \cdot (y_{1,m-1} - y_{A_2}) + x_{A_2} \cdot (y_{1,m} - y_{A_1}) + R^2 (\theta - \sin \theta) \right], & \text{нпу } S_1 \cap S_2 \neq \emptyset; \\ 0, & \text{нпу } S_1 \cap S_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (2.42)$$

*Властивість 2.16.* Якщо об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  такі, що може існувати ситуація  $S_1 \cap S_2 = S_2$ , то у виразі (2.42) використовується функція виду (2.40).

Геометрична інтерпретація випадку  $\varrho$ ) наведена на рис. 2.18 та 2.19.



**Рисунок 2.18**



**Рисунок 2.19**

Для взаємодії об'єктів, що наведена на рис. 2.18,  $\omega$ -функція буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\omega_{\Omega} = \frac{1}{2} & \left[ \left\{ x_{1,i} (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + x_{1,i+1} (y_{1,i} - y_{1,i-1}) + \right. \right. \\
& + x_{1,i-1} (y_{1,i+1} - y_{1,i-1}) + x_{1,m} (y_{1,m-1} - y_{A_2}) + x_{A_2} (y_{1,m} - y_{1,m-1}) + \\
& + x_{1,m-1} (y_{A_2} - y_{1,m}) \left. \right\} - \left\{ x_{1,j} (y_{1,j+1} - y_{1,j-1}) + x_{1,j-1} (y_{1,j} - y_{1,j+1}) + \right. \\
& + x_{1,j+1} (y_{1,j-1} - y_{1,j}) + x_{1,1} (y_{1,2} - y_{A_1}) + x_{A_1} (y_{1,1} - y_{1,2}) + \\
& \left. \left. + x_{1,2} (y_{A_1} - y_{1,1}) \right\} + R^2 (\theta - \sin \theta) \right].
\end{aligned} \quad (2.43)$$

Для випадку, що наведений на рис. 2.19,  $\omega$ -функція має вираз, аналогічний до (2.39).

Розглянемо взаємодію двох геометричних об'єктів, що наведені на рис. 2.20.

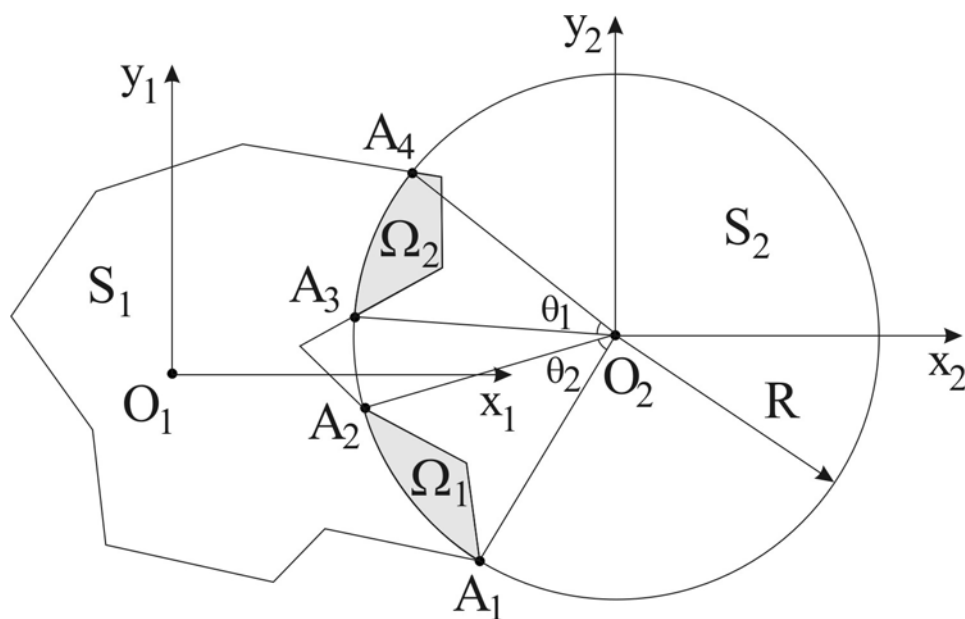


Рисунок 2.20

В даному випадку  $\omega$ -функція має наступний вигляд:

$$\omega_{\Omega} = \omega_{\Omega_1} + \omega_{\Omega_2}, \quad (2.44)$$

де  $\omega_{\Omega_1}$  і  $\omega_{\Omega_2}$  записуються аналогічно (2.39) або (2.43).

В загальному випадку  $\omega$ -функція для неопуклого багатокутника і кола буде мати наступний вираз:

$$\omega_{\Omega} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ x_{1,1} \cdot (y_{1,m} - y_{1,2}) + \sum_{i=2}^{m-1} x_{1,i} \cdot (y_{1,i-1} - y_{1,i+1}) + \right. \\ \left. + x_{1,m} \cdot (y_{1,m-1} - y_{1,1}) \right], & \text{і } \delta \in S_1 \cap S_2 = S_1; \\ \sum_j \omega_{\Omega_j}, & \text{і } \delta \in S_1 \cap S_2 \neq \emptyset; \\ 0, & \text{і } \delta \in S_1 \cap S_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (2.45)$$

При цьому, є характерною властивість 2.16.

Геометрична інтерпретація випадку д) наведена на рис. 2.21.

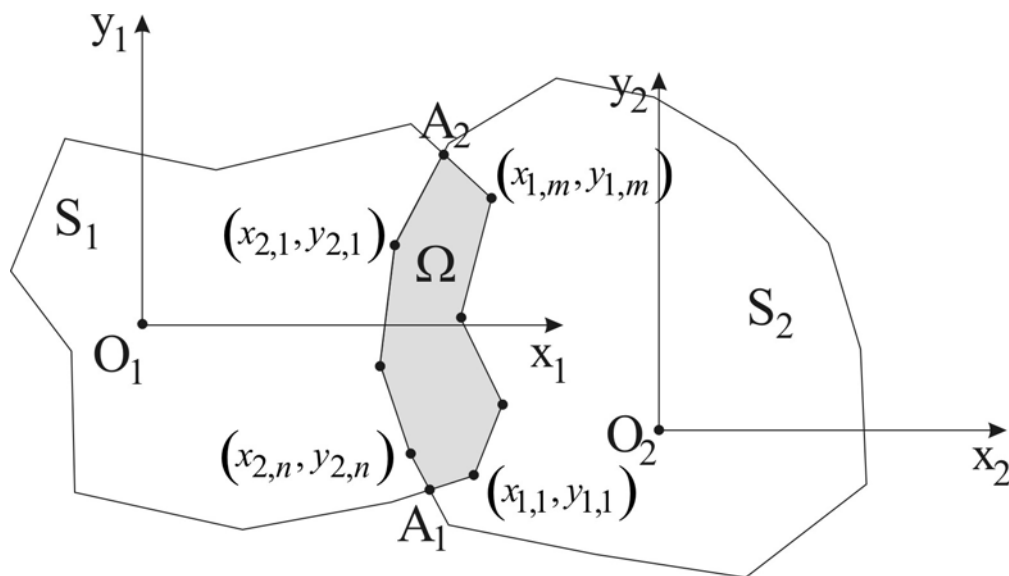


Рисунок 2.21

Для даного випадку  $\omega$ -функція записується аналогічно до взаємодії двох неопуклих однозв'язних багатокутників, тобто в загальному випадку може бути представленою виразом (2.38).

Аналіз розглянутих випадків взаємодії геометричних об'єктів покриття дозволив сформулювати наступну властивість.

**Властивість 2.17.** Якщо метричні характеристики геометричних об'єктів, що мають покривати задану область, є змінними, то це призводить до зміни кількості доданків у виразах (2.31)÷(2.45).

Інакше кажучи, аналітичний вираз для  $\omega$ -функції можливо отримати лише у певний момент часу. Більш того, в загальному випадку  $\omega$ -функція для геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками є надмірно громіздкою, що практично унемо-

жливлює одержання аналітичного розв'язку поставленої задачі. Разом з тим, отримана множина  $\omega$ -функцій може бути використаною для розробки моделі раціонального покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Розглянемо геометричні властивості  $\omega$ -функцій для плоских об'єктів зі змінними метричними характеристиками.

### 2.3 Побудова $\omega$ -поверхонь в задачах оптимізаційного покриття геометричних об'єктів

Для розробки ефективного та обґрунтованого метода розв'язання задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками необхідно зрозуміти, що являють собою умови оптимального покриття з геометричної точки зору, особливо за умови складності аналітичного подання  $\omega$ -функцій для зазначених об'єктів покриття. У зв'язку з цим, розглянемо наступні твердження та визначення.

*Твердження 2.1.*  $\omega$ -функція  $\omega_{\Omega}(p_1; \dots; p_N; x_1, y_1; \dots; x_N, y_N) = 0$ , в загальному випадку, утворює  $\omega$ -гіперповерхню у просторі  $R^{2N+1+2\sum_{i=1}^N n_i}$ , де  $n_i$  - кількість вершин  $i$ -го багатокутника покриття.

Аналогічні твердження можна зробити для кіл, а також для кіл і багатокутників.

*Приклад 2.1.* Розглянемо  $\omega$ -функцію для двох прямокутників  $S_1(a_1, b_1)$  та  $S_2(a_2, b_2)$ :  $\omega_{\Omega}(a_1, b_1; a_2, b_2; x_1, y_1; x_2, y_2) = 0$ . В даному випадку  $\omega$ -функція утворює гіперповерхню у просторі  $R^9$  (розмірність простору відповідає кількості параметрів  $\omega$ -функції).

*Властивість 2.18.* Розглянемо  $\omega$ -функцію для двох геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$   $\omega_{\Omega}(p_1; p_2; x_1, y_1; x_2, y_2) = 0$ . При фіксації координат вершин обох об'єктів відносно їх локальних систем координат та початку локальної системи координат об'єкта  $S_1$  можна отримати тривимірну проекцію  $\omega$ -гіперповерхні  $\omega_{\Omega}(p_2) = \omega_{\Omega}(x_2, y_2)$ .

*Визначення 2.1.* Множину точок, координати яких задовольняють рівнянню  $\omega_{\Omega}(p_2) = \omega_{\Omega}(x_2, y_2)$  назвемо  $\omega$ -поверхнею.

В роботі запропоновано спосіб комп'ютерного моделювання  $\omega$ -поверхонь. Для цього розглянемо побудову даних поверхонь на



прикладі взаємодії двох прямокутників  $S_1$  та  $S_2$  зі змінними метричними характеристиками.

Зазначений спосіб полягає в тому, що координати вершин обох прямокутників фіксуються у визначений момент часу, при цьому також фіксується положення локальної системи координат прямокутника  $S_1$ . В подальшому здійснюється комп'ютерне моделювання  $\omega$ -поверхні, яку отримують у дискретному вигляді шляхом обчислення значень  $\omega$ -функції при кожній зміні положення прямокутника  $S_2$ . Надалі відбувається зміна параметрів прямокутника  $S_2$  та відбувається побудова наступної  $\omega$ -поверхні. Таким чином, реалізація запропонованого способу дозволить отримати набір  $\omega$ -поверхонь, що можуть у подальшому бути використані для представлення обмежень та оптимізації цільової функції в задачі покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Для побудови наборів  $\omega$ -поверхонь було розроблене алгоритмічне та програмне забезпечення, головне вікно якого наведене на рис. 2.22.

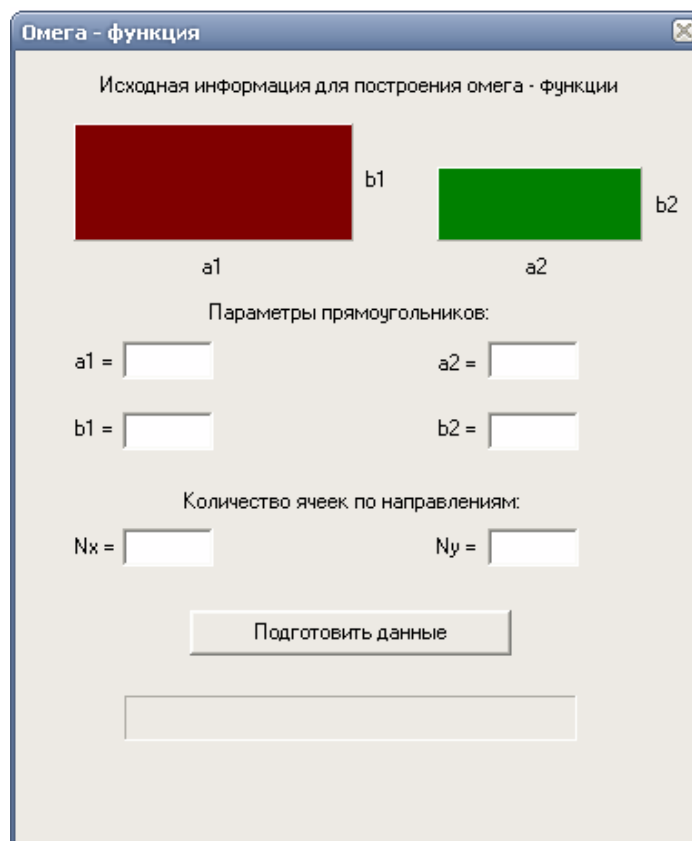


Рисунок 2.22

Дане програмне забезпечення дозволило підготувати чисельні дані для подальшої побудови за допомогою математичного процесора Maple відповідних поверхонь при кожній зміні метричних характеристик та трансляції об'єктів.

Розглянемо побудову  $\omega$ -поверхні при трансляції прямокутника  $S_2$  відносно прямокутника  $S_1$ . Дані прямокутники мають наступні параметри:

$$a_1 = 7; b_1 = 3; a_2 = 5; b_2 = 2.$$

В даному випадку  $\omega$ -поверхня буде мати вигляд, що наведений на рис. 2.23.

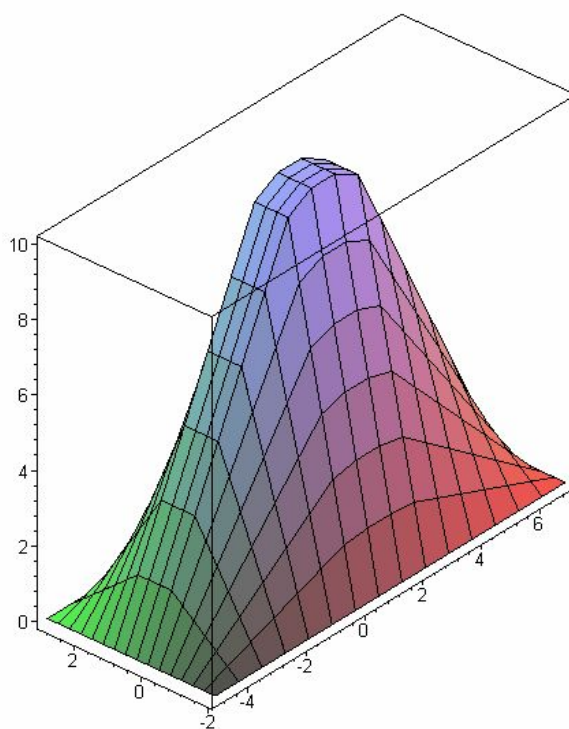
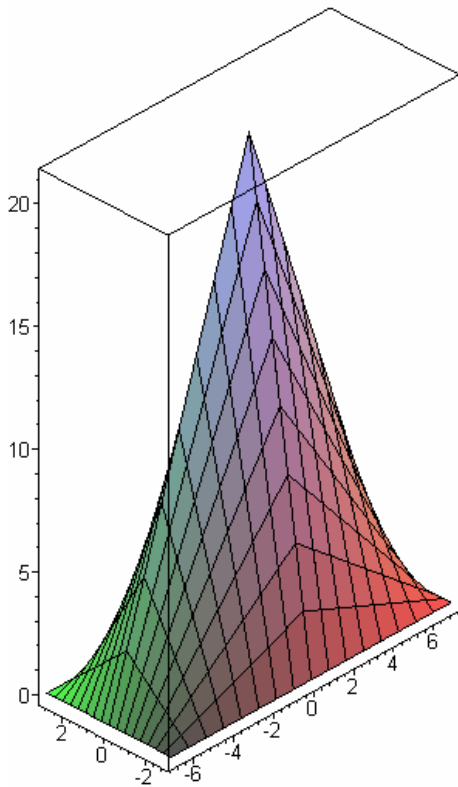


Рисунок 2.23

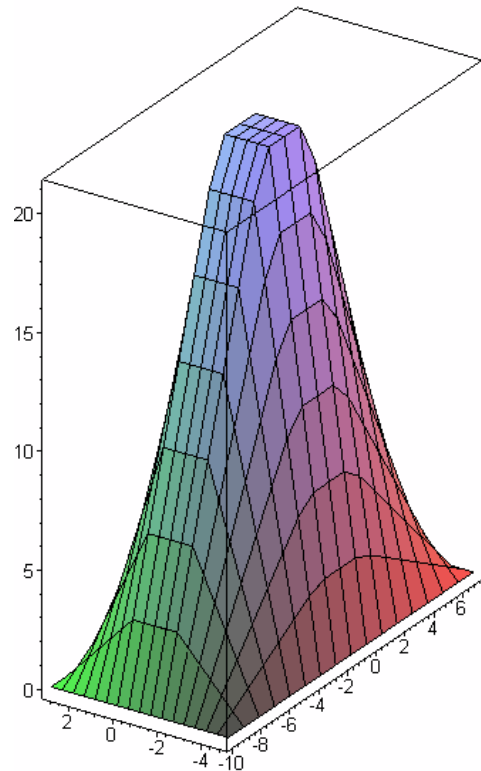
Зафіксуємо параметри прямокутника  $S_1$ , при цьому розміри прямокутника  $S_2$  будуть змінюватись. Нехай  $a_2 = 7$ , а  $b_2 = 3$ . В даному випадку  $\omega$ -поверхня буде мати вигляд, що наведений на рис. 2.24, тобто відбулося перетворення даної поверхні.

Якщо параметри прямокутника  $S_2$  приймають значення  $a_2 = 10$ ,  $b_2 = 5$ , то  $\omega$ -поверхня перетвориться на таку, що наведена на рис. 2.5.

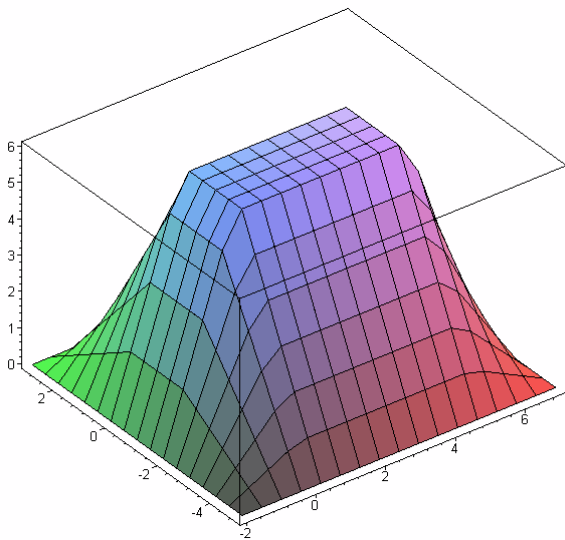
Подальші зміни параметрів прямокутника  $S_2$  призводять до трансформацій  $\omega$ -поверхні, що наведені на рис. 2.26 – 2.30.



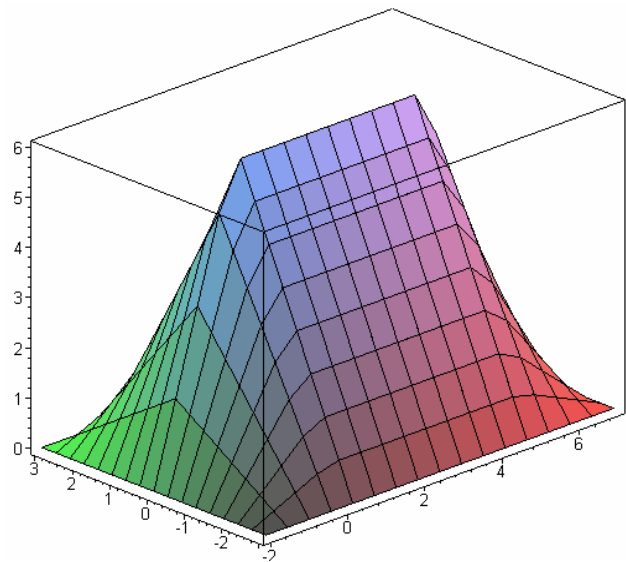
**Рисунок 2.4**



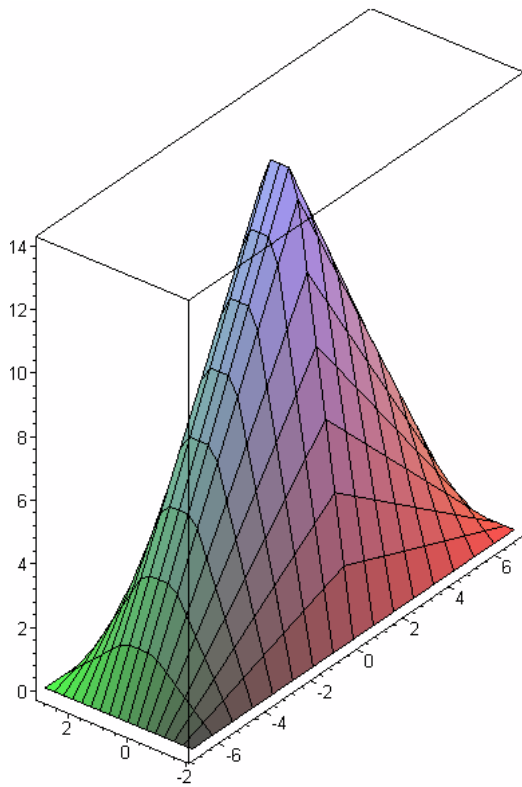
**Рисунок 2.5**



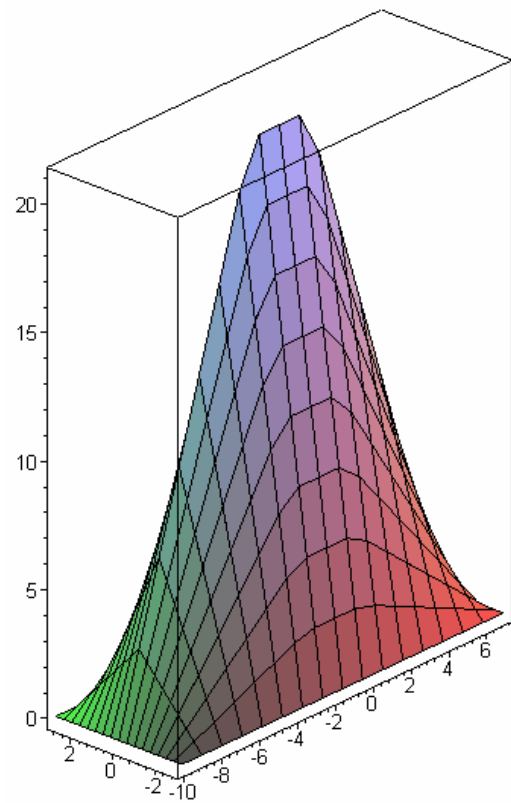
**Рисунок 2.26 -  $\omega$ -поверхня**  
( $a_2 = 2, b_2 = 5$ )



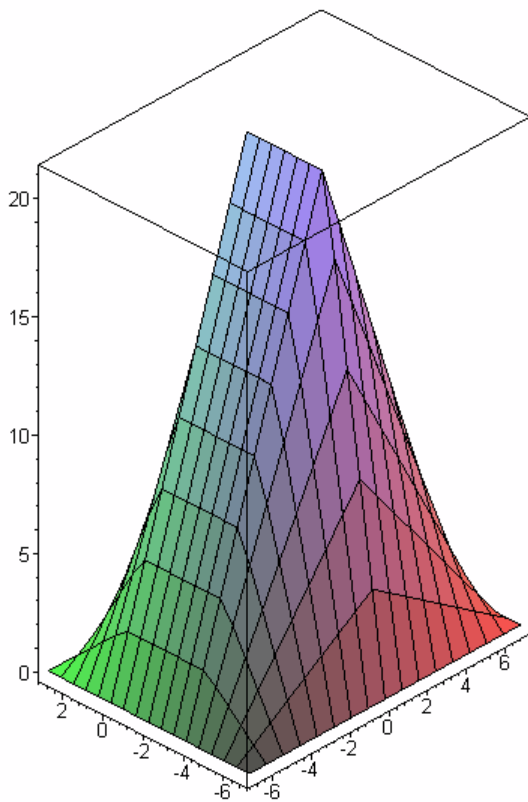
**Рисунок 2.27 -  $\omega$ -поверхня**  
( $a_2 = 2, b_2 = 3$ )



**Рисунок 2.28** -  $\omega$ -поверхня  
( $a_2 = 7, b_2 = 2$ )



**Рисунок 2.29** -  $\omega$ -поверхня  
( $a_2 = 10, b_2 = 3$ )



**Рисунок 2.30** -  $\omega$ -поверхня  
( $a_2 = 7, b_2 = 7$ )

Дослідження  $\omega$ -поверхонь дозволило сформулювати твердження та виявити основні їх властивості.

*Твердження 2.2.* Контур, що може бути отриманий шляхом перетину  $\omega$ -поверхні для об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  з площиною  $xOy$ , являє собою 0-рівень  $\Phi$ -функції для зазначених об'єктів.

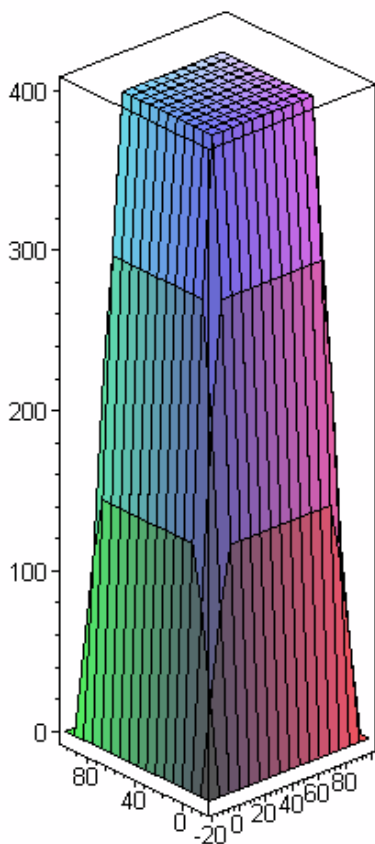
*Твердження. 2.3.*  $\omega$ -поверхня для геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  зі змінними метричними характеристиками являє собою об'єднання фрагментів поверхонь, що можуть бути отримані під час кожної зміни координат вершин (радіусів) відповідних об'єктів (приклад: для прямокутників  $S_1$  та  $S_2$   $\omega$ -поверхня яв-

ляє собою об'єднання фрагментів поверхонь, що наведені на рис. 2.23 – 2.30).

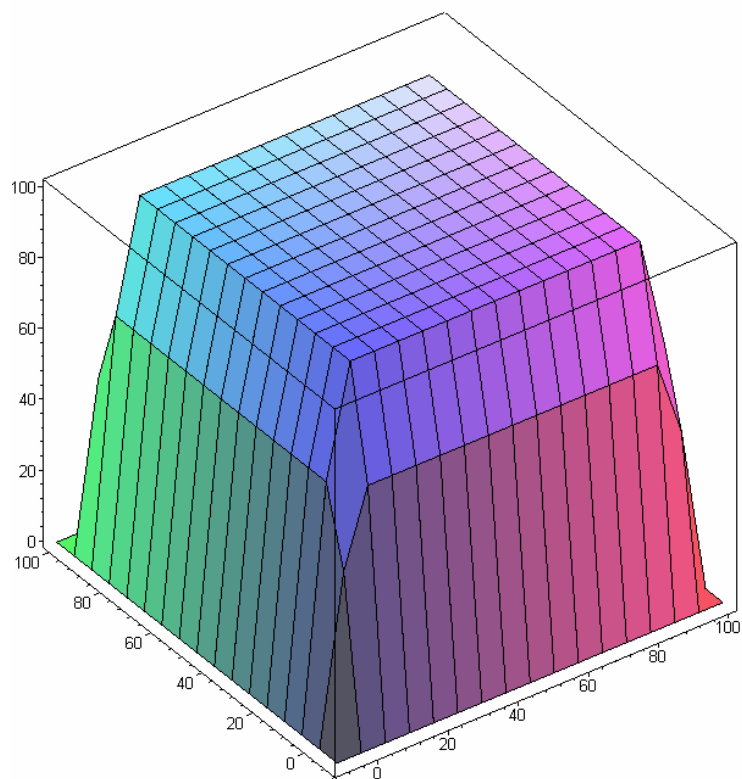
Виходячи з твердження 2.3, можна сформулювати наступну властивість.

*Властивість 2.19.*  $\omega$ -поверхня для геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  зі змінними метричними характеристиками, в загальному випадку, є незв'язною.

Розглянемо  $\omega$ -поверхні для прямокутників  $S_1$  та  $S_2$ , що наведені на рис. 2.31 – 2.33.

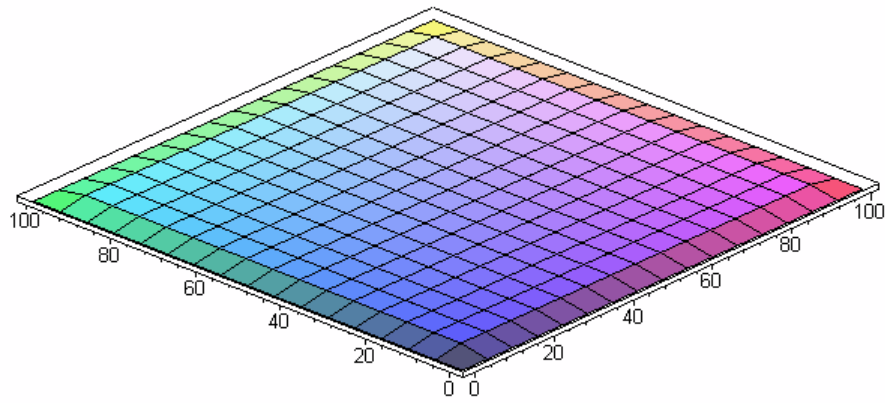


**Рисунок 2.31 -  $\omega$ -поверхня**  
( $a_1 = 100, b_1 = 100, a_2 = 20,$   
 $b_2 = 20$ )



**Рисунок 2.32 -  $\omega$ -поверхня**  
( $a_1 = 100, b_1 = 100, a_2 = 20, b_2 = 20$ )

Дослідження даних поверхонь дозволило виявити наступні властивості  $\omega$ -поверхонь.



**Рисунок 2.33** -  $\omega$ -поверхня ( $a_1 = 100, b_1 = 100, a_2 = 1, b_2 = 1$ )

*Властивість 2.20.*  $\omega$ -поверхня для геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , що являють собою прямокутники, причому  $a_1 \gg a_2$ , а  $b_1 \gg b_2$ , вироджується у площину, яка є паралельною до  $xOy$  і лежить від неї на відстані, що дорівнює площині об'єкта  $S_2$ .

*Властивість 2.21.* В задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами, початки локальних систем координат яких мають розташовуватися на фіксованих місцях,  $\omega$ -поверхня буде являти собою дискретно-подану поверхню.

Таким чином, використовуючи виявлені властивості  $\omega$ -поверхонь, необхідно розробити ефективний метод розв'язання задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

## РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЬ ТА МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЙНОГО ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ ОБЛАСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ ЗІ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

### 3.1 Загальна модель оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

В розділі 2 наведено постановку задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками та розроблено апарат формалізації обмежень задачі за допомогою удосконалених  $\omega$ -функцій покриття. Проведені дослідження дозволили розробити загальну модель оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, яка має наступний вигляд:

$$\min_W N, \quad (3.1)$$

де  $W$ :

$$\omega_{\Omega} \left( \begin{matrix} p_N \\ \bigcup_{i=1}^N S_i \end{matrix}; p_0; 0, 0; x_0, y_0 \right) = S^0; \quad (3.2)$$

$$p_N = \left\{ x_1^*, y_1^*; x_2^*, y_2^*; \dots; x_n^*, y_n^* \right\};$$

$$p_0 = \left\{ x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n} \right\};$$

$$\omega_{\Omega} (p_i; p_j; x_i, y_i; x_j, y_j) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = i + 1, \dots, N; \quad (3.3)$$

$$\{p_i\} = \left\{ x_{i,1}, y_{i,1}; x_{i,2}, y_{i,2}; \dots; x_{i,n_i}, y_{i,n_i} \right\};$$

$$\{p_j\} = \left\{ x_{j,1}, y_{j,1}; x_{j,2}, y_{j,2}; \dots; x_{j,n_j}, y_{j,n_j} \right\};$$

$$\omega_{\Omega}(p_i; p_{0,v}; x_i, y_i; x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad v = v_1, v_2, \dots, v_n; \quad (3.4)$$

$$\{p_{0,v}\} = \left\{ x_{0,1}^v, y_{0,1}^v; x_{0,2}^v, y_{0,2}^v; \dots; x_{0,n^v}^v, y_{0,n^v}^v \right\};$$

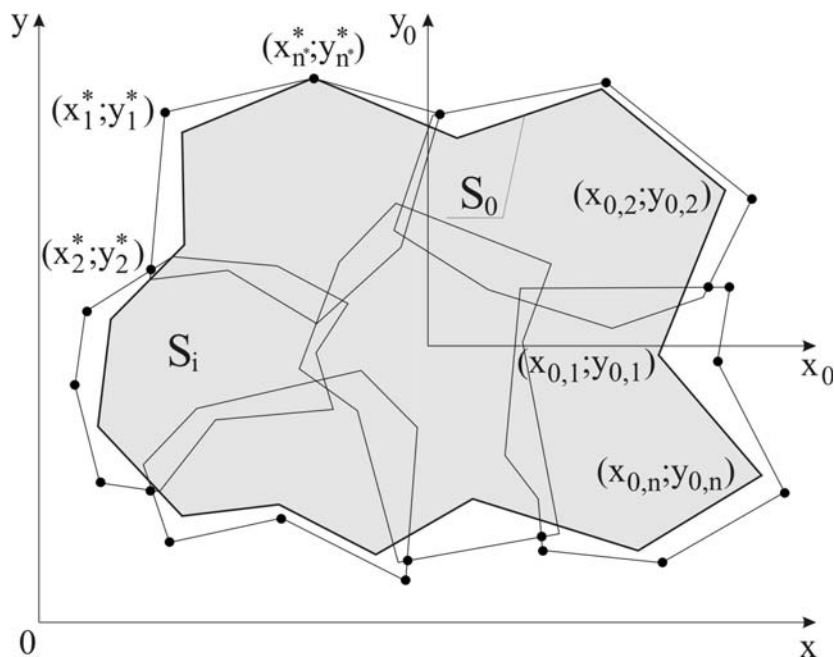
$$\omega_{\Omega}(p_i; p_{cS_0}; x_i, y_i; x_0, y_0) \rightarrow 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad cS_0 \cup S_0 = R^2; \quad (3.5)$$

$$\{p_{cS_0}\} = \{x_{0,n}, y_{0,n}; x_{0,n-1}, y_{0,n-1}; \dots; x_{0,1}, y_{0,1}\};$$

$$p_i \in F_i(S_0); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

В моделі (3.1)÷(3.6):

- обмеження (3.2) описує умову повного покриття області  $S_0$ , що являє собою, в загальному випадку, неопуклий багатокутник, причому  $S^0$  - площа заданої області (рис. 3.1);

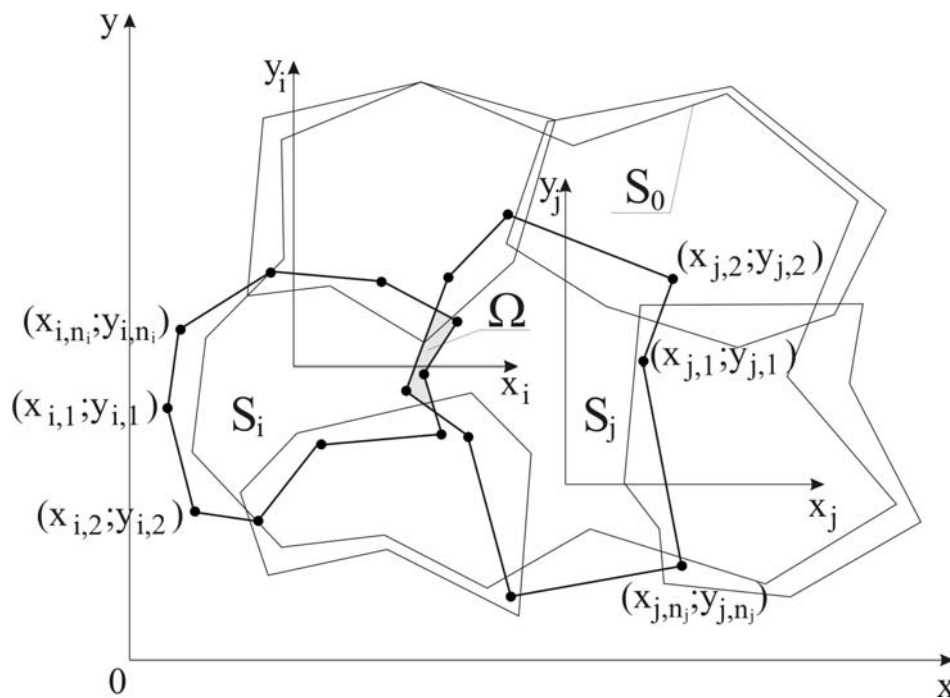


**Рисунок 3.1 - Геометрична інтерпретація умови повного покриття області  $S_0$**

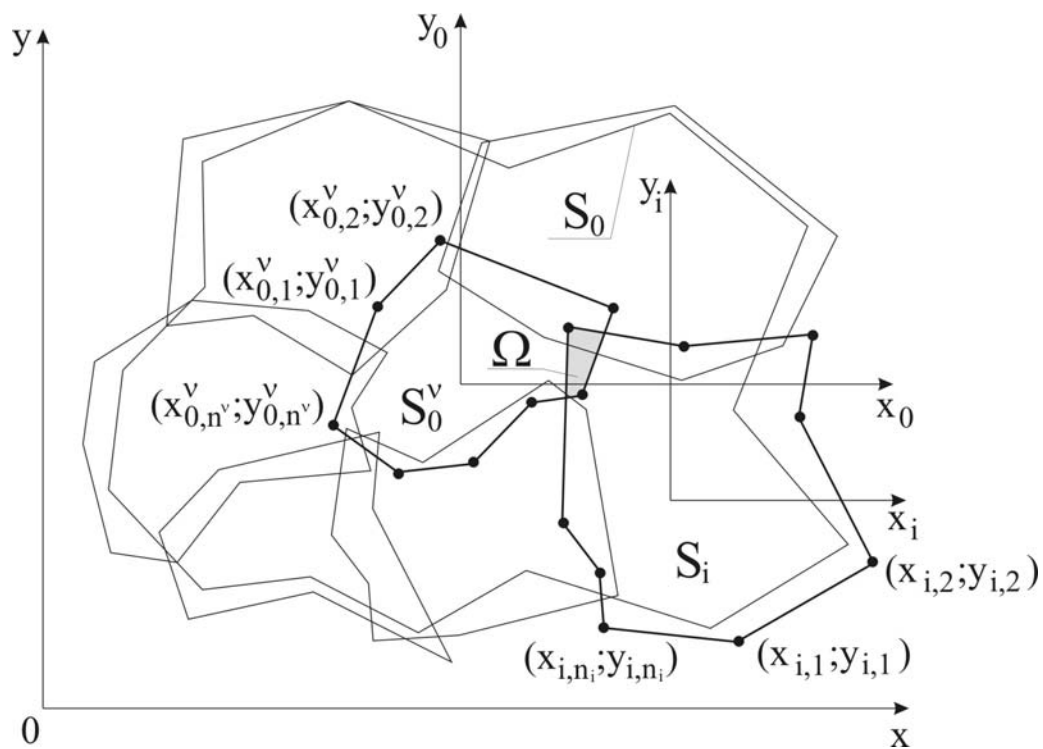
- обмеження (3.3) являє собою умову мінімізації площі взаємного перетину об'єктів покриття  $S_i$  та  $S_j$ , що являють собою, в загальному випадку, неопуклі багатокутники зі змінними метричними характеристиками (рис. 3.2);



- обмеження (3.4) описує умову мінімізації площі перетину об'єктів покриття  $S_i$  з областями заборони  $S_0^v$  (рис. 3.3);

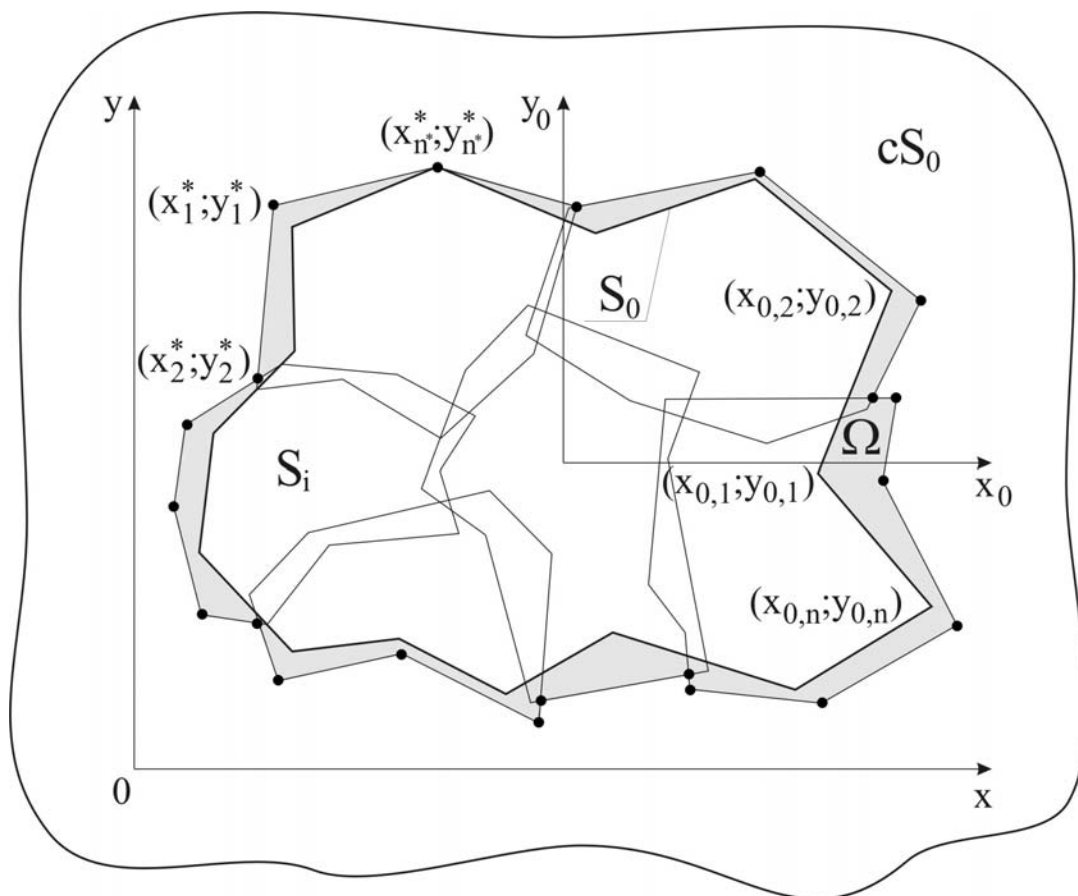


**Рисунок 3.2 - Геометрична інтерпретація умови мінімізації площі взаємного перетину об'єктів покриття  $S_i$  та  $S_j$**



**Рисунок 3.3 - Геометрична інтерпретація умови мінімізації площі перетину об'єктів покриття  $S_i$  з областями заборони  $S_0^v$**

- обмеження (3.5) являє собою умову мінімізації площі перетину об'єктів покриття  $S_i$  з доповненням області  $S_0$  до простору  $R^2$  (рис. 3.4);
- обмеження (3.6) описує обмеження на форми та розміри об'єктів покриття.



**Рисунок 3.4 - Геометрична інтерпретація умови мінімізації площі перетину об'єктів покриття  $S_i$  з доповненням області  $S_0$  до простору  $R^2$**

*Властивість 3.1.* В задачах оптимізаційного покриття початок локальної системи координат області покриття  $S_0$ , як правило, співпадає з початком глобальної системи координат. В цьому випадку в моделі (3.1)÷(3.5)  $\{p_0\} = \{0;0\}$ ,  $\{p_{0,v}\} = \{0;0\}$ ,  $\{p_{cS_0}\} = \{0;0\}$ .

*Властивість 3.2.* В задачі оптимізаційного покриття множини  $L_u^0$ ,  $u = 1,2,\dots,N_u$ , що належить області  $S_0$ , геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, обмеження (3.2) буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \left( P_{L_u,1}^0, \dots, P_{L_u,n_{L_u}}^0, L_u \right) \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) = \\ & = \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \left( P_{L_u,1}^0, \dots, P_{L_u,n_{L_u}}^0, L_u \right) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

*Властивість 3.3.* При максимізації покриття заданої області  $S_0$  або геометричних об'єктів  $L_u^0$ ,  $u = 1, 2, \dots, N_u$ , що належать зазначеній області, обмеження (3.2) та (3.7) будуть мати, відповідно, наступний вигляд:

$$\omega_{\Omega} \left( p_N^N; p_0; 0, 0; x_0, y_0 \right) \rightarrow S^0; \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \left( P_{L_u,1}^0, \dots, P_{L_u,n_{L_u}}^0, L_u \right) \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u^0 \left( P_{L_u,1}^0, \dots, P_{L_u,n_{L_u}}^0, L_u \right) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

*Властивість 3.4.* В тому випадку, коли геометричні об'єкти  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , що покривають задану область  $S_0$ , являють собою кола змінного радіусу  $r_i$ , то модель оптимізаційного покриття прийме наступний вигляд:

$$\min_W N, \quad (3.10)$$

де  $W$ :

$$\omega_{\Omega} \left( p_N^N; p_0; 0, 0; x_0, y_0 \right) = S^0; \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_N \\ \bigcup_{i=1}^N S_i \end{array} \right\} = \left\{ x_1^*, y_1^*, r_1^*; x_2^*, y_2^*, r_2^*; \dots; x_{n^*}^*, y_{n^*}^*, r_{n^*}^* \right\};$$

$$\{p_0\} = \{x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n}\};$$

$$\omega_{\Omega}(r_i; r_j; x_i, y_i; x_j, y_j) \rightarrow 0, \quad i=1, 2, \dots, N; \quad j=i+1, \dots, N; \quad (3.12)$$

$$\omega_{\Omega}(r_i; p_{0,v}; x_i, y_i; x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad i=1, 2, \dots, N; \quad v=v_1, v_2, \dots, v_n; \quad (3.13)$$

$$\{p_{0,v}\} = \left\{ x_{0,1}^v, y_{0,1}^v; x_{0,2}^v, y_{0,2}^v; \dots; x_{0,n^v}^v, y_{0,n^v}^v \right\};$$

$$\omega_{\Omega}(r_i; p_{cS_0}; x_i, y_i; x_0, y_0) \rightarrow 0; \quad i=1, 2, \dots, N; \quad cS_0 \cup S_0 = R^2; \quad (3.14)$$

$$\{p_{cS_0}\} = \{x_{0,n}, y_{0,n}; x_{0,n-1}, y_{0,n-1}; \dots; x_{0,1}, y_{0,1}\};$$

$$p_i \in F_i(S_0); \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (3.15)$$

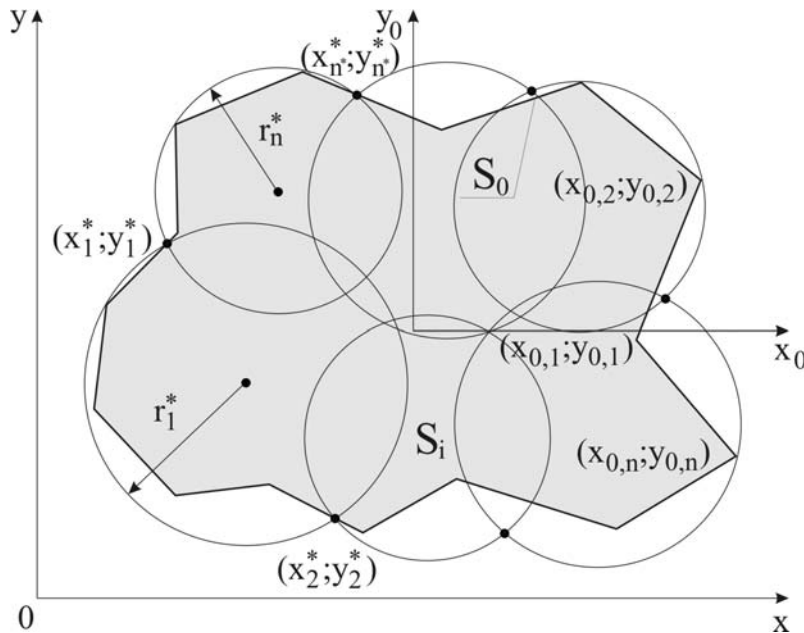


Рисунок 3.5

Слід відзначити, що в результаті покриття області  $S_0$  необхідно побудувати кусочно-неліній геометричний об'єкт  $\bigcup_{i=1}^N S_i$ , тобто вершини даного об'єкта  $(x_i^*; y_i^*)$ ,  $i=1, \dots, n^*$ , з'єднуються відповідними дугами кіл радіусів  $r_i^*$  (рис. 3.5).

*Властивість 3.5.* Модель (3.1)÷(3.6) може бути модифікованою для випадків розв'язання змішаних задач, наприклад, покриття заданої області одночасно як колами змінного радіусу, так і багатокутниками зі змінними та фіксованими метричними характеристиками:

$$\min_W N, \quad (3.16)$$

де  $W$ :

$$\omega_{\Omega} \left( p_{\bigcup_{i=1}^N S_i}; p_0; 0, 0; x_0, y_0 \right) = S^0; \quad (3.17)$$

$$\left\{ p_{\bigcup_{i=1}^N S_i} \right\} = \left\{ x_1^*, y_1^*, r_1^*; x_2^*, y_2^*; \dots; x_n^*, y_n^*, r_n^* \right\};$$

$$\{p_0\} = \{x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n}\};$$

$$\omega_{\Omega} (p_i; p_j; x_i, y_i; x_j, y_j) \rightarrow 0; \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad (3.18)$$

$$j \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad i \neq j;$$

$$\omega_{\Omega} (p_i; r_k; x_i, y_i; x_k, y_k) \rightarrow 0; \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad i \neq k;$$

$$\{p_i\} = \{x_{i,1}, y_{i,1}; x_{i,2}, y_{i,2}; \dots; x_{i,n_i}, y_{i,n_i}\};$$

$$\{p_j\} = \{x_{j,1}, y_{j,1}; x_{j,2}, y_{j,2}; \dots; x_{j,n_j}, y_{j,n_j}\};$$

$$\omega_{\Omega} (p_i; p_{0,v}; x_i, y_i; x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad (3.19)$$

$$v = v_1, v_2, \dots, v_n;$$

$$\omega_{\Omega} (r_k; p_{0,v}; x_k, y_k; x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad i \neq k;$$

$$\{p_{0,\nu}\} = \{x_{0,1}^\nu, y_{0,1}^\nu; x_{0,2}^\nu, y_{0,2}^\nu; \dots; x_{0,n}^\nu, y_{0,n}^\nu\};$$

$$\begin{aligned} \omega_\Omega(p_i; p_{cS_0}; x_i, y_i; x_0, y_0) &\rightarrow 0; \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}; \\ cS_0 \cup S_0 &= R^2; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\omega_\Omega(r_k; p_{cS_0}; x_k, y_k; x_0, y_0) \rightarrow 0; \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad i \neq k;$$

$$\{p_{cS_0}\} = \{x_{0,n}, y_{0,n}; x_{0,n-1}, y_{0,n-1}; \dots; x_{0,1}, y_{0,1}\};$$

$$p_i \in F_i(S_0); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.21)$$

Слід відзначити, що в результаті покриття області  $S_0$  необхідно побудувати геометричний об'єкт  $\bigcup_{i=1}^N S_i$ , вершини якого  $(x_i^*; y_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, n^*$ , з'єднуються відповідними дугами кіл радіусів  $r_i^*$  та відрізками прямих ліній (рис. 3.6).

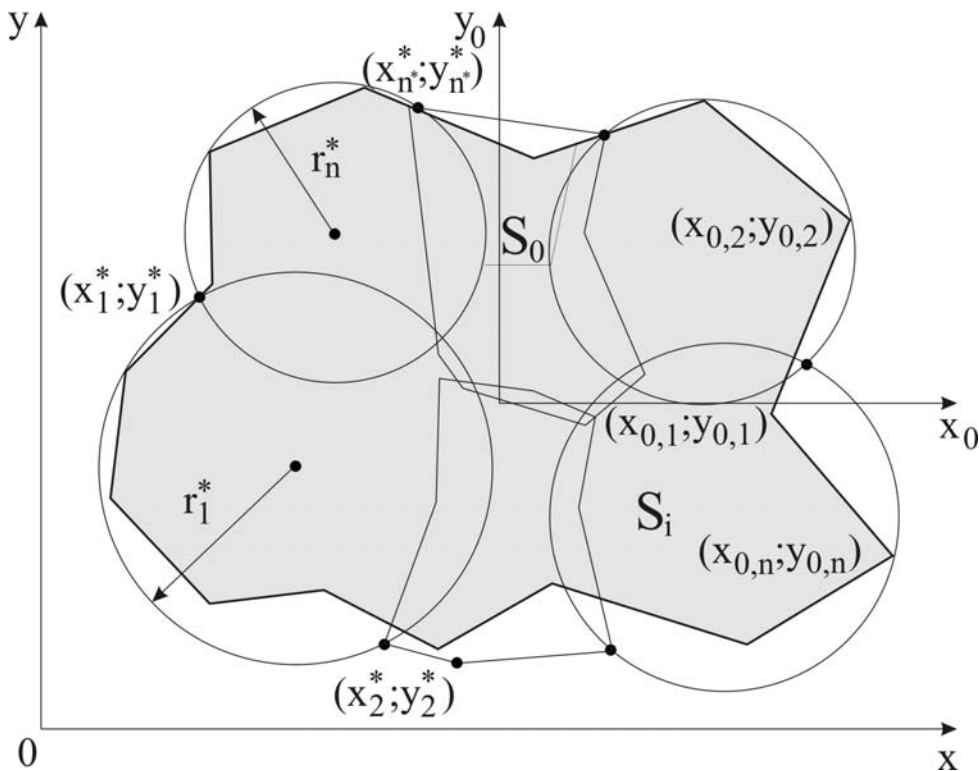


Рисунок 3.6

*Властивість 3.6.* Якщо задано множину точок  $\{O_l(x_l; y_l)\}$ ,  $l=1,2,\dots,N_l$ , в яких мають розміщуватись початки локальних систем координат об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , зі змінними метричними характеристиками, то до моделі (3.1)÷(3.6) додається наступне обмеження:

$$\{x_i; y_i\} \in \{O_l(x_l; y_l)\}; i=1,2,\dots,N; l=1,2,\dots,N_l. \quad (3.22)$$

### 3.2 Область припустимих розв'язків та аналіз особливостей задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

Розглянемо побудову області припустимих розв'язків задачі (3.1)÷(3.6), на наступному прикладі. Нехай покриття області  $S_0$ , що являє собою неопуклий багатокутник і при цьому є багатозв'язною, здійснюється трьома неопуклими багатокутниками  $S_i$ ,  $S_j$  та  $S_k$  (рис. 3.7).

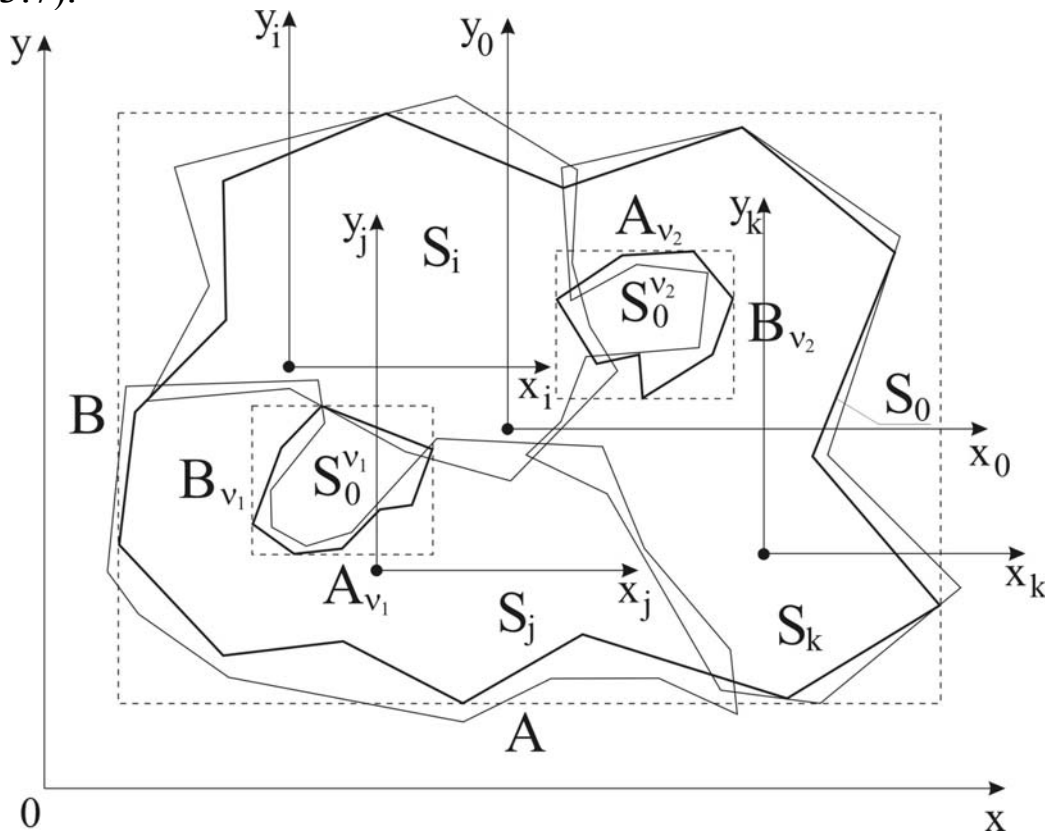


Рисунок 3.7

Слід відзначити, що область припустимих розв'язків задачі оптимізаційного покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками формується обмеженнями даної задачі. Розмірність простору, в якому формується область припустимих розв'язків, визначається кількістю параметрів, що визначаються (є змінними) у процесі розв'язання задачі. В нашому випадку, змінними є як кількість та координати вершин (радіуси), так і положення об'єктів покриття. В загальному випадку, якщо об'єкти покриття являють собою багатокутники, область припусти-

мих розв'язків формується у просторі  $R^{2 \cdot \sum_{i=1}^N (n_i+1)}$ , де  $n_i$  - кількість вершин  $i$ -го багатокутника;  $N$  - кількість об'єктів покриття.

Якщо об'єкти покриття являють собою кола, то область припустимих розв'язків формується у просторі  $R^{3N}$ .

При розв'язанні змішаної задачі, тобто покритті заданої області як багатокутниками, так і колами, область припустимих

розв'язків формується у просторі  $R^{3N' + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N''} (n_i+1)}$ , де  $N'$  - кількість кіл, а  $N''$  - кількість багатокутників, причому  $N' + N'' = N$ .

*Властивість 3.7.* Область припустимих розв'язків задачі оптимізаційного покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками являє собою багатовид у багатовимірному просторі.

Що стосується приклада, наведеного на рис. 3.7, то в даному випадку область припустимих розв'язків формується у просторі  $R^{2 \cdot (n_i + n_j + n_k + 3)}$ .

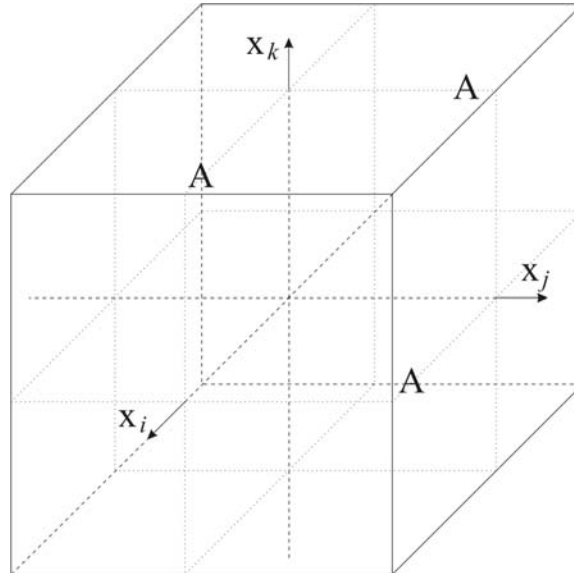
Для того, щоб отримати проекцію області припустимих розв'язків у просторі  $R^3$  та зробити висновки стосовно даної області, зафіксуємо кількість та координати вершин об'єктів  $S_i$ ,  $S_j$  та  $S_k$  відносно локальних систем координат.

Область припустимих розв'язків у просторі  $(x_i, x_j, x_k)$ , що відповідає умові повного покриття області  $S_0$  (3.2), буде мати вигляд, наведений на рис. 3.8.

Таким чином, область припустимих розв'язків являє собою куб з ребрами довжиною  $A$ , причому параметр  $A$  дорівнює довжині

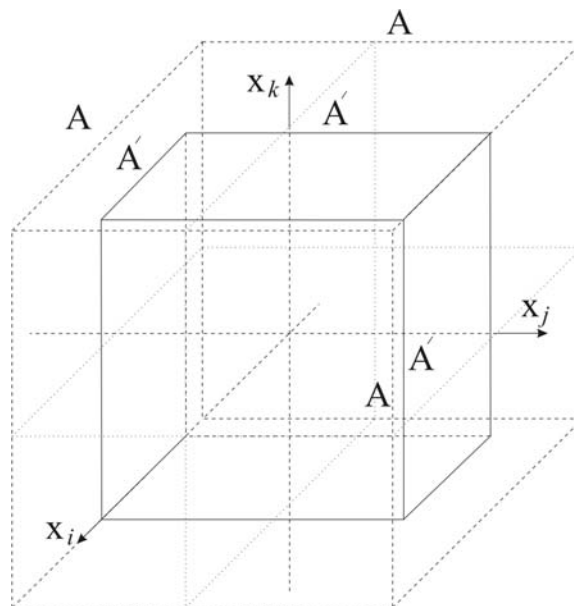


сторони габаритного прямокутника для області  $S_0$ . Це означає, що початки локальних систем координат об'єктів  $S_i$ ,  $S_j$  та  $S_k$  можуть здійснювати переміщення в межах відповідного габаритного прямокутника зі сторонами  $(A; B)$ .



**Рисунок 3.8**

Якщо до обмеження (3.2) додати умову мінімізації площі перетину об'єктів покриття з доповненням області  $S_0$  до простору  $R^2$  (3.5), то область припустимих розв'язків буде мати вигляд, що наведений на рис. 3.9.



**Рисунок 3.9**

Слід зауважити, що врахування умови (3.5) призводить до того, що область припустимих розв'язків буде також мати вигляд куба з ребрами довжиною  $A'$ , причому  $A' \leq A$ . Інакше кажучи, відбувається стискання даної області.

Додавання до обмежень (3.2) та (3.5) умови (3.4), тобто умови мінімізації площі перетину об'єктів покриття з областями заборони  $S_0^{V1}$  та  $S_0^{V2}$ , призводить до того, що область припустимих розв'язків прийме вигляд, що наведений на рис. 3.10.

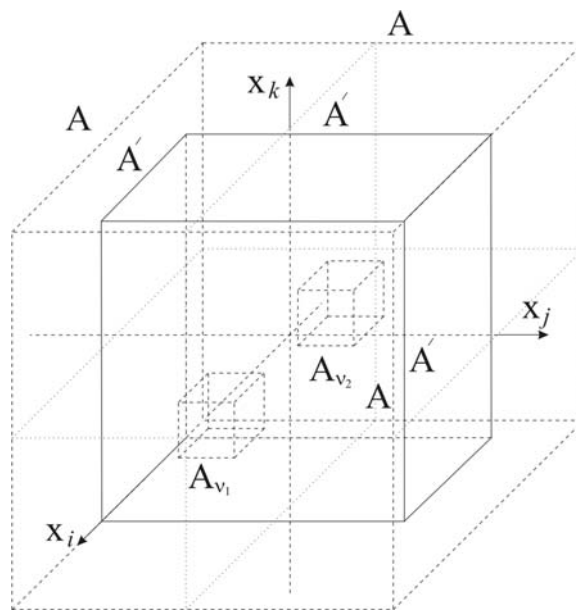


Рисунок 3.10

Слід зазначити, що область припустимих розв'язків в даному випадку є багатозв'язною, тобто з куба з ребрами довжиною  $A'$  «ви-різано» куби з ребрами, що мають довжини  $A_{V1}$  та  $A_{V2}$  відповідно, причому  $A_{V1}$  - довжина сторони габаритного прямокутника для області заборони  $S_0^{V1}$ , а  $A_{V2}$  - довжина сторони габаритного прямокутника для області заборони  $S_0^{V2}$ .

Додавання до вищезазначених обмежень умов (3.3) та (3.6) перетворює область припустимих розв'язків до такої, що наведена на рис. 3.11.

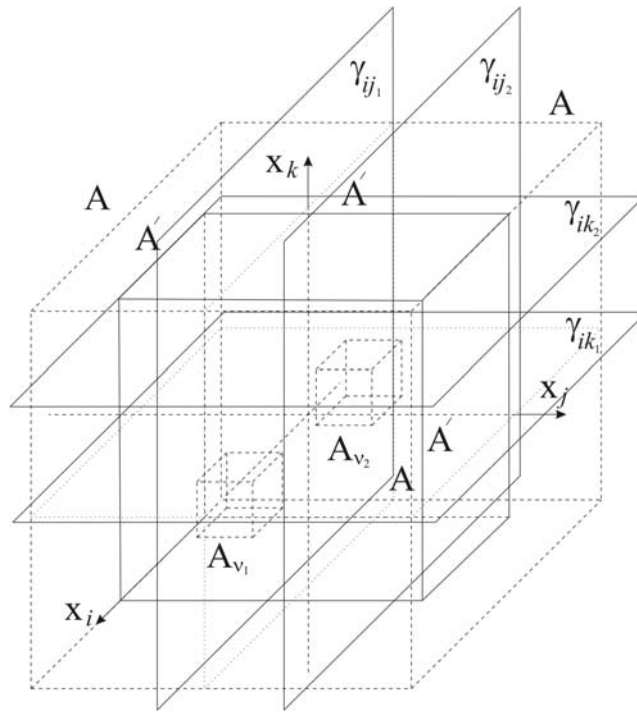
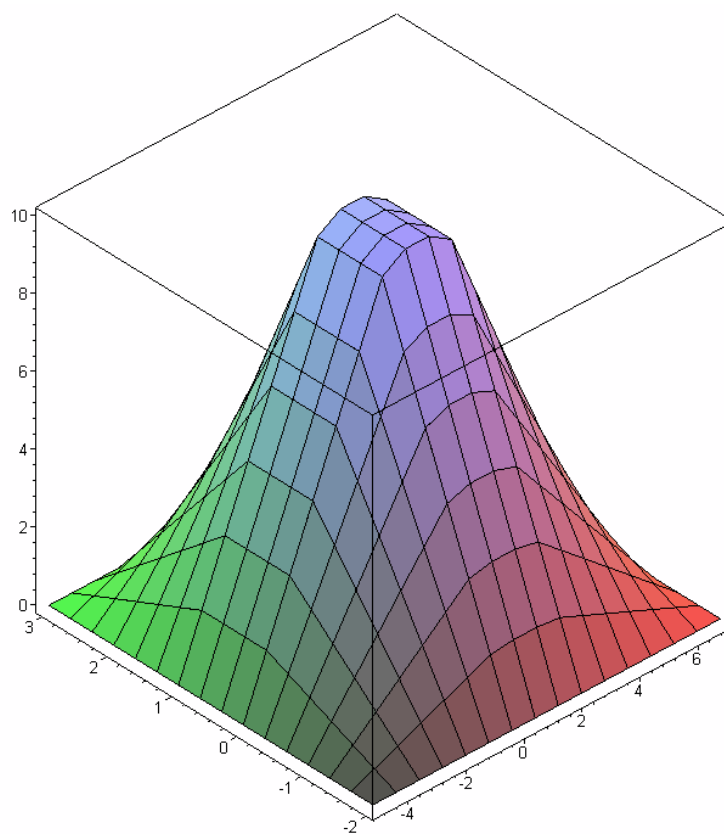


Рисунок 3.11

Таким чином, переміщенню початку локальної системи координат об'єкта  $S_i$  уздовж сторони габаритного прямокутника довжиною  $A'$  відповідають переміщення двох наборів паралельних площин  $\gamma_{ij_1}$  і  $\gamma_{ij_2}$  перпендикулярно вісі  $Ox_j$  та двох наборів паралельних площин  $\gamma_{ik_1}$  і  $\gamma_{ik_2}$  перпендикулярно вісі  $Ox_k$ , причому відстані між даними площинами дорівнюють довжині габаритного прямокутника для об'єкта  $S_i$ . Дані набори площин «вирізають» фрагменти області припустимих розв'язків, що потрапляють між ними. Таким чином, область припустимих розв'язків стає незв'язною. Аналогічно можна навести приклади проведення наборів площин при переміщенні початків локальних систем координат об'єктів  $S_j$  та  $S_k$  уздовж сторони габаритного прямокутника довжиною  $A'$ . Слід врахувати, що кожне переміщення об'єктів покриття відбувається у відповідності до  $\omega$ -поверхні (рис. 3.12), причому для об'єкта  $((S_i \cup S_j) \cup S_k)$  та області  $S_0$  переміщення здійснюється таким чином, щоб досягти максимуму цієї поверхні, та 0-рівнів  $\omega$ -поверхонь для об'єктів  $S_i$  і  $S_j$ ,  $S_i$  і  $S_k$ ,  $S_j$  і  $S_k$  відповідно. Тобто область припустимих розв'язків, відповідно до обмежень (3.2)÷(3.6) є нелінійною.



**Рисунок 3.12**

*Твердження 3.1.* Розв'язання оптимізаційної задачі покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками полягає у досягненні максимуму  $\omega$ -поверхні, що описує перетин об'єкта  $\bigcup_{i=1}^N S_i$  з заданою областю  $S_0$ , та 0-рівнів  $\omega$ -поверхонь для кожної пари об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , об'єктів покриття та  $cS_0$ , об'єктів покриття та областей заборони  $S_0^V$ ,  $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ .

*Твердження 3.2.* Область припустимих розв'язків в задачі оптимізаційного покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками являє собою набір незв'язних гіперповерхонь у багатовимірному просторі.

Слід зазначити, що додавання до обмежень (3.2), (3.4) та (3.5) умови розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття на фіксованих місцях, то область припустимих розв'язків буде дискретною і матиме вигляд, що наведений на рис. 3.13.

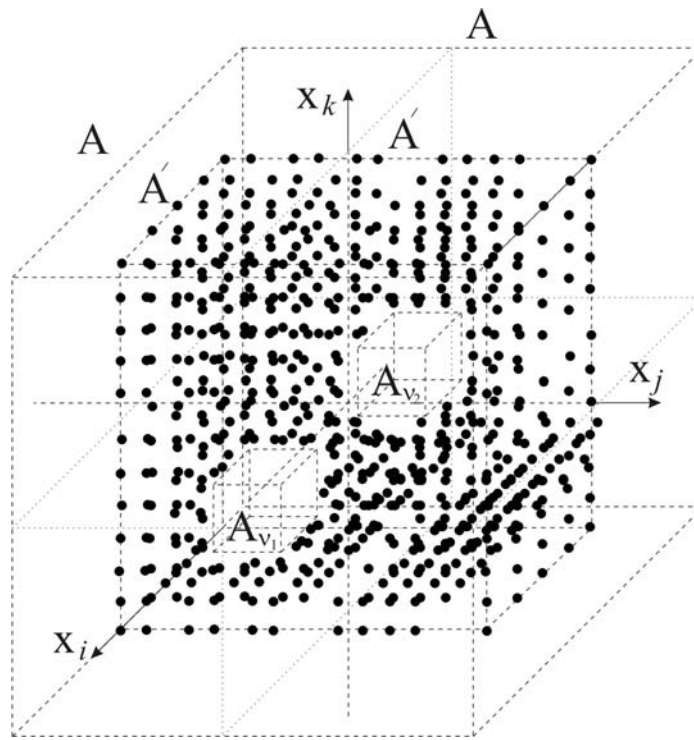


Рисунок 3.13

Додавання обмежень (3.3) та (3.6) призводить до вилучення відповідної множини точок з області припустимих розв'язків (рис. 3.14).

*Твердження 3.3.* Область припустимих розв'язків в задачі оптимізаційного покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками з урахуванням фіксованих місць розташування початків локальних систем координат об'єктів покриття є дискретною.

Таким чином, аналіз моделі та області припустимих розв'язків в задачі оптимізаційного покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками дозволив виявити наступні особливості:

1. Цільова функція задачі є неаналітичною (алгоритмічною).
2. Обмеження задачі є кусочно-нелінійними.
3. В загальному випадку, кількість обмежень, що необхідно врахувати для розв'язання задачі, дорівнює  $C_N^2 + 2N + v_n N + 1$ , де  $N$  - кількість об'єктів покриття;  $v_n$  - кількість областей заборони.
4. Область припустимих розв'язків являє собою набір незв'язних гіперповерхонь у багатовимірному просторі. У частковому випадку є дискретною.

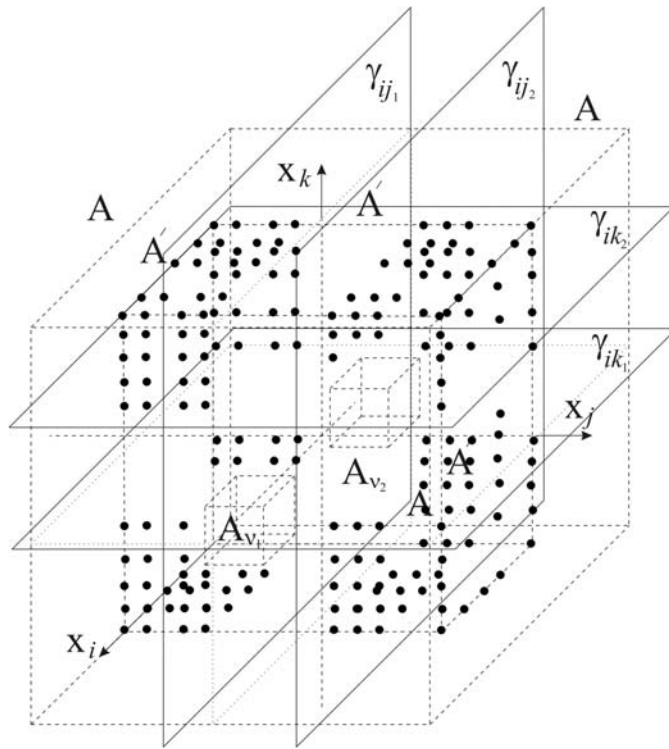


Рисунок 3.14

Наведені особливості дозволяють зробити висновок, що для розв'язання даної задачі неможливо застосувати відомі методи оптимізації. Таким чином, існує необхідність у розробці методу оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

### 3.3 Метод оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

На основі розробленої моделі та дослідженої області припустимих розв'язків здійснимо розробку методу оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. При цьому, розглянемо наступні області покриття:

- однозв'язний неопуклий багатокутник;
  - багатозв'язний неопуклий багатокутник;
  - ланки ломаної лінії, що належать неопуклому багатокутнику.
- У якості об'єктів покриття розглянемо:
- опуклі та неопуклі багатокутники;
  - кола.

### 3.3.1 Метод оптимізаційного покриття однозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками

Розглянемо область покриття  $S_0$ , що являє собою однозв'язний багатокутник, причому інформація стосовно даного багатокутника має наступний вигляд:

$$g = \left( \{x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n}\}, \{x_0, y_0\} \right). \quad (3.23)$$

Позначимо вершини багатокутника  $S_0$  наступним чином:

$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), P_2^0(x_{0,2}; y_{0,2}), \dots, P_n^0(x_{0,n}; y_{0,n}).$$

Інформація стосовно об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , має наступний вигляд:

$$g = \left( \{x_{i,1}, y_{i,1}; x_{i,2}, y_{i,2}; \dots; x_{i,n}, y_{i,n}\}, \{x_i, y_i\} \right). \quad (3.24)$$

Покриття області  $S_0$  об'єктом  $S_1$  здійснимо наступним чином: з вершини  $P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1})$  побудуємо багатокутник  $S_1$ , причому кількість вершин  $n_1$  даного багатокутника та їх координати визначаються виходячи із спеціальних умов задачі оптимізаційного покриття та обмежень (3.2) та (3.6) (рис. 3.15). Слід відзначити, що покриття області  $S_0$  необхідно розпочинати з кожної вершини  $P_j^0(x_{0,j}; y_{0,j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Якщо  $S_0 \cap S_1 = S_0$ , то  $N = 1$ , а задача вважається розв'язаною. В протилежному випадку, після побудови багатокутника  $S_1$ , область покриття прийме наступний вигляд:  $S_0' = S_0 \setminus S_1$ .

Вершини об'єкта  $S_1$ , що співпадають з вершинами області  $S_0'$ , позначимо наступним чином:

$$P_k^i(x_{i,k}; y_{i,k}), P_{k+1}^i(x_{i,k+1}; y_{i,k+1}), \dots, P_{k+p_i}^i(x_{i,k+p_i}; y_{i,k+p_i}).$$

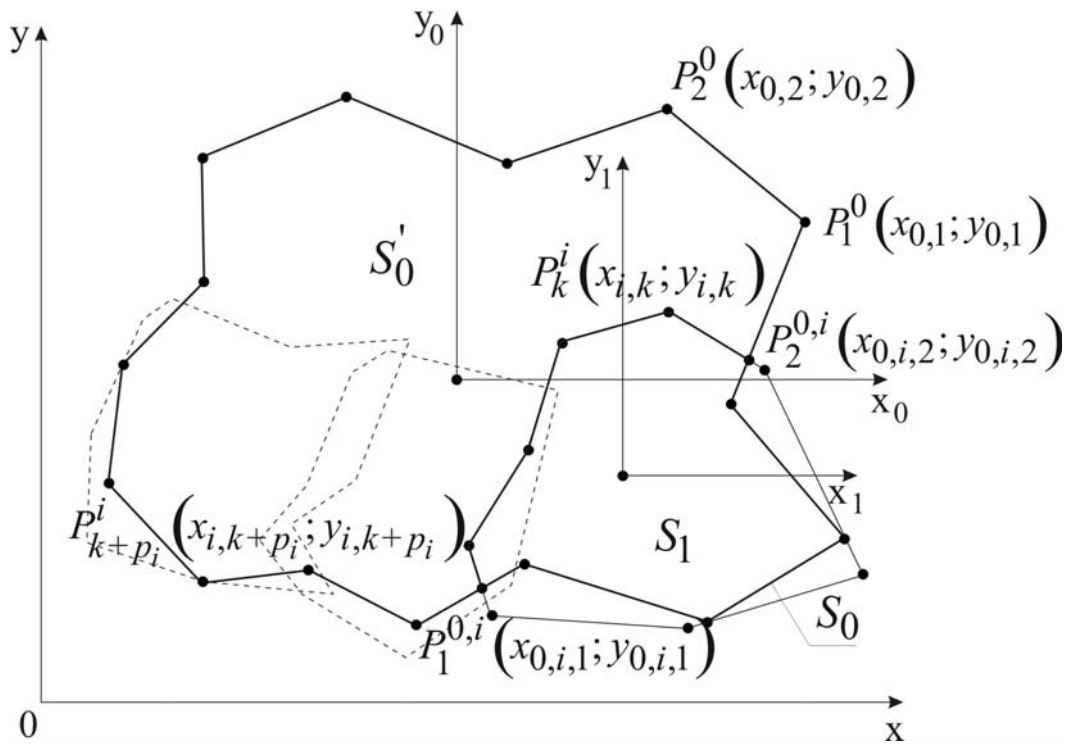


Рисунок 3.15

Якщо точки перетину об'єкта  $S_1$  з областю  $S_0$  не співпадають з вершинами даних об'єктів, то позначимо їх наступним чином:

$$P_1^{0,i}(x_{0,i,1}; y_{0,i,1}), P_2^{0,i}(x_{0,i,2}; y_{0,i,2}).$$

Тоді геометрична інформація щодо області  $S'_0$  (рис. 3.15) має наступний вигляд:

$$g = \left( \begin{array}{l} \{x_{0,1}, y_{0,1}; x_{0,2}, y_{0,2}; \dots; x_{0,i,1}, y_{0,i,1}; x_{i,k+p_i}, y_{i,k+p_i}; \dots\} \\ \{x_{i,k}, y_{i,k}; x_{0,i,2}, y_{0,i,2}\}, \{x_0, y_0\} \end{array} \right). \quad (3.25)$$

Побудова об'єкта покриття  $S_2$  здійснюється аналогічно до  $S_1$  (рис. 3.16), тобто початковими є вершини:

$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), P_2^0(x_{0,2}; y_{0,2}), \dots, P_1^{0,i}(x_{0,i,1}; y_{0,i,1}), \\ P_{k+p_i}^i(x_{i,k+p_i}; y_{i,k+p_i}), \dots, P_k^i(x_{i,k}; y_{i,k}), P_2^{0,i}(x_{0,i,2}; y_{0,i,2}).$$



При цьому кількість вершин об'єкта  $S_2$  та їх координати визначаються виходячи із спеціальних умов та обмежень (3.2), (3.3), (3.5) та (3.6).

Якщо  $S_0 \cap (S_1 \cup S_2) = S_0$ , то  $N = 2$ , а задача вважається розв'язаною. В протилежному випадку, після побудови багатокутника  $S_2$ , область покриття прийме наступний вигляд:  $S_0'' = S_0' \setminus S_2$ . Таким чином, побудова об'єктів покриття (визначення їх кількості) відбувається до тих пір, поки не буде виконано умову (3.2).

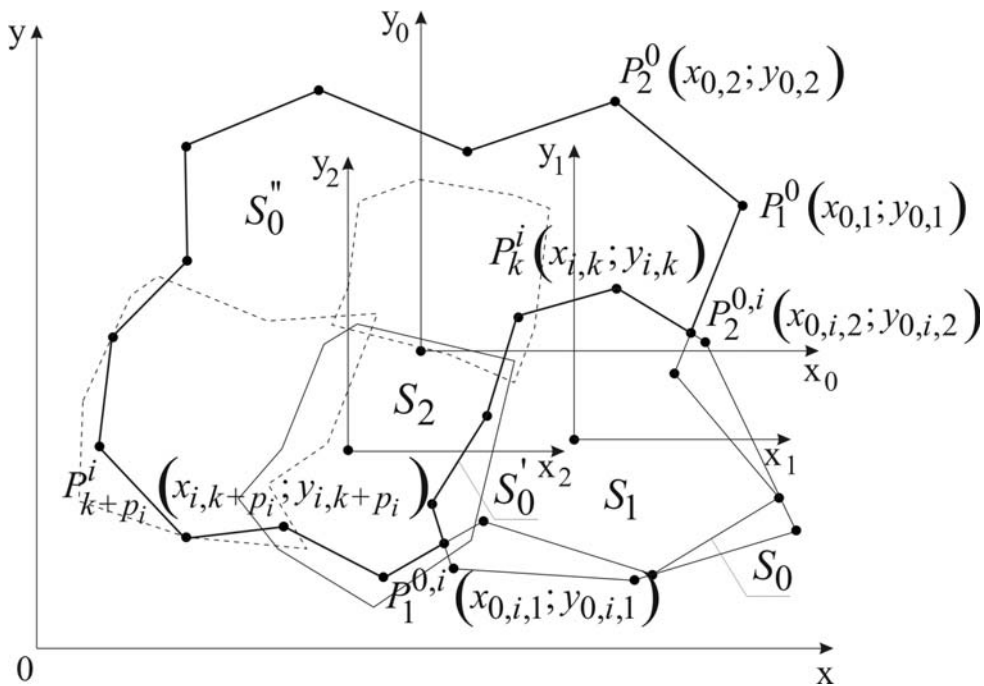


Рисунок 3.16

Загальну структуру методу можливо представити за допомогою дерева розв'язків, що наведено на рис. 3.17.

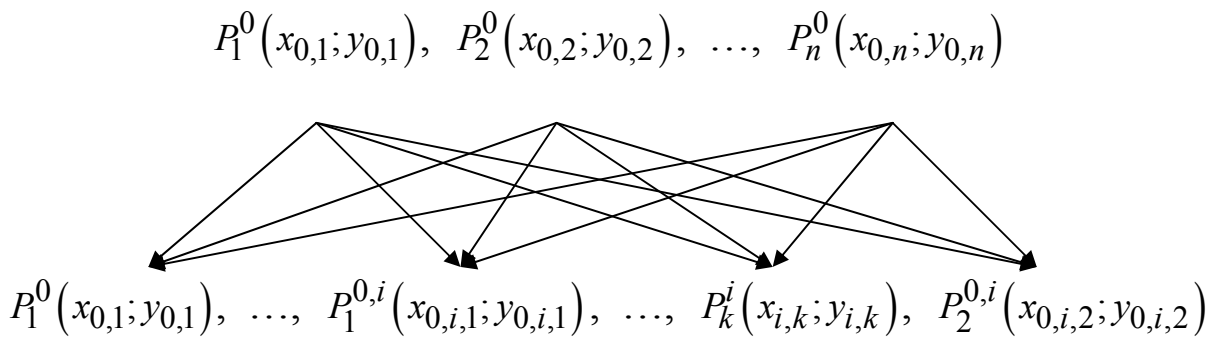


Рисунок 3.17

Отримаємо оцінку складності даного методу (оцінка кількості варіантів покриття заданої області для знаходження мінімуму цільової функції). Так, на першому рівні дерева розв'язків (рис. 3.17) знаходиться  $n^1 = n$  елементів. Кількість елементів на другому рівні дерева розв'язків  $n^2$  дорівнює кількості вершин області  $S'_0$  і т.д. Таким чином, для знаходження локального екстремуму цільової функції (у частковому випадку – глобального екстремуму) необхідно побудувати та проаналізувати наступну кількість варіантів розбиття заданої області:

$$O_1 = \prod_{i=1}^N n^i, \quad (3.26)$$

де  $N$  - кількість об'єктів покриття.

Разом з тим, для розв'язання практичних задач оптимізаційного покриття однозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками розроблено спосіб послідовного поодинокого покриття, який полягає у наступному.

Для побудови об'єкта  $S_1$  використовується підхід, що наведений на рис. 3.15. При цьому кількість вершин та їх координати визначаються з використанням  $\omega$ -поверхонь (рис. 3.18).

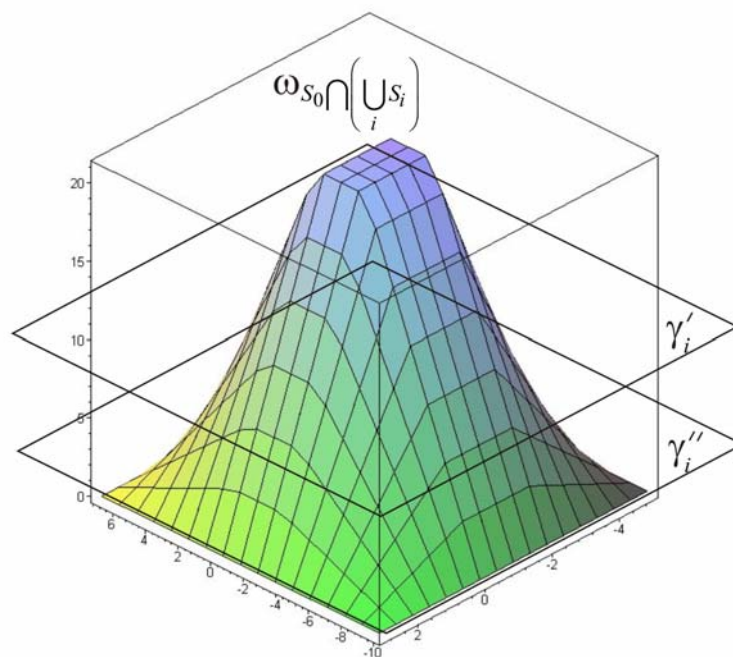


Рисунок 3.18

Так, обирається той варіант побудови багатокутника  $S_1$ , що дозволяє досягнути точки на  $\omega$ -поверхні з найбільшою аплікатою. Аналогічно відбувається побудова багатокутника  $S_2$ , при цьому враховується те, що на  $\omega$ -поверхнях, які відповідають взаємодії об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ ,  $S_2$  та  $cS_0$ , обирається точка з мінімальною аплікатою. Таким чином, побудова об'єктів покриття здійснюється до тих пір, поки не буде виконано умову (3.2).

Оцінка складності даного способу має наступний вигляд:

$$O_{1.1} = \sum_{i=1}^N n^i, \quad (3.27)$$

де  $n^i$  - кількість вершин  $i$ -тої під області покриття;  $N$  - кількість об'єктів покриття.

Для отримання графічної інтерпретації оцінок складності розроблених метода та способу оптимізаційного покриття однозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками розглянемо наступний приклад.

Нехай область покриття являє собою однозв'язний багатокутник, що має  $n=15$  вершин. Для спрощення викладення припустимо, що в результаті розв'язання задачі отримано  $N=5$  багатокутників, що повністю покривають задану область, причому кількість вершин під областей покриття на кожному кроці методу є постійним. Тоді:

$$O_1 = \prod_{i=1}^N n^i = 15^N = 15^5 = 759375 \text{ варіантів покриття};$$

$$O_{1.1} = \sum_{i=1}^N n^i = 15 \cdot N = 15 \cdot 5 = 75 \text{ варіантів покриття}.$$

Інакше кажучи, швидкодія запропонованого способу покриття з використанням  $\omega$ -поверхонь у 10125 разів вище розглянутого методу, що підтверджує обчислювальну ефективність даного способу та доцільність його використання при розв'язанні практичних задач, які у своїх постановках можуть бути зведеними до задач оптимізаційного покриття однозв'язної області багатокутниками зі змінними

метричними характеристиками. Графічна інтерпретація оцінок складності наведена, відповідно, на рис. 3.19 та 3.20.

*Властивість 3.8.* В задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками перебір припустимих варіантів покриття за деревами розв'язків являє собою перебір незв'язних нелінійних компонент областей припустимих розв'язків даних задач.

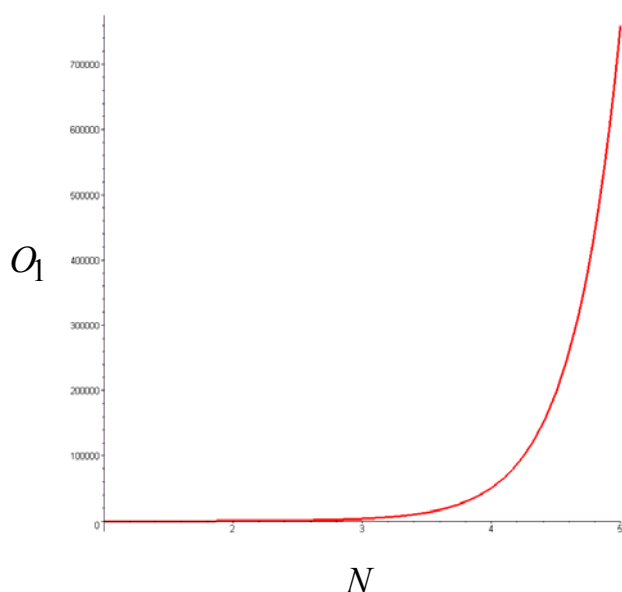


Рисунок 3.19

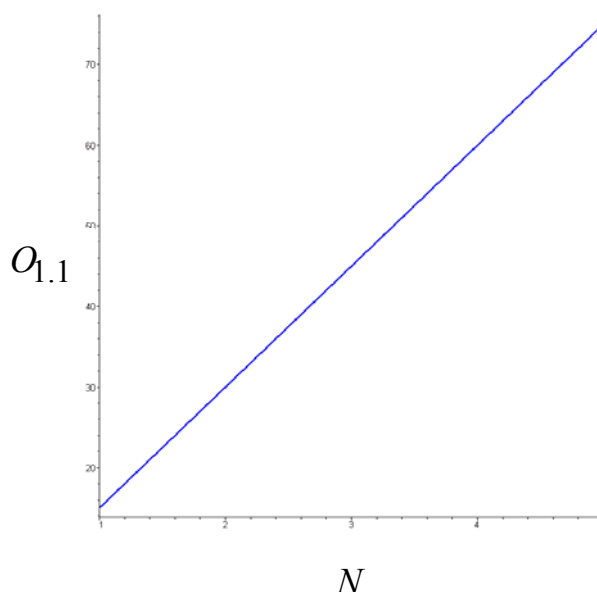


Рисунок 3.20

### 3.3.2 Спосіб оптимізаційного покриття однозв'язної області колами змінного радіусу, колами та багатокутниками зі змінними метричними характеристиками

Геометрична інформація стосовно об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , має наступний вигляд:

$$g = (\{r_i\}, \{x_i, y_i\}), \quad (3.28)$$

де  $r_i$  - радіуси кіл  $S_i$ .

Геометрична інтерпретація даного способу наведена на рис. 3.21.

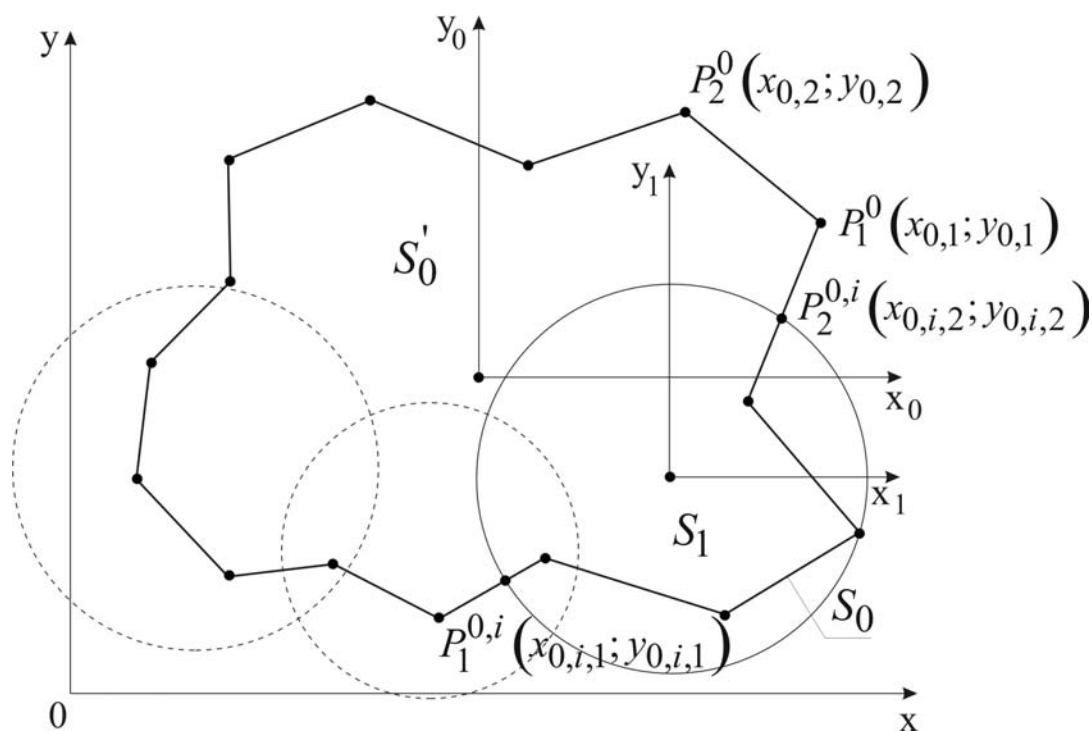
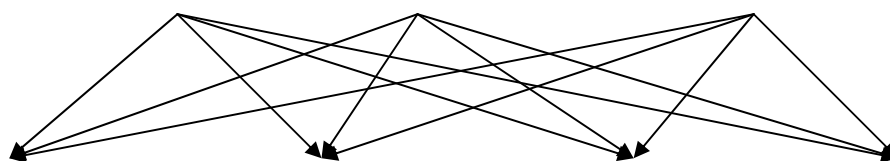


Рисунок 3.21

Для знаходження раціонального покриття однозв'язної області колами змінного радіусу застосуємо дерево розв'язків, що наведено на рис. 3.22.

$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), P_2^0(x_{0,2}; y_{0,2}), \dots, P_n^0(x_{0,n}; y_{0,n})$$



$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), \dots, P_2^0(x_{0,2}; y_{0,2}), \dots, P_1^{0,i}(x_{0,i,1}; y_{0,i,1}), P_2^{0,i}(x_{0,i,2}; y_{0,i,2})$$

Рисунок 3.22

У змішаній задачі (рис. 3.23), тобто при покритті заданої області колами змінного радіусу та багатокутниками зі змінними метричними характеристиками, дерево розв'язків має вигляд, наведений на рис. 3.24.

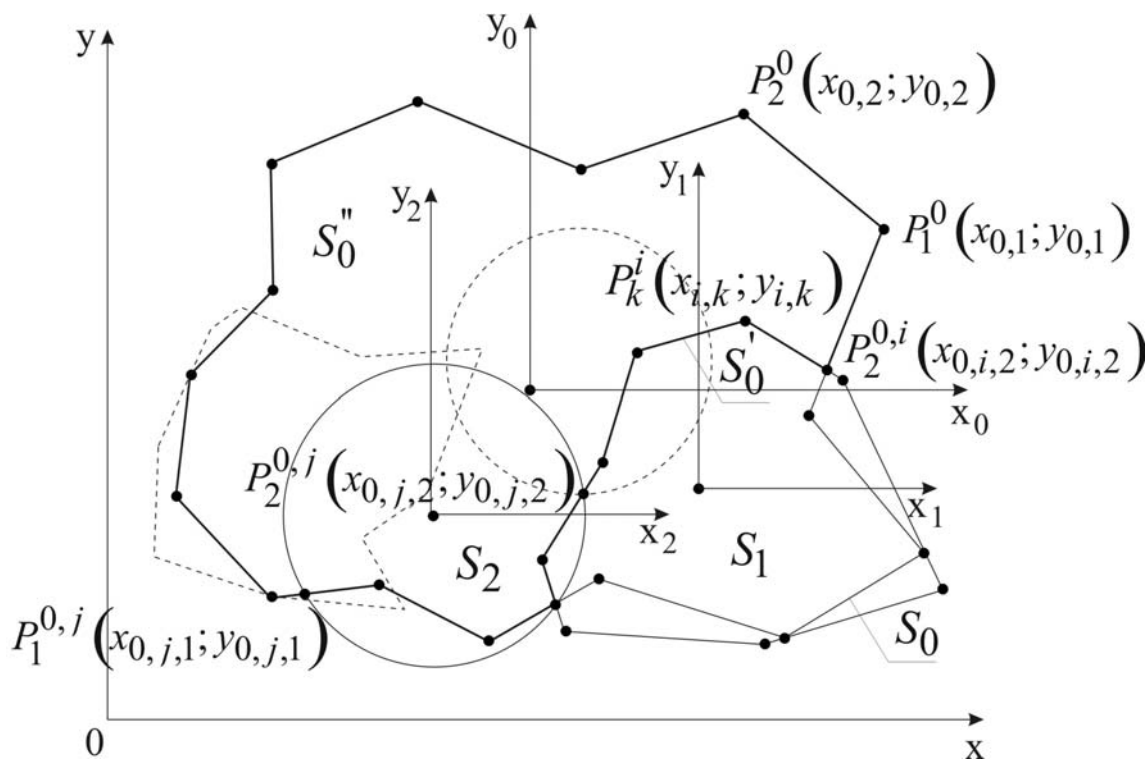
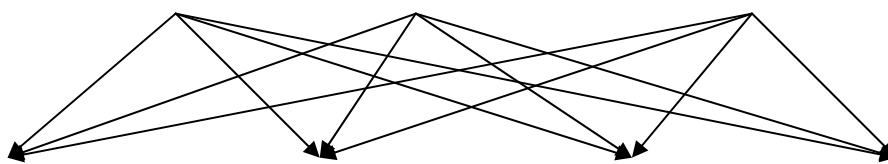
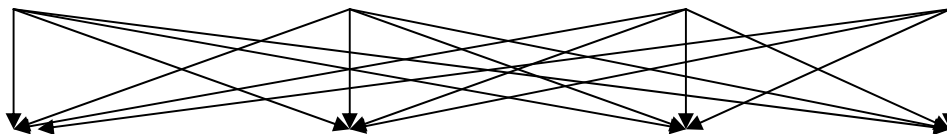


Рисунок 3.23

$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), P_2^0(x_{0,2}; y_{0,2}), \dots, P_n^0(x_{0,n}; y_{0,n})$$



$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), \dots, P_1^{0,i}(x_{0,i,1}; y_{0,i,1}), \dots, P_k^i(x_{i,k}; y_{i,k}), P_2^{0,i}(x_{0,i,2}; y_{0,i,2})$$



$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), \dots, P_1^{0,j}(x_{0,j,1}; y_{0,j,1}), \dots, P_k^i(x_{i,k}; y_{i,k}), P_2^{0,i}(x_{0,i,2}; y_{0,i,2})$$

...

Рисунок 3.24

Що стосується оцінок складності даних способів, то дані оцінки можуть бути отримані аналогічно до (3.26) та (3.27) (рис. 3.25).

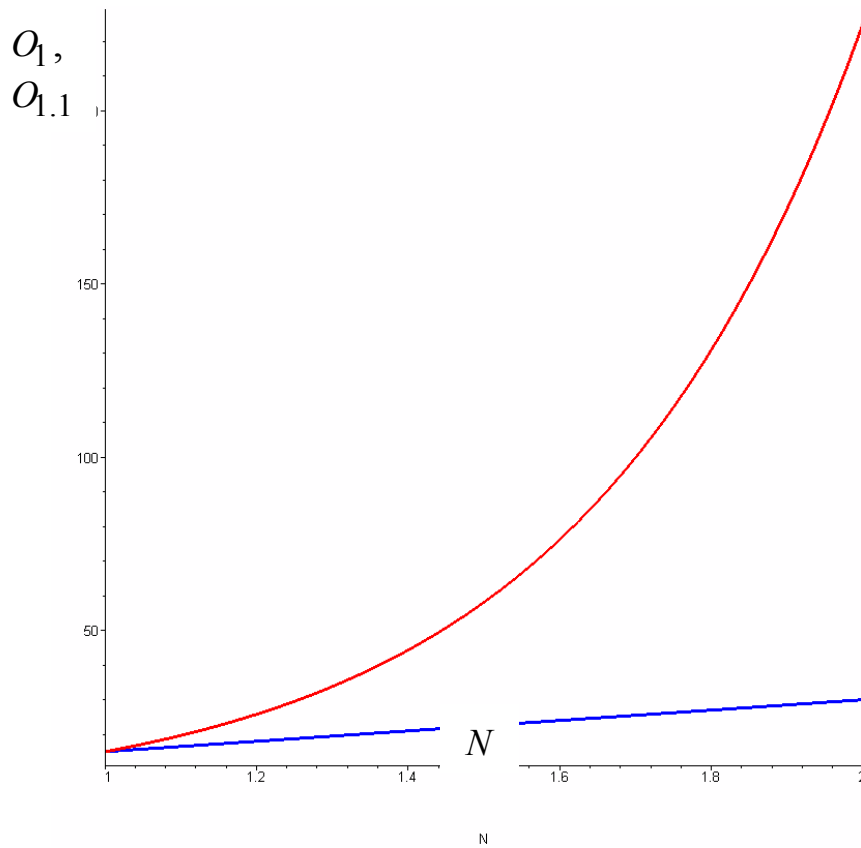


Рисунок 3.25

### 3.3.3 Спосіб оптимізаційного покриття багатозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками

Розглянемо область покриття  $S_0$ , що являє собою багатозв'язний багатокутник, причому геометрична інформація стосовно даного багатокутника має наступний вигляд:

$$g = \left( \begin{array}{l} \{x_{0,1}, y_{0,1}; \dots; x_{0,n}, y_{0,n}\}, \{x_{0,1}^{v_1}, y_{0,1}^{v_1}; \dots; x_{0,n^{v_1}}^{v_1}, y_{0,n^{v_1}}^{v_1}\}, \dots, \\ \{x_{0,1}^{v_n}, y_{0,1}^{v_n}; \dots; x_{0,n^{v_n}}^{v_n}, y_{0,n^{v_n}}^{v_n}\}, \{x_0, y_0\} \end{array} \right), \quad (3.29)$$

де  $v_n$  - кількість областей заборони  $S_0^V$ .

Позначимо вершини багатокутника  $S_0$  наступним чином:

$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), P_2^0(x_{0,2}; y_{0,2}), \dots, P_n^0(x_{0,n}; y_{0,n}).$$

Вершини областей заборони  $S_0^v$ ,  $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ , позначимо так:

$$P_1^{v_1}(x_{0,1}^{v_1}; x_{0,1}^{v_1}), P_2^{v_1}(x_{0,2}^{v_1}; x_{0,2}^{v_1}), \dots, P_{n^{v_1}}^{v_1}(x_{0,n^{v_1}}^{v_1}; y_{0,n^{v_1}}^{v_1});$$

$$P_1^{v_n}(x_{0,1}^{v_n}; x_{0,1}^{v_n}), P_2^{v_n}(x_{0,2}^{v_n}; x_{0,2}^{v_n}), \dots, P_{n^{v_n}}^{v_n}(x_{0,n^{v_n}}^{v_n}; y_{0,n^{v_n}}^{v_n}).$$

Розглянемо покриття області  $S_0$ , що наведена на рис. 3.26.

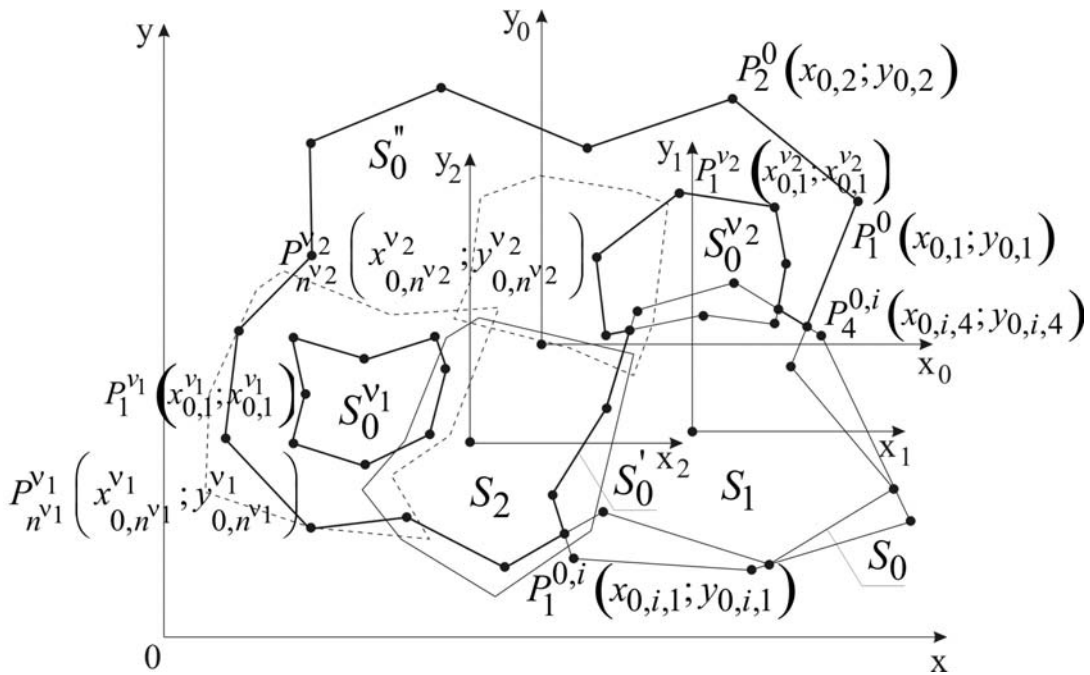
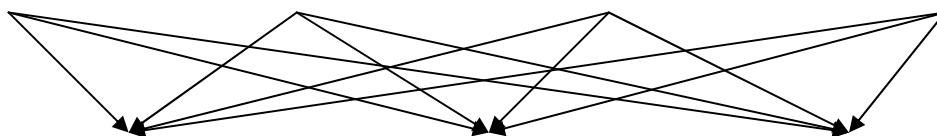


Рисунок 3.26

Для знаходження оптимального покриття даної області запишемо наступне дерево розв'язків:

$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), \dots, P_1^{v_1}(x_{0,1}^{v_1}; x_{0,1}^{v_1}), \dots, P_1^{v_2}(x_{0,1}^{v_2}; x_{0,1}^{v_2}), \dots, P_{n^{v_2}}^{v_2}(x_{0,n^{v_2}}^{v_2}; y_{0,n^{v_2}}^{v_2})$$



$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), \dots, P_{n^{v_2}}^{v_2}(x_{0,n^{v_2}}^{v_2}; y_{0,n^{v_2}}^{v_2}), \dots, P_4^{0,i}(x_{0,i,4}; y_{0,i,4})$$

Рисунок 3.27



Слід зазначити, що для кожної припустимої вершини дерева розв'язків об'єкти покриття будуються (визначається кількість вершин та їх координати) відповідно до обмежень (3.2)÷(3.6) та спеціальних умов задачі.

Оцінка кількості варіантів покриття, що можуть бути отримані за даним деревом, має наступний вигляд:

$$O_2 = \prod_{i=1}^N \left( n^i + \sum_{v=v_1}^{v_n} n^{v,i} \right), \quad (3.30)$$

де  $n^i$  - кількість вершин області покриття при побудові  $i$ -го багатокутника;  $n^{v,i}$  - кількість вершин областей заборони при побудові  $i$ -го багатокутника покриття.

Застосування способу послідовного поодинокого покриття (п. 3.3.1) багатозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками дозволяє скоротити кількість варіантів покриття області  $S_0$ , що підлягають аналізу. При цьому оцінка складності даного способу має наступний вигляд:

$$O_{2.1} = \sum_{i=1}^N \left( n^i + \sum_{v=v_1}^{v_n} n^{v,i} \right), \quad (3.31)$$

*Властивість 3.9.* У процесі розв'язання задачі оптимізаційного покриття багатозв'язної області багатокутниками зі змінними метричними характеристиками область покриття може бути перетвореною у незв'язний геометричний об'єкт. У цьому випадку здійснюється покриття кожної компоненти зв'язності, а вершини обох компонент зазначаються у дереві розв'язків.

### **3.3.4 Спосіб оптимізаційного покриття багатозв'язної області колами змінного радіуса, колами та багатокутниками зі змінними метричними характеристиками**

Розглянемо спосіб оптимізаційного покриття багатозв'язної області колами змінного радіуса. Геометрична інформація щодо області покриття має вигляд (3.29). Що стосується геометричної інфо-

рмациї про об'єкти покриття, то вона визначається за допомогою виразу (3.28).

Геометрична інтерпретація покриття області  $S_0$  колами змінного радіуса наведена на рис. 3.28.

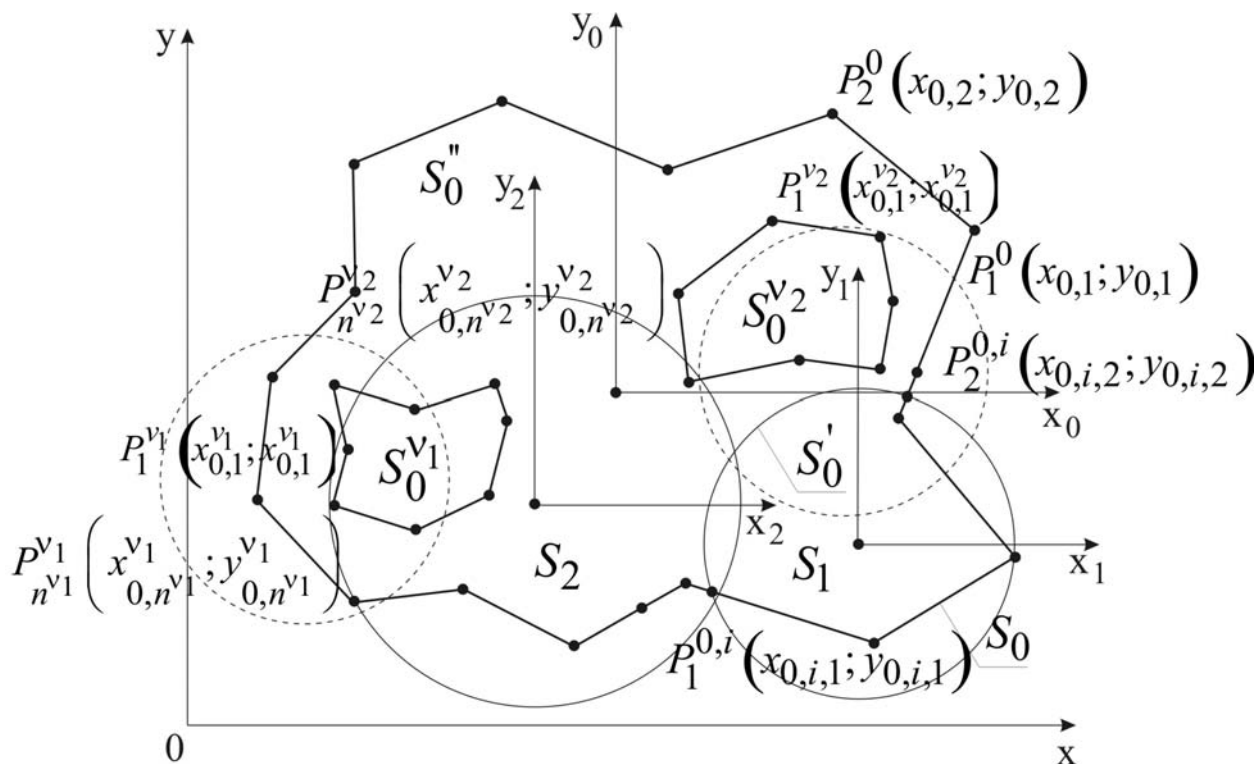
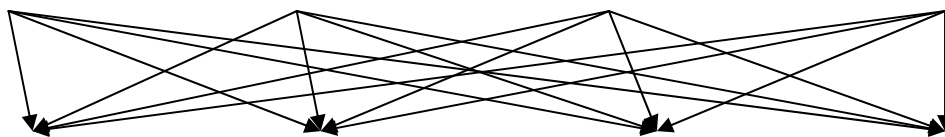


Рисунок 3.28

Для знаходження раціонального покриття багатозв'язної області колами змінного радіусу застосуємо дерево розв'язків, що наведено на рис. 3.29.

$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), \dots, P_1^{v_1}(x_{0,1}^{v_1}; x_{0,1}^{v_1}), \dots, P_1^{v_2}(x_{0,1}^{v_2}; x_{0,1}^{v_2}), \dots, P_{n^{v_2}}^{v_2}(x_{0,n^{v_2}}^{v_2}; y_{0,n^{v_2}}^{v_2})$$



$$P_1^0(x_{0,1}; y_{0,1}), \dots, P_1^{v_1}(x_{0,1}^{v_1}; x_{0,1}^{v_1}), \dots, P_1^{0,i}(x_{0,i,1}; y_{0,i,1}), P_2^{0,i}(x_{0,i,2}; y_{0,i,2})$$

Рисунок 3.29

При покритті заданої області колами змінного радіусу та багатокутниками зі змінними метричними характеристиками (рис. 3.30), дерево розв'язків має вигляд, наведений на рис. 3.31.

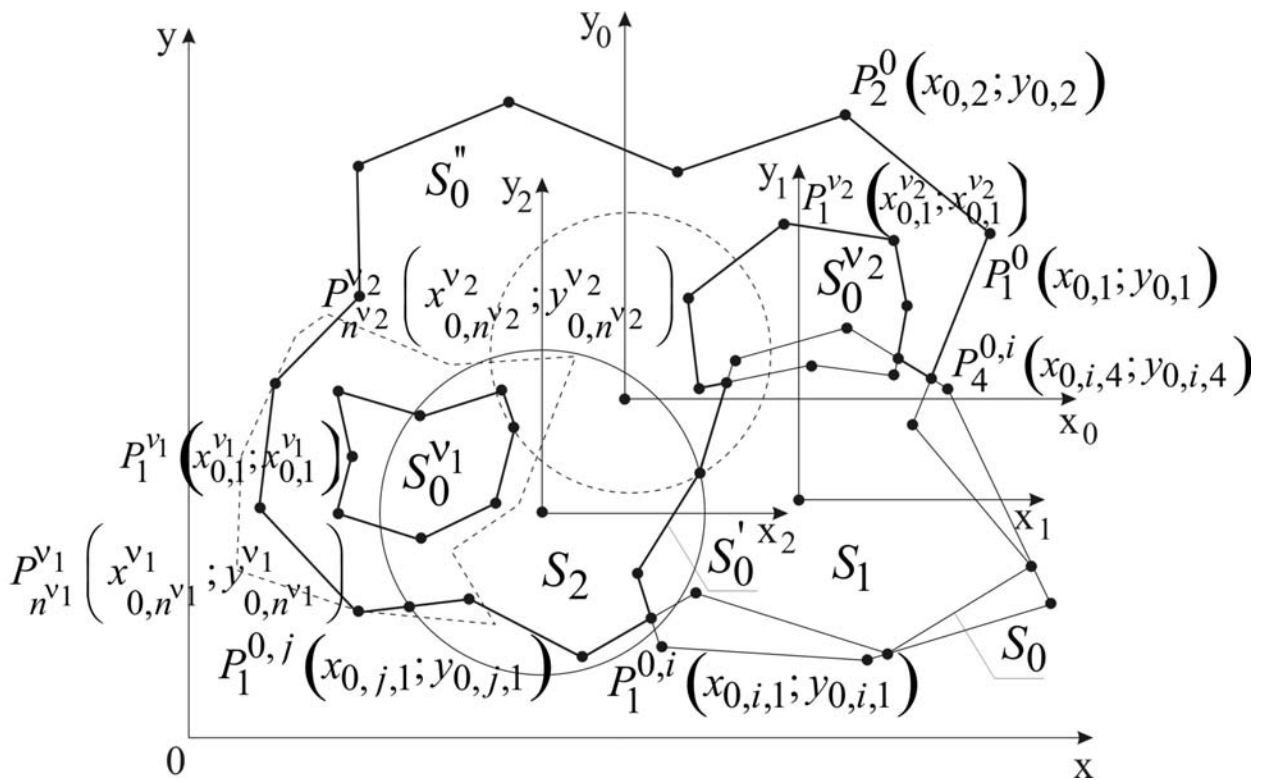


Рисунок 3.30

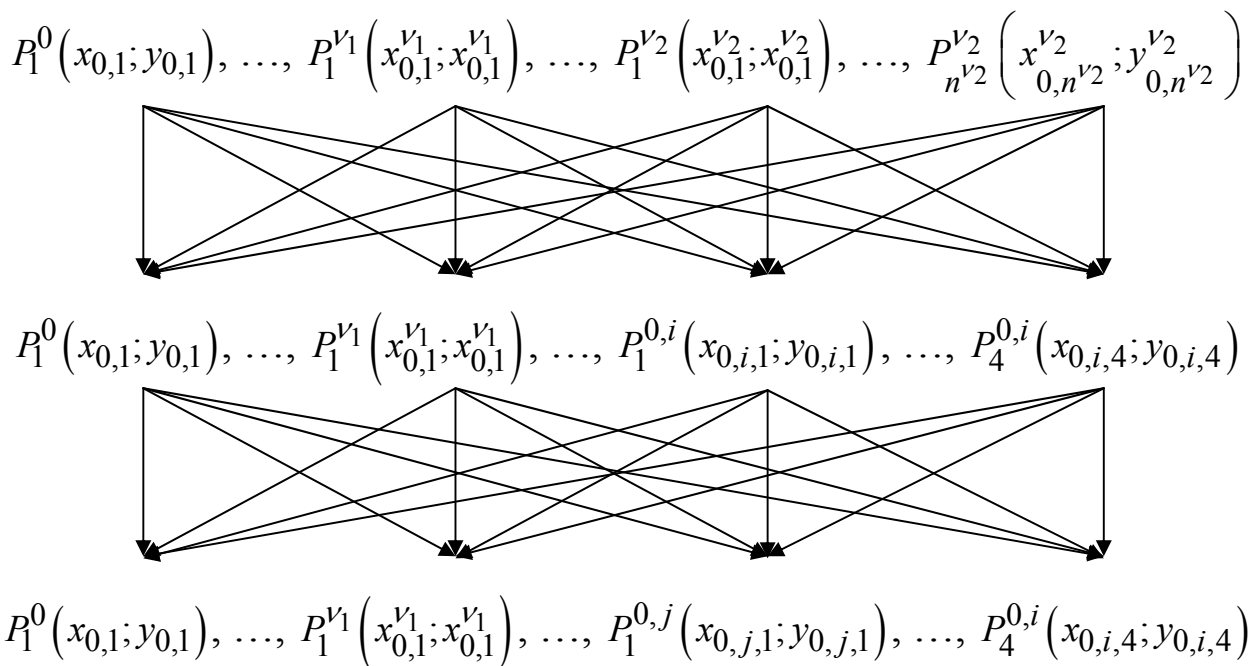


Рисунок 3.31

Що стосується оцінок складності даних способів, то дані оцінки можуть бути отримані аналогічно до (3.30) та (3.31).

### 3.3.5 Спосіб оптимізаційного покриття багатозв'язної області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, початки локальних систем координат яких розміщуються на фіксованих місцях

Розглянемо покриття області  $S_0$ , що наведена на рис. 3.32. Позначимо множину точок  $\{O_l(x_l; y_l)\}$ ,  $l=1,2,\dots,N_l$ , в яких мають розміщуватись початки локальних систем координат об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$  зі змінними метричними характеристиками. Особливістю даної задачі є додавання до моделі обмеження (3.22).

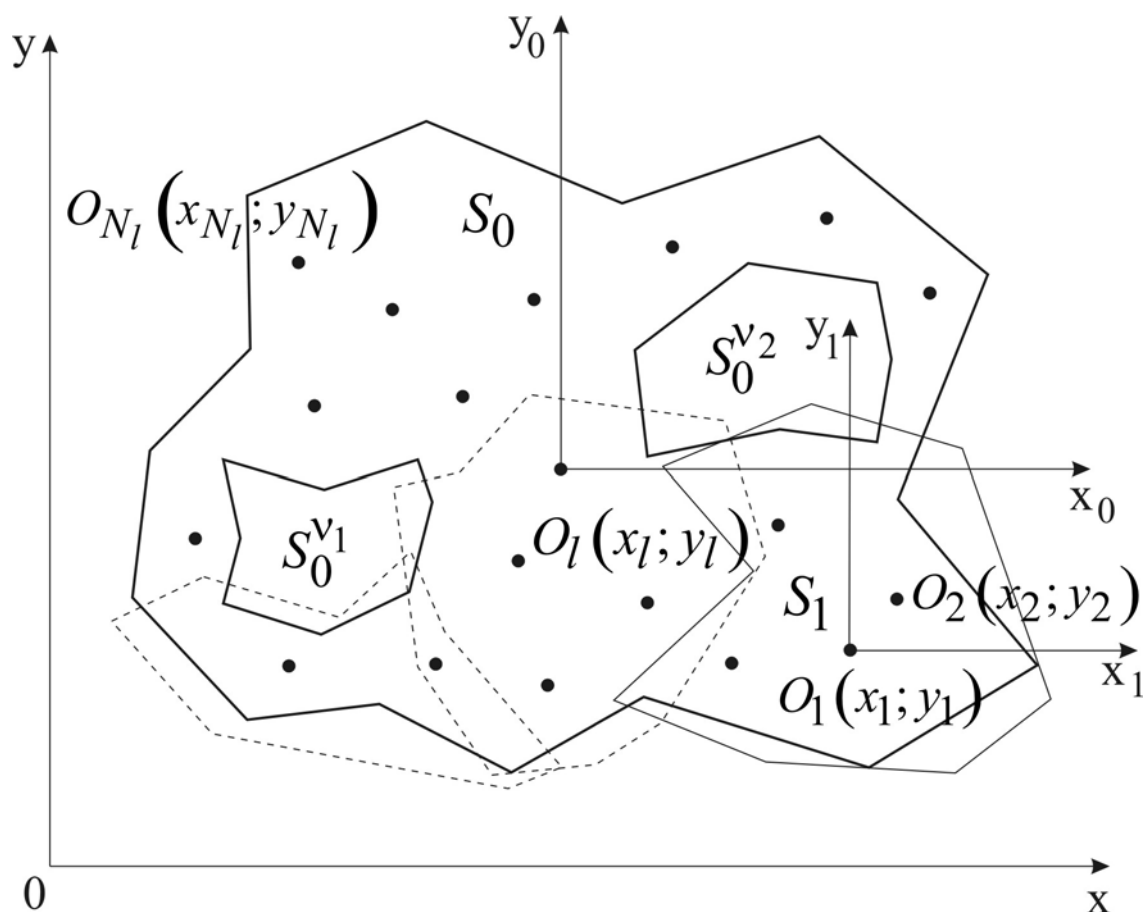


Рисунок 3.32

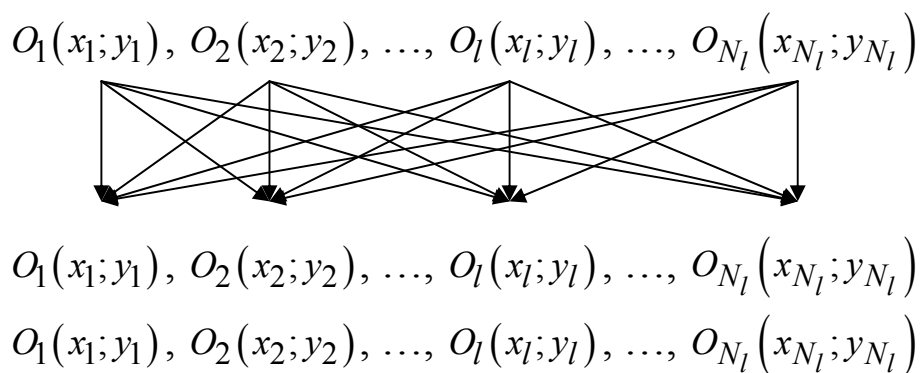
Для отримання глобального екстремуму цільової функції (3.1) необхідно виконати повний перебір усіх дискретних елементів

$\{O_l(x_l; y_l)\}$ ,  $l=1,2,\dots,N_l$ . Інакше кажучи, при побудові об'єкта покриття  $S_1$  необхідно у якості початкових розглянути всі елементи  $\{O_l(x_l; y_l)\}$ . Для побудови наступного об'єкта покриття необхідно також розглянути всі дискретні елементи області  $S_0$  і т.д. до тих пір, поки не будуть виконані умови (3.2)÷(3.6). При цьому побудова об'єктів покриття здійснюється відповідно до спеціальних умов задачі. Схема даного способу наведена на рис. 3.33.

Оцінка складності даного способу має наступний вигляд:

$$O_{2.2} = (N_l)^N, \quad (3.32)$$

де  $N$  - кількість об'єктів покриття, що визначається в процесі розв'язання задачі.



**Рисунок 3.33**

Для зменшення кількості варіантів покриття, що необхідно проаналізувати для знаходження оптимального розв'язку даної задачі, запропоновано наступний підхід.

Для побудови об'єкта покриття  $S_1$  здійснюється перебір усіх дискретних елементів  $\{O_l(x_l; y_l)\}$ ,  $l=1,2,\dots,N_l$ . Для побудови об'єкта покриття  $S_2$  вилучаються дискретні елементи, що належать об'єкту  $S_1$ , кількість яких дорівнює  $N_1'$ . Далі будуємо геометричний об'єкт  $S_{12}$  (виходячи із спеціальних умов задачі), що описує область припустимих розміщень початку локальної системи координат об'єкта  $S_2$ . Даний об'єкт має дискретні елементи, кількість яких дорівнює  $N_l - N_1' - N_1''$ , причому  $N_1''$  - кількість дискретних елементів, що не на-

лежать об'єкту  $S_{12}$  (рис. 3.34). Побудова об'єкта  $S_{12}$  здійснюється наступним чином: з кожної вершини об'єкта  $S_1$ , що належать області  $S_0$ , здійснюється побудова об'єктів  $S_{12}^k$ ,  $k=1,2,\dots,K$ , виходячи із спеціальних умов задачі. Формування об'єкта  $S_{12}$  здійснюється наступним чином:

$$S_{12} = (S_0 \setminus S_1) \cap \left( \bigcup_{k=1}^K S_{12}^k \right). \quad (3.33)$$

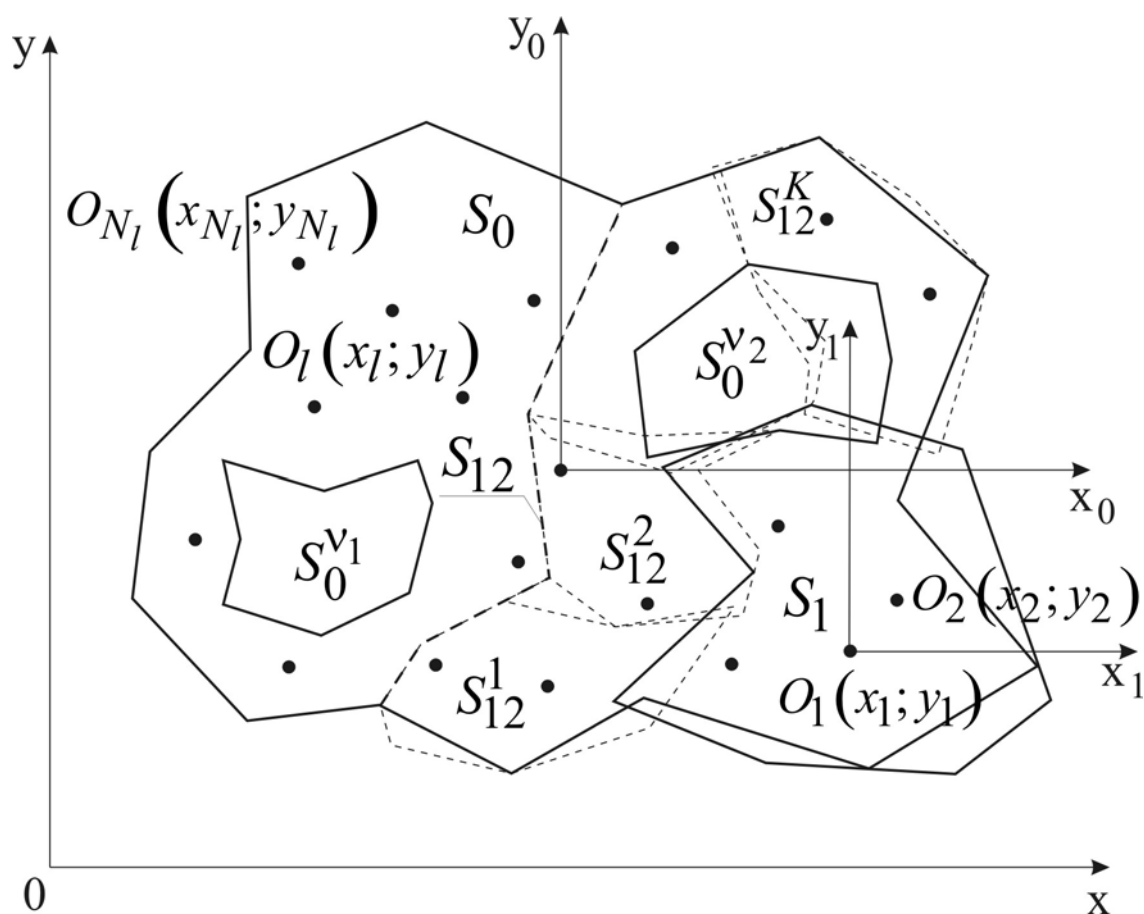


Рисунок 3.34

Інакше кажучи, на  $\omega$ -поверхні, що відповідає взаємодії об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , вирізається фрагмент, обмежений площинами  $\gamma'$  та  $\gamma''$  (рис. 3.35). Таким чином, для знаходження мінімуму цільової функції розглядаємо не  $\omega$ -поверхню в цілому, а лише її фрагмент. Обираємо той варіант побудови об'єкта  $S_2$ , що відповідає точці з найменшою аплікатою на даній  $\omega$ -поверхні, та точці з найбільшою

аплікатою на  $\omega$ -поверхні, що описує взаємодію об'єкта  $S_1 \cup S_2$  з областю  $S_0$ .

Побудова області припустимих розміщень початку локальної системи координат  $i$ -го об'єкта покриття здійснюється наступним чином:

$$S_{12\dots i} = \left( S_0 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j \right) \right) \cap \left( \bigcup_{k=1}^K S_{12\dots i}^k \right). \quad (3.34)$$

Побудова об'єктів покриття здійснюється до тих пір, поки не будуть виконані умови (3.2)÷(3.6). Оцінка складності даного способу має наступний вигляд:

$$O_{2.3} = \sum_{i=1}^N \left( N_l - N_{i-1}'' - \sum_{j=1}^{i-1} N_j' \right), \quad (3.35)$$

причому  $N_0'' = 0$ .

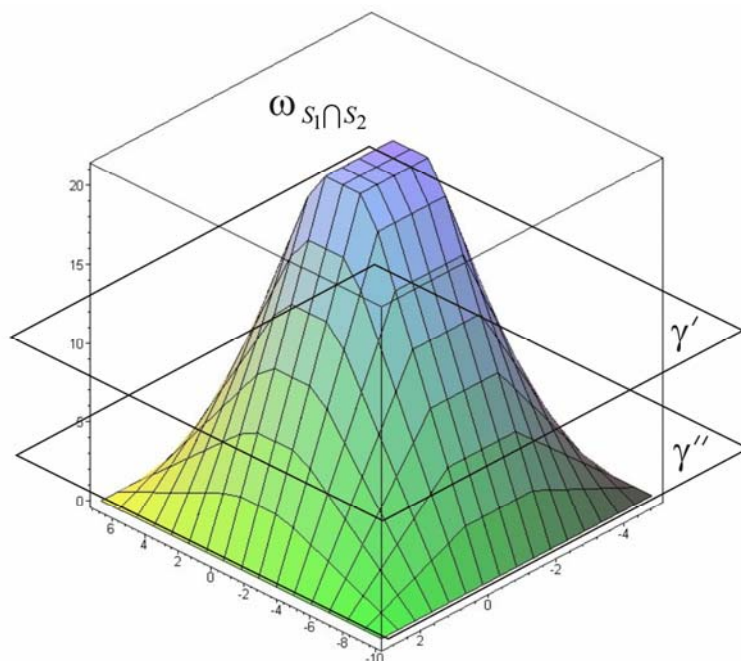


Рисунок 3.35

*Властивість 3.10.* Задача оптимізаційного покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характе-

ристиками, початки локальних систем координат яких розміщуються на фіксованих місцях, не мають розв'язків у тому випадку, коли проаналізовано припустимі варіанти покриття заданої області, а умови виду (3.2) або (3.7) не задовільнено.

### 3.3.6 Спосіб оптимізаційного покриття ланок ломаних ліній, що належать неопуклому багатокутнику, геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

Нехай ланки ломаних ліній, що підлягають покриттю, задані множиною точок  $\{P_{L_u,m}^0\}$ ,  $m=1,2,\dots,N_{L_u}$ , та матрицею  $L$  (рис. 3.36):

$$P_{L_u,1}^0(x_{L_u,1}^0; y_{L_u,1}^0), P_{L_u,2}^0(x_{L_u,2}^0; y_{L_u,2}^0), \dots, P_{L_u,N_{L_u}}^0(x_{L_u,N_{L_u}}^0; y_{L_u,N_{L_u}}^0);$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

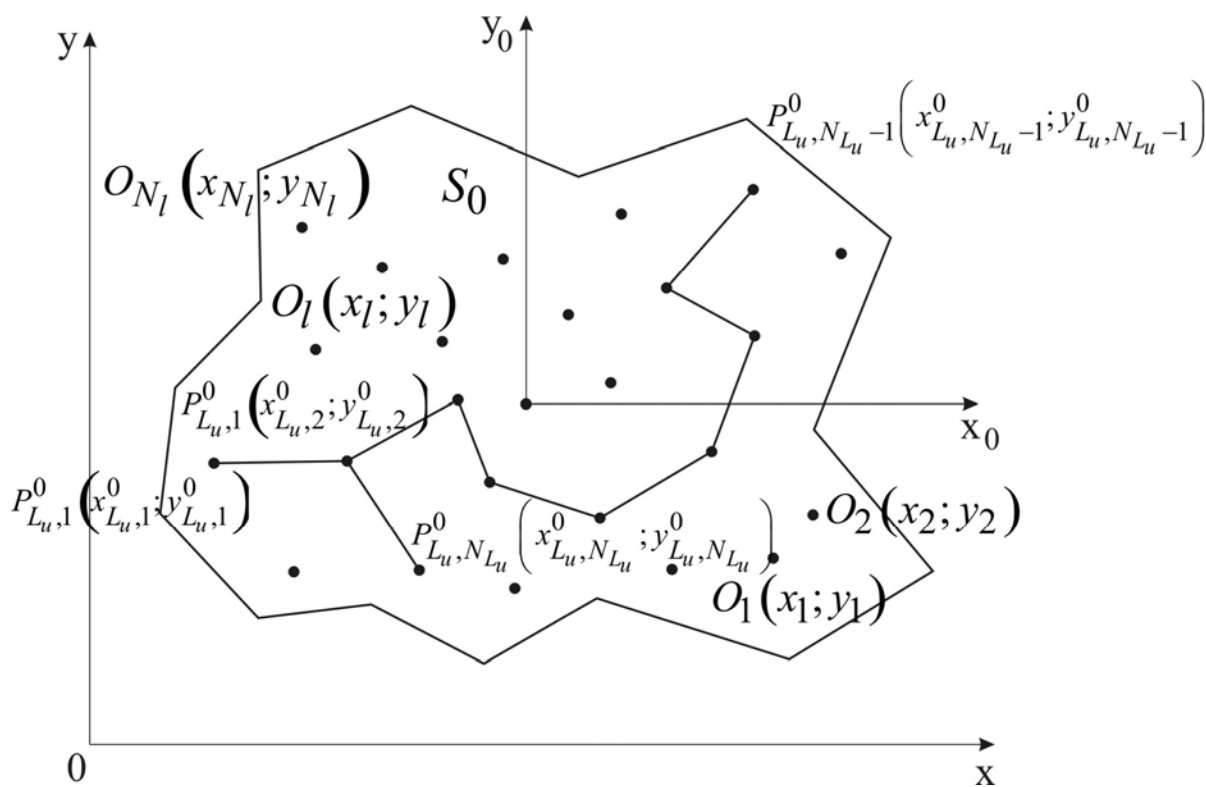


Рисунок 3.36



Слід відзначити, якщо елемент матриці  $l_{ij} = 0$ , то точки  $P_{L_u,i}^0$  та  $P_{L_u,j}^0$  не з'єднані між собою. Якщо  $l_{ij} = 1$ , то точки  $P_{L_u,i}^0$  та  $P_{L_u,j}^0$  являють собою кінці відповідного відрізка, при цьому  $l_{ii} = 0$ .

Задано набір точок  $\{Ok(x_k; y_k)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_k$ , в яких мають розміщуватись початки локальних систем координат об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  зі змінними метричними характеристиками.

Спосіб оптимізаційного покриття заданих ломаних ліній полягає у наступному. Початковими точками для покриття ломаних ліній є точки  $\{P_{L_u,m}^0\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_{L_u}$ . З кожної точки  $\{P_{L_u,m}^0\}$  здійснимо побудову області припустимих розміщень  $S'_1$  початку локальної системи координат об'єкта покриття  $S_1$  так, як це наведено на рис. 3.37, тобто виходячи із спеціальних умов задачі. Формування об'єкта покриття здійснюється відповідно до обмежень (3.3), (3.5), (3.6) та (3.7). Для побудови наступного об'єкта покриття  $S_2$  здійснюється формування області припустимих розміщень  $S'_2$  початку локальної системи координат об'єкта покриття  $S_2$ , причому формування даної області здійснюється з кожної вершини об'єкта  $S_1$ , що належать області  $S_0$ , та точки  $R'_1(x'_1, y'_1)$  перетину ломаної лінії з об'єктом  $S_1$ . Побудова об'єкта  $S_2$  здійснюється також відповідно до обмежень (3.3), (3.5), (3.6) та (3.7) (рис. 3.37).

Область припустимих розміщень  $S'_i$  початку локальної системи координат об'єкта покриття  $S_i$  визначається наступним чином:

$$S'_i = \left( S_0 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j \right) \right) \cap \left( \bigcup_{k=1}^K S'_{i,k} \right), \quad (3.36)$$

де  $K$  - кількість об'єктів  $S'_{i,k}$ , що формують область  $S'_i$ .

Формування об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , здійснюється до тих пір, доки не будуть виконані всі умови задачі, або не буде зроблено висновок про неможливість отримання розв'язку даної задачі.

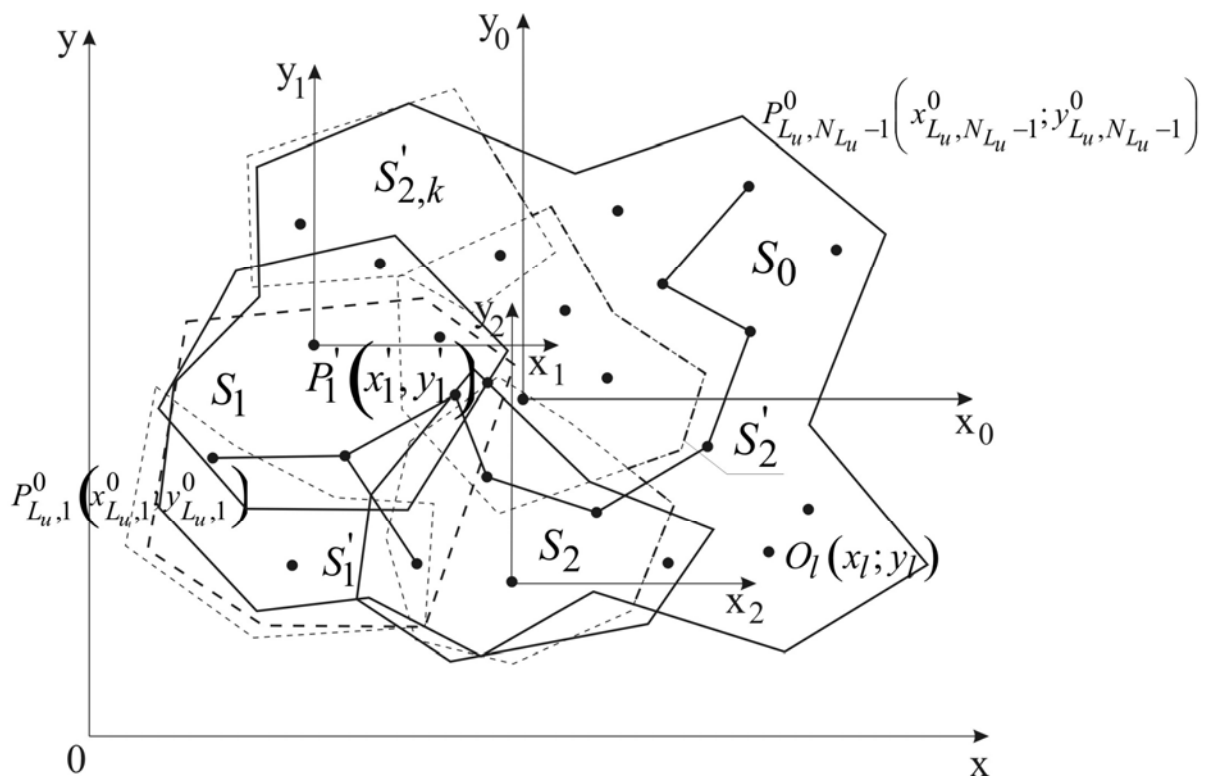


Рисунок 3.37

Спосіб покриття ломаних ліній колами змінного радіусу наведений на рис. 3.38.

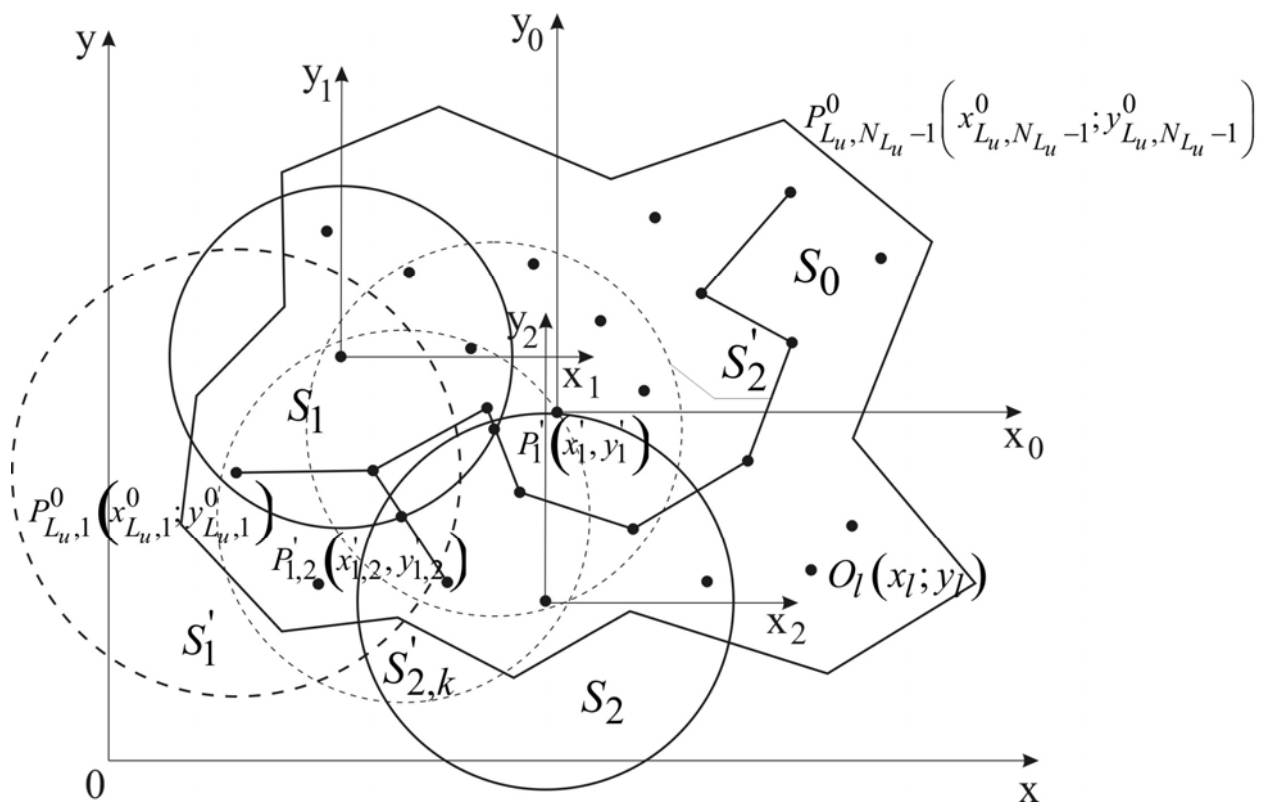


Рисунок 3.38

Оцінка складності запропонованих способів має наступний вигляд:

$$O_3 = N_{L_u} \cdot \sum_{i=1}^N N_i', \quad (3.37)$$

де  $N$  - кількість об'єктів покриття, що визначається у процесі розв'язання задачі;  $N_{L_u}$  - кількість точок, через які проведені ломані лінії;  $N_i'$  - кількість точок області припустимих розміщень  $S_i'$  початку локальної системи координат  $i$ -го об'єкта.

## РОЗДІЛ 4. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ ОБЛАСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ ЗІ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

На основі розроблених моделі та методів оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, здійснимо комп'ютерне моделювання:

- оптимізаційного покриття однозв'язних та багатозв'язних багатокутників геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками;
- оптимізаційного покриття ланок ломаних ліній геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками;
- раціонального покриття об'єктів (ділянок) залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів (розв'язання актуальної практичної задачі).

### **4.1 Комп'ютерне моделювання оптимізаційного покриття однозв'язних та багатозв'язних багатокутників геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками**

Розглянемо, перш за все, алгоритм оптимізаційного покриття однозв'язних та багатозв'язних багатокутників геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

*Крок 1.* Введення геометричної інформації щодо області покриття  $S_0$ . Якщо область  $S_0$  є багатозв'язною, то здійснюється введення геометричної інформації щодо областей заборони  $S_0^V$ ,  $V = V_1, V_2, \dots, V_n$ .

*Крок 2.* Завдання множини точок  $O_l(x_l; y_l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_l$ , в яких мають розміщуватись початки локальних систем координат об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

*Крок 3.* Завдання матриці зв'язку множини точок  $O_l(x_l; y_l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_l$ :

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

*Крок 4.* Введення спеціальної умови покриття заданої області  $S_0$  та визначаємо об'єкти покриття (опуклі та неопуклі багатокутники, кола).

*Крок 5.*  $i=1$  (поточна підмножина покриття).  $S'_0 = \emptyset$ .  $N=0$  (кількість об'єктів покриття).  $n_0 = n + \sum_{k=1}^{v_n} n_k$  (кількість вершин області  $S_0$ ).

*Крок 6.*  $S_i = \emptyset$ .

*Крок 7.*  $j=1$  (поточна вершина однозв'язної або багатозв'язної області  $S_0$ , з якої здійснюється побудова об'єкта покриття).

*Крок 8.* Якщо  $j \leq n_0$ , то *Крок 9*, інакше – *Крок 13*.

*Крок 9.* Побудова за допомогою спеціальної умови об'єкта покриття  $S_i^*$ , початок локальної системи координат якого належить множині точок  $O_l(x_l; y_l)$ ,  $l=1, 2, \dots, N_l$ .

$j=1$ , то  $S_i = S_i^*$ , *Крок 12*, інакше – *Крок 11*.

*Крок 11.* Якщо  $\omega_{S_i^* \cap S_0} > \omega_{S_i \cap S_0}$ , то  $S_i = S_i^*$ . Якщо  $\omega_{S_i^* \cap S_0} = \omega_{S_i \cap S_0}$ , то здійснюється додатково перевірка умов:  $\omega_{S_i^* \cap cS_0} < \omega_{S_i \cap cS_0}$ ;  $\omega_{S_i^* \cap S_h} < \omega_{S_i \cap S_h}$ ,  $h=1, \dots, i-1$ .

*Крок 12.*  $j = j+1$ . *Крок 8.Крок 13.* Якщо  $S_i = \emptyset$ , то *Крок 14*, інакше – *Крок 22*.

*Крок 14.* Якщо  $S'_0 = \emptyset$ , то *Крок 23*, інакше – *Крок 15*.

*Крок 15.*  $m=1$  (поточна вершина області  $S'_0$ , з якої здійснюється побудова об'єкта покриття).

*Крок 16.* Якщо  $m \leq n'_0$  (кількість вершин області  $S'_0$ ), то *Крок 17*, інакше – *Крок 21*.

*Крок 17.* Побудова за допомогою спеціальної умови об'єкта покриття  $S_i^*$ , початок локальної системи координат якого належить множині точок  $O_l(x_l; y_l)$ ,  $l=1, 2, \dots, N_l$ , причому  $O_l(x_l; y_l) \in S'_0$ .

*Крок 18.*  $m=1$ , то  $S_i = S_i^*$ , *Крок 20*, інакше – *Крок 19*.

*Крок 19.* Якщо  $\omega_{S_i^* \cap S_0} > \omega_{S_i \cap S_0}$ , то  $S_i = S_i^*$ . Якщо  $\omega_{S_i^* \cap S_0} = \omega_{S_i \cap S_0}$ , то здійснюється додатково перевірка умов:  $\omega_{S_i^* \cap cS_0} < \omega_{S_i \cap cS_0}$ ;  $\omega_{S_i^* \cap S_h} < \omega_{S_i \cap S_h}$ ,  $h = 1, \dots, i-1$ .

*Крок 20.*  $m = m + 1$ . *Крок 16.*

*Крок 21.* Якщо  $S_i = \emptyset$ , то *Крок 23*, інакше – *Крок 22*.

*Крок 22.*  $N = i$ ,  $i = i + 1$ .  $S'_0 = S_0 \setminus \left( S_0 \cap \left( \bigcup_{p=1}^N S_p \right) \right)$ . Визначаємо  $n_0$  (без урахування вершин, що належать об'єкту  $\bigcup_{p=1}^N S_p$ ) та  $n'_0$ . *Крок 6.*

*Крок 23.* Якщо  $N = 0$ , то задача не має розв'язку, *Крок 25*, інакше – *Крок 24*.

*Крок 24.* Значення цільової функції (кількість об'єктів покриття) дорівнює  $N$ . Зберігання геометричної інформації щодо об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

*Крок 25.* Кінець алгоритму.

Розглянемо обчислення похибки даного алгоритму. Перш за все, в процесі роботи алгоритму для кожного об'єкта покриття  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , необхідно визначити координати точок перетину границі даних об'єктів з областю  $S_0$  або  $S'_0$ . Позначимо кількість таких точок для  $i$ -го об'єкта  $n_i^*$ . Тоді похибка даної операції становить

$\varepsilon_p \cdot \sum_{i=1}^{N-1} n_i^*$ , де  $\varepsilon_p$  - похибка розв'язання системи рівнянь для зна-

ходження відповідних точок перетину. Даний вираз записано з урахуванням того, що для останнього  $N$ -го об'єкта покриття не потрібно знаходити вказані точки перетину, оскільки область  $S_0$  буде по-

вністю покритою об'єктом  $\bigcup_{i=1}^N S_i$ .

Інша складова похибки з'являється тоді, коли відбувається віднімання від області  $S_0$  об'єкта  $S_0 \cap \left( \bigcup_i S_i \right)$ . Дана процедура відбувається  $N - 1$  разів, а її похибка становить  $\varepsilon_d \cdot (N - 1)$ .

Таким чином, похибка вищенаведеного алгоритму має наступний вигляд:

$$\varepsilon = \varepsilon_p \cdot \sum_{i=1}^{N-1} n_i^* + \varepsilon_d \cdot (N-1). \quad (4.1)$$

На основі даного алгоритму було розроблене програмне забезпечення у середовищі Delphi, головне вікно якого наведено на рис. 4.1.

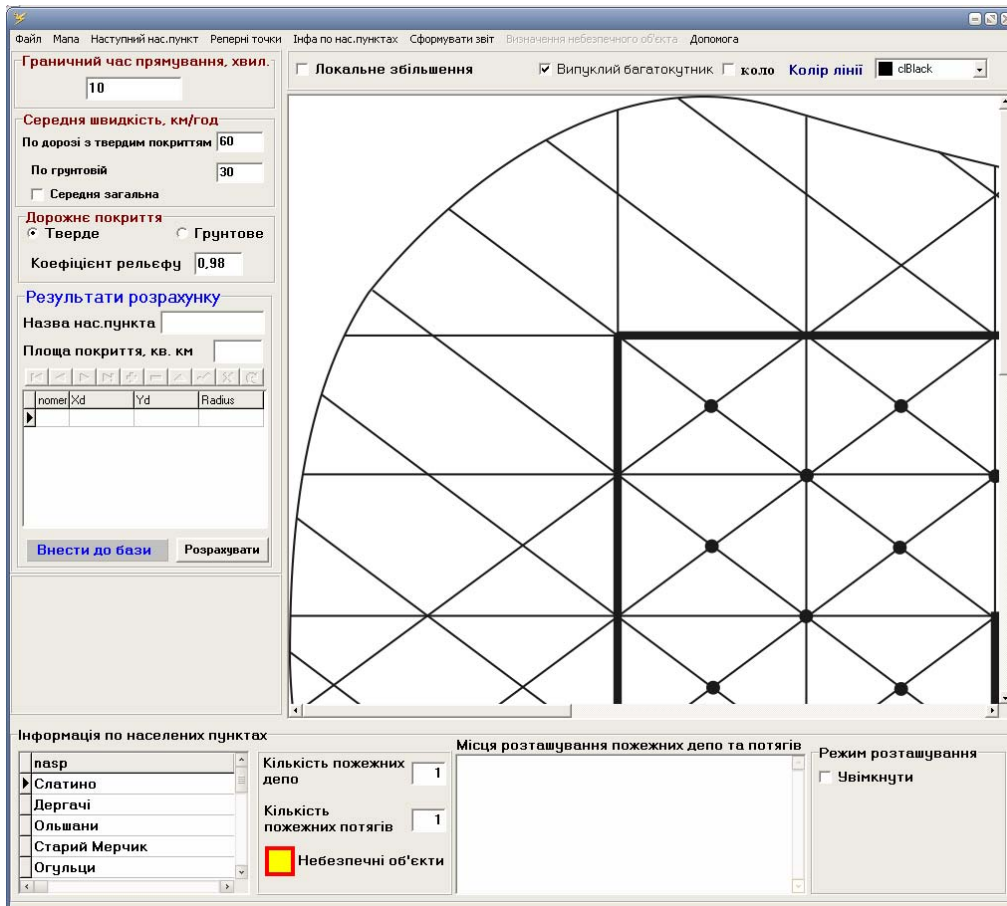


Рисунок 4.1

Дане програмне забезпечення орієнтоване на ПК з операційною системою Windows XP, Vista, Seven.

Для тестування даного програмного забезпечення було розв'язано наступну задачу.

Нехай область покриття  $S_0$  являє собою прямокутник довжиною  $A_0 = 6A = 48$  та шириною  $B_0 = 6B = 36$  (рис. 4.2).

Даний об'єкт має область заборони  $S_v$ , що також являє собою прямокутник зі сторонами  $A_v = 16$ ,  $B_v = 12$ . Таким чином, область покриття є багатозв'язною.

Необхідно покрити задану область мінімальною кількістю опуклих багатокутників зі змінними метричними характеристиками таким чином, щоб виконувалися обмеження задачі (3.2)÷(3.5), а також спеціальна умова (3.6), яка має наступний вигляд:

$$R_i \leq R^*, \quad (4.2)$$

де  $R$  - відстань від початку локальної системи координат  $i$ -го об'єкта покриття до вершин багатокутника по відрізках прямих, що з'єднують точки  $O_l(x_l, y_l)$ ,  $l=1,2,\dots,N_l$ ;  $R^*$  - задана відстань. В нашому випадку,  $R^* = 10$ .

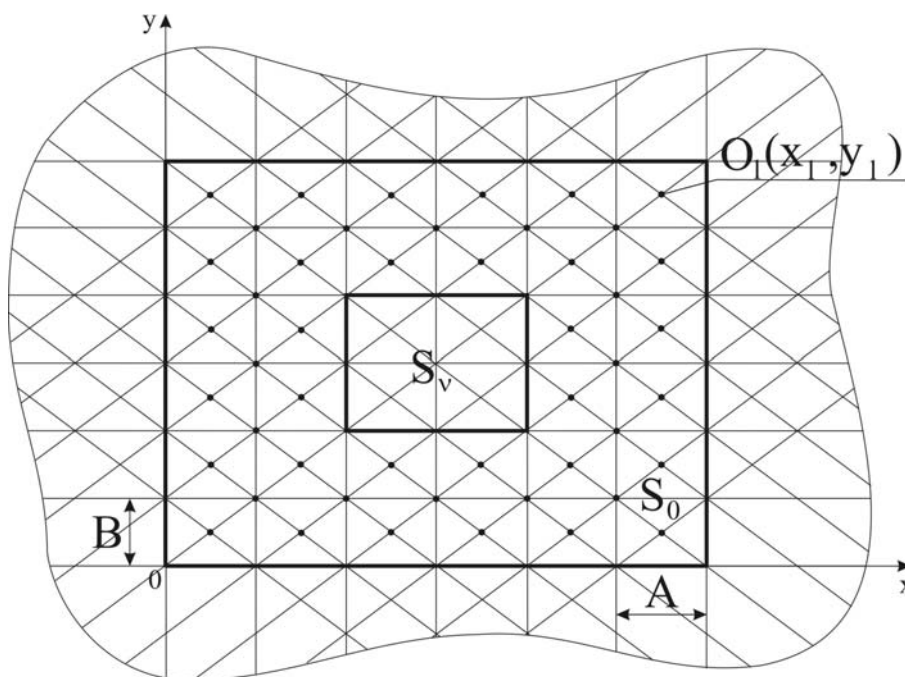


Рисунок 4.2

За допомогою розробленого програмного забезпечення було отримано результат оптимального покриття області  $S_0$  опуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками (рис. 4.3, 4.4).



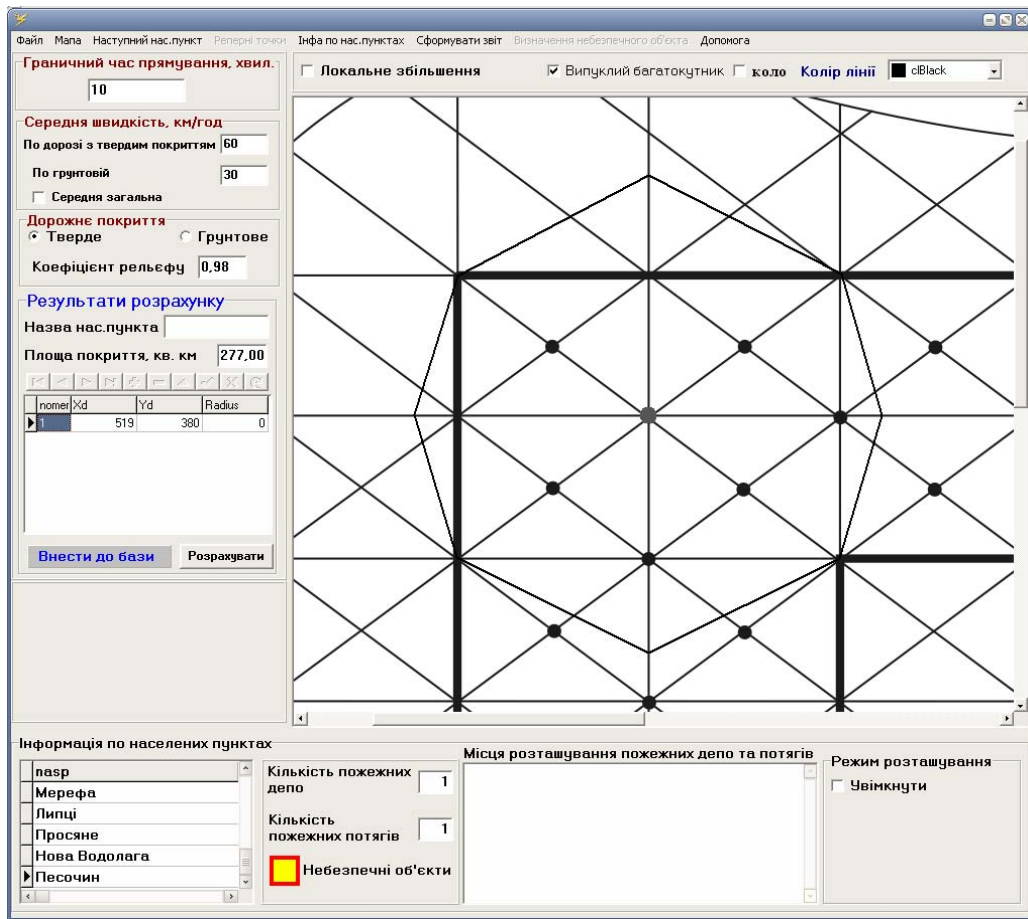


Рисунок 4.3

Слід відзначити, що оптимальна кількість об'єктів покриття  $N = 8$ .

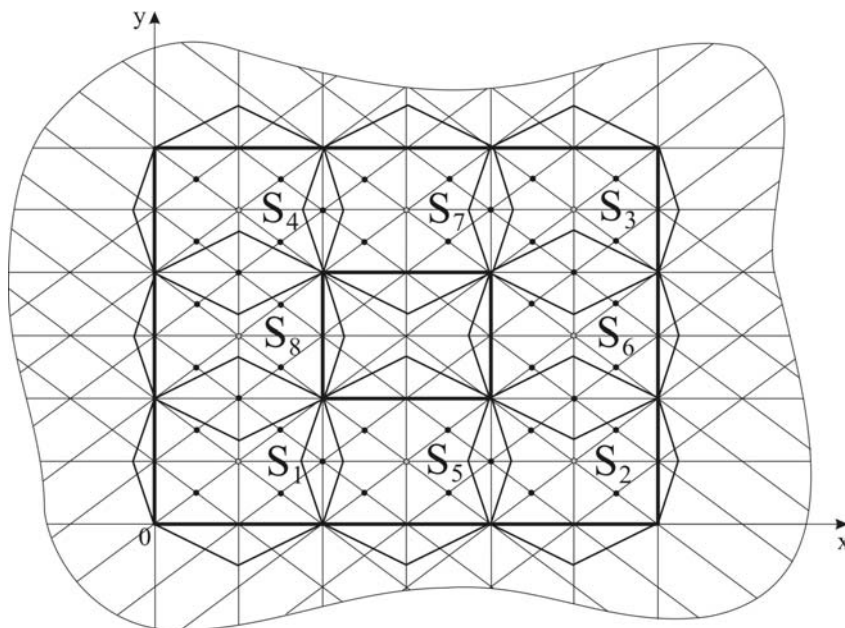


Рисунок 4.4

Координати вершин багатокутників  $S_i$ ,  $i=1,\dots,8$ , в глобальній системі координат мають наступний вигляд.

Об'єкт покриття  $S_1(8.0;6.0)$ :

$$\begin{aligned}x_{1,1} &= 0.0; y_{1,1} = 0.0; \\x_{1,2} &= 8.0; y_{1,2} = -4.0; \\x_{1,3} &= 16.0; y_{1,3} = 0.0; \\x_{1,4} &= 18.0; y_{1,4} = 6.0; \\x_{1,5} &= 16.0; y_{1,5} = 12.0; \\x_{1,6} &= 8.0; y_{1,6} = 16.0; \\x_{1,7} &= 0.0; y_{1,7} = 12.0; \\x_{1,8} &= -2.0; y_{1,8} = 6.0.\end{aligned}$$

Об'єкт покриття  $S_2(40.0;6.0)$ :

$$\begin{aligned}x_{2,1} &= 32.0; y_{2,1} = 0.0; \\x_{2,2} &= 40.0; y_{2,2} = -4.0; \\x_{2,3} &= 48.0; y_{2,3} = 0.0; \\x_{2,4} &= 50.0; y_{2,4} = 6.0; \\x_{2,5} &= 48.0; y_{2,5} = 12.0; \\x_{2,6} &= 40.0; y_{2,6} = 16.0; \\x_{2,7} &= 32.0; y_{2,7} = 12.0; \\x_{2,8} &= 30.0; y_{2,8} = 6.0.\end{aligned}$$

Об'єкт покриття  $S_3(40.0;30.0)$ :

$$\begin{aligned}x_{3,1} &= 32.0; y_{3,1} = 24.0; \\x_{3,2} &= 40.0; y_{3,2} = 20.0; \\x_{3,3} &= 48.0; y_{3,3} = 24.0; \\x_{3,4} &= 50.0; y_{3,4} = 30.0; \\x_{3,5} &= 48.0; y_{3,5} = 36.0; \\x_{3,6} &= 40.0; y_{3,6} = 40.0; \\x_{3,7} &= 32.0; y_{3,7} = 36.0; \\x_{3,8} &= 30.0; y_{3,8} = 30.0.\end{aligned}$$

Об'єкт покриття  $S_4(8.0;30.0)$ :

$$\begin{aligned}x_{4,1} &= 0.0; y_{4,1} = 24.0; \\x_{4,2} &= 8.0; y_{4,2} = 20.0; \\x_{4,3} &= 16.0; y_{4,3} = 24.0; \\x_{4,4} &= 18.0; y_{4,4} = 30.0; \\x_{4,5} &= 16.0; y_{4,5} = 36.0; \\x_{4,6} &= 8.0; y_{4,6} = 40.0; \\x_{4,7} &= 0.0; y_{4,7} = 36.0; \\x_{4,8} &= -2.0; y_{4,8} = 30.0.\end{aligned}$$

Об'єкт покриття  $S_5(24.0;6.0)$ :

$$\begin{aligned}x_{5,1} &= 16.0; y_{5,1} = 0.0; \\x_{5,2} &= 24.0; y_{5,2} = -4.0; \\x_{5,3} &= 32.0; y_{5,3} = 0.0; \\x_{5,4} &= 34.0; y_{5,4} = 6.0; \\x_{5,5} &= 32.0; y_{5,5} = 12.0; \\x_{5,6} &= 24.0; y_{5,6} = 16.0; \\x_{5,7} &= 16.0; y_{5,7} = 12.0; \\x_{5,8} &= 14.0; y_{5,8} = 6.0.\end{aligned}$$

Об'єкт покриття  $S_6(40.0;18.0)$ :

$$\begin{aligned}x_{6,1} &= 32.0; y_{6,1} = 12.0; \\x_{6,2} &= 40.0; y_{6,2} = 8.0; \\x_{6,3} &= 48.0; y_{6,3} = 12.0; \\x_{6,4} &= 50.0; y_{6,4} = 18.0; \\x_{6,5} &= 48.0; y_{6,5} = 24.0; \\x_{6,6} &= 40.0; y_{6,6} = 28.0; \\x_{6,7} &= 32.0; y_{6,7} = 24.0; \\x_{6,8} &= 30.0; y_{6,8} = 18.0.\end{aligned}$$

Об'єкт покриття  $S_7(24.0;30.0)$ :

$$x_{7,1} = 16.0; y_{7,1} = 24.0;$$

$$x_{7,2} = 24.0; y_{7,2} = 20.0;$$

$$x_{7,3} = 32.0; y_{7,3} = 24.0;$$

$$x_{7,4} = 34.0; y_{7,4} = 30.0;$$

$$x_{7,5} = 32.0; y_{7,5} = 36.0;$$

$$x_{7,6} = 24.0; y_{7,6} = 40.0;$$

$$x_{7,7} = 16.0; y_{7,7} = 36.0;$$

$$x_{7,8} = 14.0; y_{7,8} = 30.0.$$

Об'єкт покриття  $S_8(8.0;18.0)$ :

$$x_{8,1} = 0.0; y_{8,1} = 12.0;$$

$$x_{8,2} = 8.0; y_{8,2} = 8.0;$$

$$x_{8,3} = 16.0; y_{8,3} = 12.0;$$

$$x_{8,4} = 18.0; y_{8,4} = 18.0;$$

$$x_{8,5} = 16.0; y_{8,5} = 24.0;$$

$$x_{8,6} = 8.0; y_{8,6} = 28.0;$$

$$x_{8,7} = 0.0; y_{8,7} = 24.0;$$

$$x_{8,8} = -2.0; y_{8,8} = 18.0.$$

На рис. 4.5 наведено результат оптимізаційного покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками (рис. 4.6).

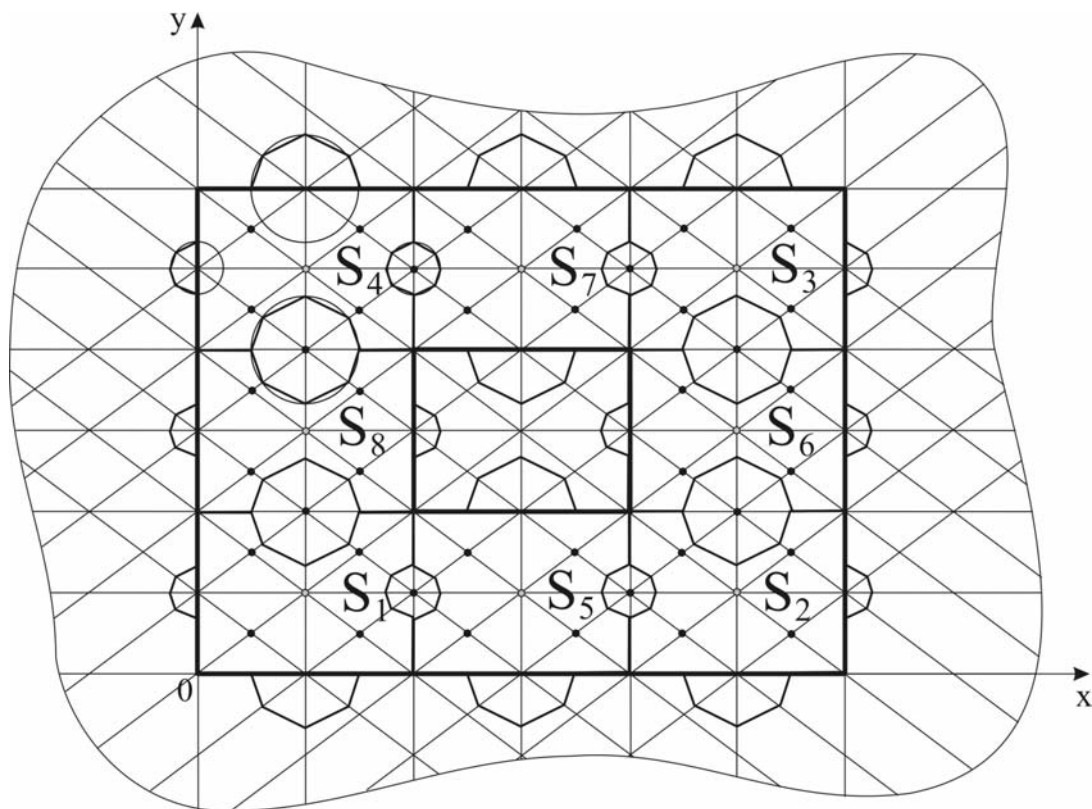
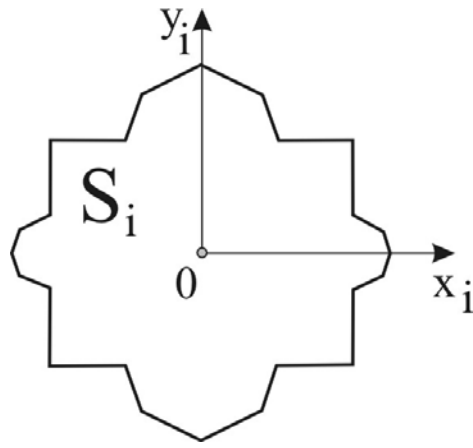
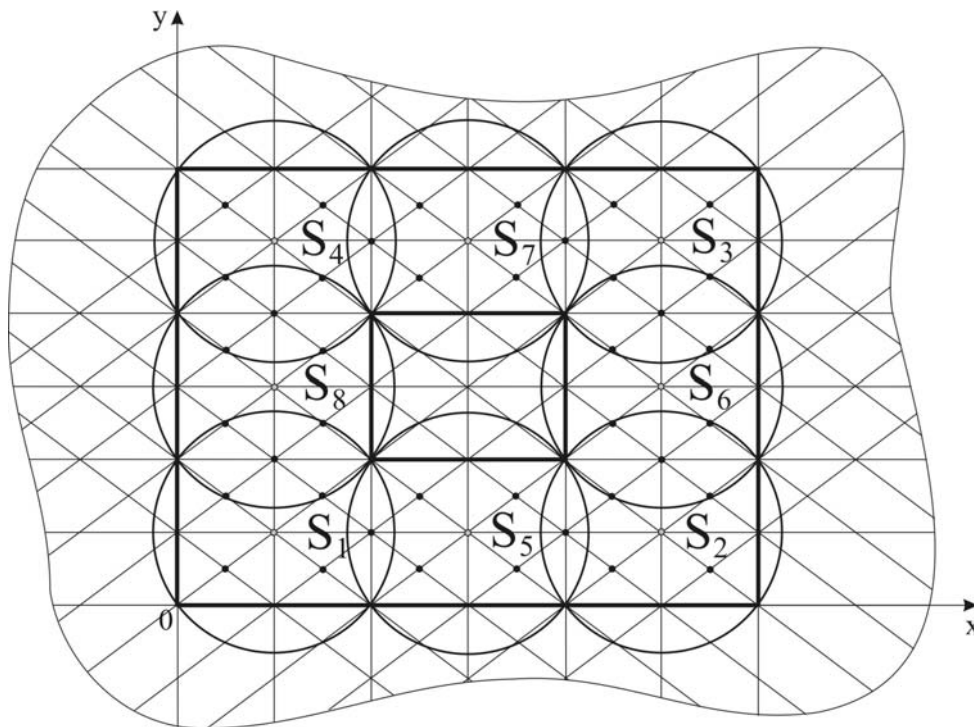


Рисунок 4.5



**Рисунок 4.6 - Неопуклий багатокутник покриття**

На рис. 4.7 наведено результат оптимізаційного покриття заданої області колами.



**Рисунок 4.7**

На рис. 4.8 та 4.9 наведено результати розв'язання змішаних задач оптимізаційного покриття заданої області. Так, на рис. 4.8 у якості об'єктів покриття розглядаються кола та опуклі багатокутники, а на рис. 4.9 – кола та неопуклі багатокутники.

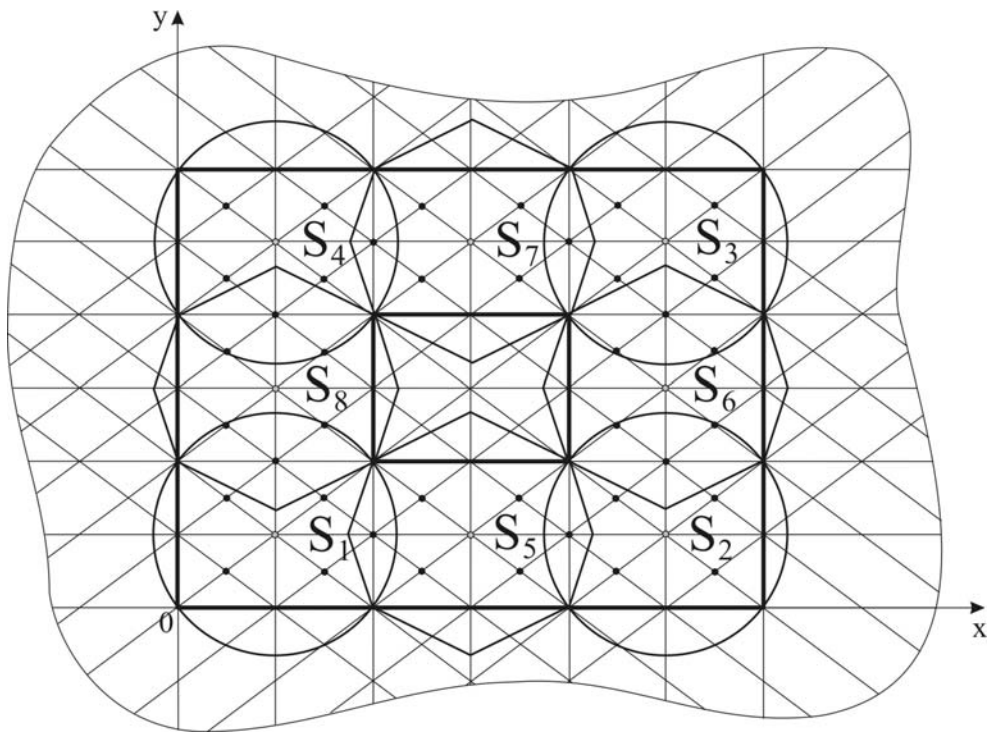


Рисунок 4.8

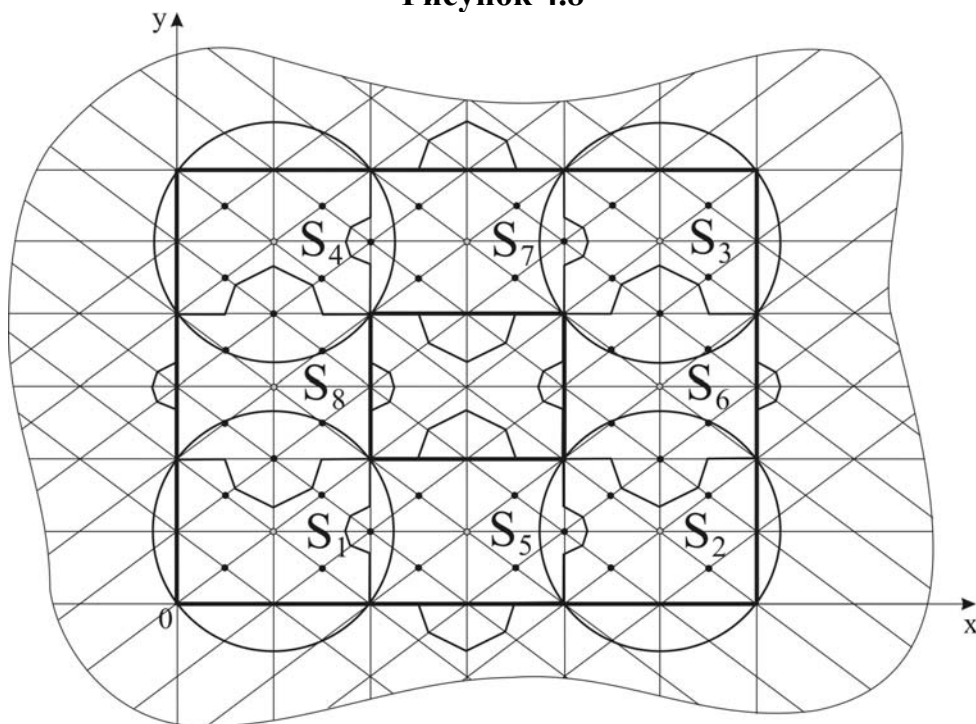


Рисунок 4.9

Результати розв'язання тестових прикладів (рис.4.4 – 4.9) свідчать про їх вірогідність та адекватність розробленого методу оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.



На рис. 4.10 наведено результат розв'язання задачі оптимізаційного покриття заданої області неопуклими багатокутниками. Цільова функція для даного приклада має вигляд (3.1), а обмеження – вигляд (3.3), (3.5), (3.6) та (3.8).

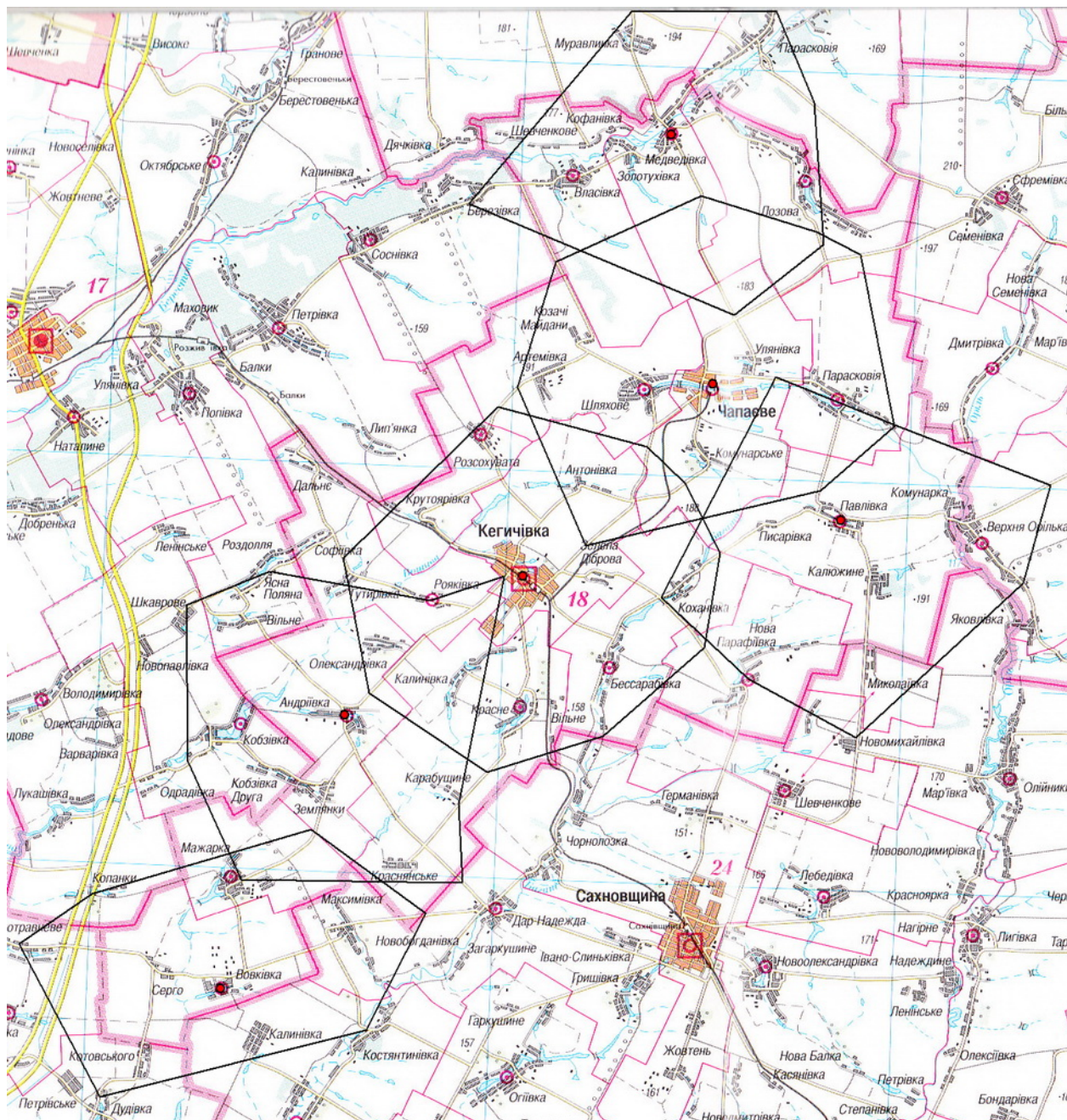


Рисунок 4.10

## 4.2 Комп'ютерне моделювання оптимізаційного покриття ланок ломаних ліній геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками

Алгоритм оптимізаційного покриття ланок ломаних ліній геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками має наступний вигляд.

*Крок 1.* Введення геометричної інформації щодо області покриття  $S_0$ . Якщо область  $S_0$  є багатозв'язною, то здійснюється введення геометричної інформації щодо областей заборони  $S_0^V$ ,  $V = V_1, V_2, \dots, V_n$ .

*Крок 2.* Завдання множини точок  $O_l(x_l; y_l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_l$ , в яких мають розміщуватись початки локальних систем координат об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

*Крок 3.* Завдання матриці зв'язку множини точок  $O_l(x_l; y_l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_l$ :

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

*Крок 4.* Завдання ділянок ломаної лінії  $\{P_{L_u, m}^0\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_{L_u}$ , що підлягають покриттю:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

*Крок 5.* Введення спеціальної умови покриття ділянок ломаної лінії  $L_u \{P_{L_u, m}^0\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_{L_u}$ , та визначаємо об'єкти покриття (опуклі та неопуклі багатокутники, кола).

*Крок 6.*  $m = 1$  (номер «стартової» точки ломаної лінії).

*Крок 7.*  $i=1$  (номер поточного об'єкта покриття).  $N_m^* = 0$  (кількість об'єктів покриття для  $m$ -го варіанта).

*Крок 8.* Виходячи зі спеціальної умови задачі, з точки  $P_{L_u, m}^0$  здійснюється побудова області  $S_i'$  припустимих розміщень початку локальної системи координат об'єкта  $S_i$ .

*Крок 9.* Визначаємо точки  $O_l(x_l; y_l) \in S_i'$  та їх кількість  $N_l^*$ .

*Крок 10.*  $l^* = 1$  (номер поточної точки з  $N_l^*$ ).

*Крок 11.* Враховуючи спеціальну умову задачі, здійснюється побудова об'єкта  $S_i^*$  з точки  $O_{l^*}(x_{l^*}; y_{l^*})$ .

*Крок 12.* Якщо  $l^* = 1$ , то  $S_i = S_i^*$ , *Крок 14*, інакше – *Крок 13*.

*Крок 13.* Якщо  $d_{S_i^*}(L_u) > d_{S_i}(L_u)$ , то  $S_i = S_i^*$  ( $d_{S_i}(L_u)$  - довжина ділянки ломаної лінії  $L_u$ , що належить тільки об'єкту  $S_i$ ). Якщо  $d_{S_i^*}(\{P_{L_u, m}^0\}) = d_{S_i}(\{P_{L_u, m}^0\})$ , то здійснюється додатково перевірка умов:  $\omega_{S_i^* \cap cS_0} < \omega_{S_i \cap cS_0}$ ;  $\omega_{S_i^* \cap S_h} < \omega_{S_i \cap S_h}$ ,  $h = 1, \dots, i-1$ .

*Крок 14.*  $l^* = l^* + 1$ . Якщо  $l^* \leq N_l^*$ , то *Крок 11*, інакше – *Крок 15*.

*Крок 15.* Якщо  $S_i = \emptyset$ , то *Крок 27*, інакше –  $i = i + 1$ , *Крок 16*.

*Крок 16.* Визначаємо точки  $P_k'(x_k'; y_k') \in L_u \cap \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j \right)$ , кількість яких дорівнює  $N_k'$ .

*Крок 17.* Якщо  $N_k' > 0$ , то *Крок 18*, інакше – *Крок 27*.

*Крок 18.*  $N_k' = N_k' + N_{\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j}$ , де  $N_{\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j}$  - кількість вершин об'єкта  $\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j$ , які включаються до множини точок  $P_k'(x_k'; y_k')$ .

*Крок 19.* Виходячи зі спеціальної умови задачі, з точок  $P_k'(x_k'; y_k')$  здійснюється побудова області  $S_i'$  припустимих розміщень початку локальної системи координат об'єкта  $S_i$ .

*Крок 20.* Визначаємо точки  $O_l(x_l; y_l) \in S_i'$  та їх кількість  $N_l^*$ .

*Крок 21.*  $l^* = 1$  (номер поточної точки з  $N_l^*$ ).



*Крок 22.* Враховуючи спеціальну умову задачі, здійснюється побудова об'єкта  $S_i^*$  з точки  $O_{l^*}(x_{l^*}; y_{l^*})$ .

*Крок 23.* Якщо  $l^* = 1$ , то  $S_i = S_i^*$ , *Крок 25*, інакше – *Крок 24*.

*Крок 24.* Якщо  $d_{S_i^*}(L_u) > d_{S_i}(L_u)$ , то  $S_i = S_i^*$ . Якщо  $d_{S_i^*}(\{P_{L_u, m}^0\}) = d_{S_i}(\{P_{L_u, m}^0\})$ , то здійснюється додатково перевірка умов:  $\omega_{S_i^* \cap cS_0} < \omega_{S_i \cap cS_0}$ ;  $\omega_{S_i^* \cap S_h} < \omega_{S_i \cap S_h}$ ,  $h = 1, \dots, i-1$ .

*Крок 25.*  $l^* = l^* + 1$ . Якщо  $l^* \leq N_l^*$ , то *Крок 22*, інакше – *Крок 26*.

*Крок 26.* Якщо  $S_i = \emptyset$ , то *Крок 27*, інакше –  $i = i + 1$ , *Крок 16*.

*Крок 27.* Якщо виконується умова повного покриття (3.6) ломаної лінії  $L_u$ , то *Крок 29*, інакше – *Крок 28*.

*Крок 28.*, формуємо набір об'єктів покриття  $\{S_m\}$ ,  $m = i-1$ .

*Крок 30.*

*Крок 29.*  $N_m^* = i-1$ , формуємо набір об'єктів покриття  $\{S_m\}$ ,  $m = i-1$ .

*Крок 30.*  $m = m + 1$ . Якщо  $m \leq N_{L_u}$ , то *Крок 7*, інакше – *Крок 31*.

*Крок 31.* Якщо  $N_m^* = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_{L_u}$ , то задача не має розв'язку, набір  $\{S_m\}$  об'єктів, що забезпечує максимальне покриття області  $S_0$ , дорівнює  $\max m$ , *Крок 33*, інакше – *Крок 32*.

*Крок 32.* Обираємо  $N = \min N_m^*$ ,  $N_m^* \neq 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_{L_u}$ , та відповідний набір об'єктів покриття  $\{S_m\}$ .

*Крок 33.* Кінець алгоритму.

Оцінку складності даного алгоритму отримаємо наступним чином. В процесі роботи алгоритму для побудови областей  $S_i'$  визначаються точки перетину кожного об'єкта покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , з ломаною лінією  $L_u$ . Позначимо кількість зазначених точок  $N_i'$ . Тоді похибка даної операції може бути записаною  $\varepsilon_p \cdot \sum_{i=1}^N N_i'$ , де  $\varepsilon_p$  - похибка розв'язання системи рівнянь для знаходження відповідних точок перетину. Також, при побудові об'єктів покриття  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , з кожної точки  $O_{l^*}(x_{l^*}; y_{l^*})$ ,

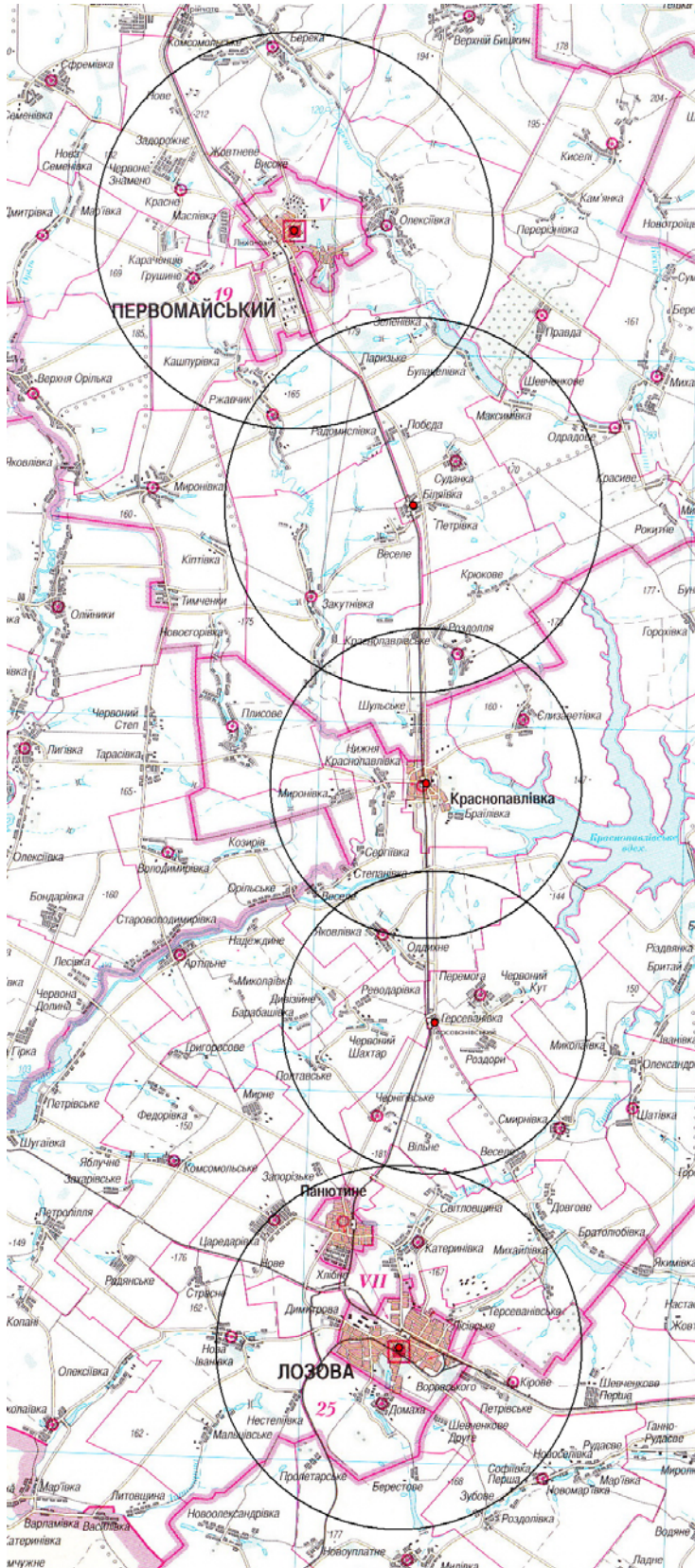


Рисунок 4.11

токутниками зі змінними метричними характеристиками (рис. 4.12).

$l^* = 1, 2, \dots, N_{l,i}^*$  області

$S_i'$ , визначаються точки перетину зазначених об'єктів покриття з ломаною, кількість яких дорівнює  $N_{l^*}''$ . При цьому похибка даної операції

складає  $\varepsilon_p \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{l^*=1}^{N_{l,i}^*} N_{l^*}''$ . Та-

ким чином, похибка вищеведеного алгоритму має наступний вигляд:

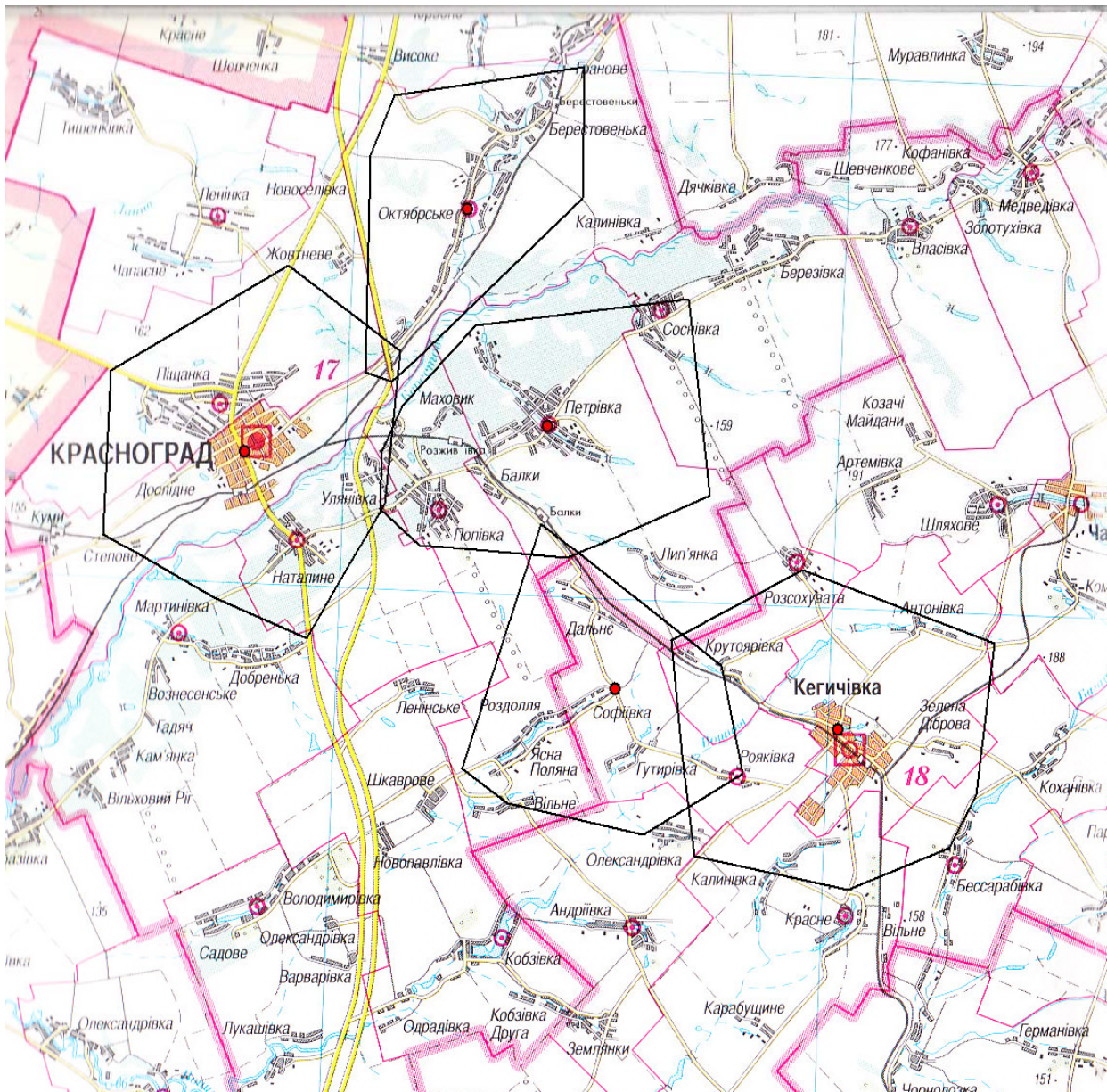
$$\varepsilon = \varepsilon_p \cdot \sum_{i=1}^N \left( N_i' + \sum_{l^*=1}^{N_{l,i}^*} N_{l^*}'' \right). \quad (4.3)$$

Слід відзначити, що даний алгоритм також реалізовано у розробленому програмному забезпеченні, головне вікно якого наведене на рис. 4.1. За допомогою даного програмного забезпечення було отримано наступні результати:

- оптимізаційне покриття ломаної лінії колами змінного радіусу (рис. 4.11);

- оптимізаційне покриття ломаної лінії бага-





**Рисунок 4.12**

У наведених на рис. 4.11 та 4.12 прикладах спеціальна умова для побудови об'єктів покриття має вигляд (4.2).

Слід відзначити, що існує можливість оптимізаційного покриття заданих ділянок ломаної лінії неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками, а також розв'язувати змішані задачі (одночасне покриття як опуклими так і неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками та колами змінного радіусу).

### **4.3 Комп'ютерне моделювання раціонального покриття об'єктів (ділянок) залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів**

Однією з актуальних практичних задач, що може бути зведеною у своїй постановці до класу задач оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками є раціональне покриття об'єктів (ділянок) залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів.

На теперішній час для сталого розвитку транспортного комплексу України необхідне гармонійне поєднання технічного розвитку рухомого складу та інфраструктури залізниць з розвиненою системою реагування на надзвичайні ситуації, які можуть виникнути при перевезенні небезпечних вантажів (рис. 4.13, 4.14).



**Рисунок 4.13**



**Рисунок 4.14**

Особливо небезпечними є надзвичайні події, які супроводжуються пожежами (вибухами) цистерн з легкозаймистими і горючими рідинами та зрідженими вуглеводневими газами, а також розливанням (викиданням) горючих рідин і сильнодіючих отруйних речовин. Чимала небезпека також від пожежі твердих горючих матеріалів у рухомому складі та на виробничих об'єктах залізничного транспорту. Більш того, гасіння пожеж на залізничному транспорті відзначається складністю в організації дій пожежно-рятувальних

підрозділів, що обумовлено наявністю великої кількості вантажів, які мають різноманітні пожежо та вибухонебезпечні властивості, необхідністю знеструмлення контактної мережі, зосередженням сил та засобів, особливо на важкодоступних ділянках залізниці, тощо.

Що стосується рівня захищеності рухомого складу та об'єктів залізничного транспорту, то даний показник залежить від багатьох факторів, зокрема, зношеності основних фондів залізниці, яка на теперішній час складає 85%, і т. ін. Не менш вагомим є такий фактор, як час реагування оперативних підрозділів на НС на залізниці. Так, аналіз літературних джерел [129-133] показує, що на період зосередження сил та засобів для гасіння пожежі припадає найбільша частка збитків від пожежі. Це особливо характерно для пожеж, на гасіння яких залучаються декілька оперативних підрозділів. Термін часу зосередження сил та засобів припадає у більшості випадків на той період їх вільного розвитку, коли швидкість зростання площі пожежі, швидкість вигорання або інші параметри пожежі, які визначають збитки, мають максимальні значення. Таким чином, пожежа або інша надзвичайна подія на рухомому складі та на об'єктах залізниці являє собою дуже складний процес. Для ліквідації її наслідків, в першу чергу, використовуються пожежно-рятувальні підрозділи та підрозділи воєнізованої охорони на залізниці (пожежні поїзди, рис. 4.13), що являють собою сили цивільного захисту постійної готовності.



Рисунок 4.13

Розглянемо особливості розміщення пожежних поїздів (підрозділів воєнізованої охорони на залізниці). Відповідно до [133], пожежні поїзди призначені для гасіння пожеж на об'єктах та в рухомому складі залізничного транспорту, а також надання допомоги при ліквідації наслідків транспортних пригод, повеней, інших стихійних лих у межах тактико-технічних можливостей. Пожежні поїзди знаходяться у віданні воєнізованої охорони, комплектуються особовим складом згідно із затвердженими Укрзалізницею штатними нормативами.

Пункти стоянки та дільниці обслуговування пожежних поїздів визначаються керівництвом залізниць. Як правило, пожежні поїзди повинні дислокуватися на великих станціях (вантажних, пасажирських, сортувальних, дільничних), на яких є експлуатаційний парк локомотивів.

Дільниця виїзду визначається, виходячи з розрахунку часу (не більше 1,5 год.), необхідного для доставки поїзда до кінцевого пункту, що обмежує дільницю.

Пожежний поїзд зі станції дислокації повинен бути відправлений не пізніше 20 хвилин із моменту отримання черговим по станції наказу на відправлення.

Пожежний поїзд повинен рухатись до місця пожежі з максимально допустимою швидкістю, з перевагою над усіма іншими поїздами.

Що стосується особливостей розміщення пожежно-рятувальних підрозділів, то даному питанню присвячено, наприклад, роботи [122,124].

Таким чином, виходячи з вищевикладеного, існує наступна задача.

*Задача 1.* Необхідно визначити мінімальну кількість пожежних поїздів та підрозділів пожежно-рятувальної служби для захисту об'єктів та рухомого складу залізничного транспорту від наслідків надзвичайних ситуацій з урахуванням заданого часу прибуття відповідного  $i$ -го оперативного підрозділу до місця надзвичайної події ( $T_i$ ).

При цьому необхідно врахувати наступні обмеження на:

- належність відповідної ділянки залізниці району функціонування оперативного підрозділу служби цивільного захисту;
- мінімум перетину дільниць виїзду пожежних поїздів;

- мінімум перетину районів функціонування пожежно-рятувальних підрозділів;
- розміщення пожежних поїздів на станціях, які мають експлуатаційний парк локомотивів;
- належність об'єктів підвищеної небезпеки районам функціонування оперативних підрозділів служби цивільного захисту;
- урахування під'їзних шляхів до відповідних ділянок залізниці.

Із задачі 1 витікає наступна.

*Задача 2.* Полягає у додатковому (у порівнянні із задачею 1) врахуванні існуючих місць розташування пожежних поїздів та пожежно-рятувальних підрозділів.

Розглянемо загальну модель раціонального покриття об'єктів залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів:

$$\min_{W} N, \quad (4.4)$$

де  $W$ :

$$\begin{aligned} & \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u \left( P_{L_u,1}^0, \dots, P_{L_u,n_{L_u}}^0, L \right) \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \bigcup_{u=1}^{N_u} L_u \left( P_{L_u,1}^0, \dots, P_{L_u,n_{L_u}}^0, L \right) \right); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\omega_{\Omega} \left( r_i; r_j; x_i, y_i; x_j, y_j \right) \rightarrow 0; \quad i = 1, 2, \dots, N'; \quad j = i + 1, \dots, N'; \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\Omega} \left( p_k; p_l; x_k, y_k; x_l, y_l \right) \rightarrow 0; \quad k = N' + 1, \dots, N' + N''; \\ l = k + 1, \dots, N' + N''; \quad N' + N'' = N; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\omega_{\Omega} \left( r_i; r_v; x_i, y_i; x_0, y_0 \right) \rightarrow 0; \quad i = 1, 2, \dots, N'; \quad v = v_1, v_2, \dots, v_n; \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\Omega} \left( p_k; p_{\xi}; x_k, y_k; x_{\xi}, y_{\xi} \right) \rightarrow 0; \quad k = N' + 1, \dots, N' + N''; \\ \xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\omega_{\Omega} \left( r_i; p_{cS_0}; x_i, y_i; x_0, y_0 \right) \rightarrow 0; \quad i = 1, 2, \dots, N'; \quad cS_0 \cup S_0 = R^2; \quad (4.10)$$



$$\omega_{\Omega}(p_k; p_{cS_0}; x_k, y_k; x_0, y_0) \rightarrow 0; k = N' + 1, \dots, N' + N''; \quad (4.11)$$

$$O'_{\lambda}(x_{\lambda}; y_{\lambda}) \in S_i(p_i; x_i, y_i); i = 1, 2, \dots, N'; \lambda \in 1, 2, \dots, N_{\lambda}; \quad (4.12)$$

$$O''_{\mu}(x_{\mu}; y_{\mu}) \in S_q(p_q; x_q, y_q); q \in 1, 2, \dots, N; \mu = 1, 2, \dots, N_{\mu}; \quad (4.13)$$

$$T(S_i) \leq T'_*; i = 1, 2, \dots, N'; \quad (4.14)$$

$$T(S_k) \leq T''_*; k = N' + 1, \dots, N' + N''. \quad (4.15)$$

В моделі (4.4)÷(4.15):

-  $N$  - загальна кількість підрозділів цивільного захисту постійної готовності;

-  $N'$  - кількість підрозділів воєнізованої охорони на залізниці;

-  $N''$  - кількість пожежно-рятувальних підрозділів;

- обмеження (4.5) описує умову максимального покриття об'єктів залізниці;

- обмеження (4.6) являє собою умову мінімізації взаємного перетину районів функціонування підрозділів воєнізованої охорони на залізниці;

- обмеження (4.7) – умова мінімізації взаємного перетину районів функціонування пожежно-рятувальних підрозділів;

- обмеження (4.8) та (4.9) являють собою умови мінімізації районів функціонування підрозділів воєнізованої охорони на залізниці та пожежно-рятувальних підрозділів з існуючими відповідними підрозділами цивільного захисту;

- обмеження (4.10) та (4.11) описують умови мінімізації перетину районів функціонування підрозділів цивільного захисту з доповненням області  $S_0$ , якій належать ділянки залізниці  $L_u$ , до простору  $R^2$ .

Слід відзначити, що вирази (4.12)÷(4.15) являють собою групу спеціальних обмежень задачі, що безпосередньо впливають на побудову районів функціонування підрозділів цивільного захисту. Так, обмеження (4.12) описує умову розміщення підрозділів воєнізованої охорони станціях, що мають експлуатаційний парк локомотивів, причому  $O'_{\lambda}(x_{\lambda}; y_{\lambda})$  - місця розташування зазначених станцій,



кількість яких дорівнює  $N_\lambda$ . Обмеження (4.13) являє собою умову належності об'єктів підвищеної небезпеки районам функціонування підрозділів цивільного захисту постійної готовності, причому  $O_\mu''(x_\mu; y_\mu)$  - місця розташування зазначених об'єктів, кількість яких дорівнює  $N_\mu$ . Обмеження (4.14) та (4.15) описують умови не перевищення часу слідування підрозділів цивільного захисту  $T(S_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N'$ , та  $T(S_k)$ ,  $k=N'+1,\dots,N'+N''$ , до місця виникнення НС заданого часу  $T_*'$  та  $T_*''$  відповідно. Тут  $T_*'$  - припустимий час слідування пожежних поїздів до місця НС;  $T_*''$  - припустимий час слідування пожежно-рятувальних підрозділів до місця НС.

Для розв'язання задачі (4.4)÷(4.15) було застосовано спосіб оптимізаційного покриття ділянки ломаної лінії, що належить неопуклому багатокутнику, геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, який реалізовано у програмному забезпеченні, наведеному на рис. 4.1 та рис. 4.14.

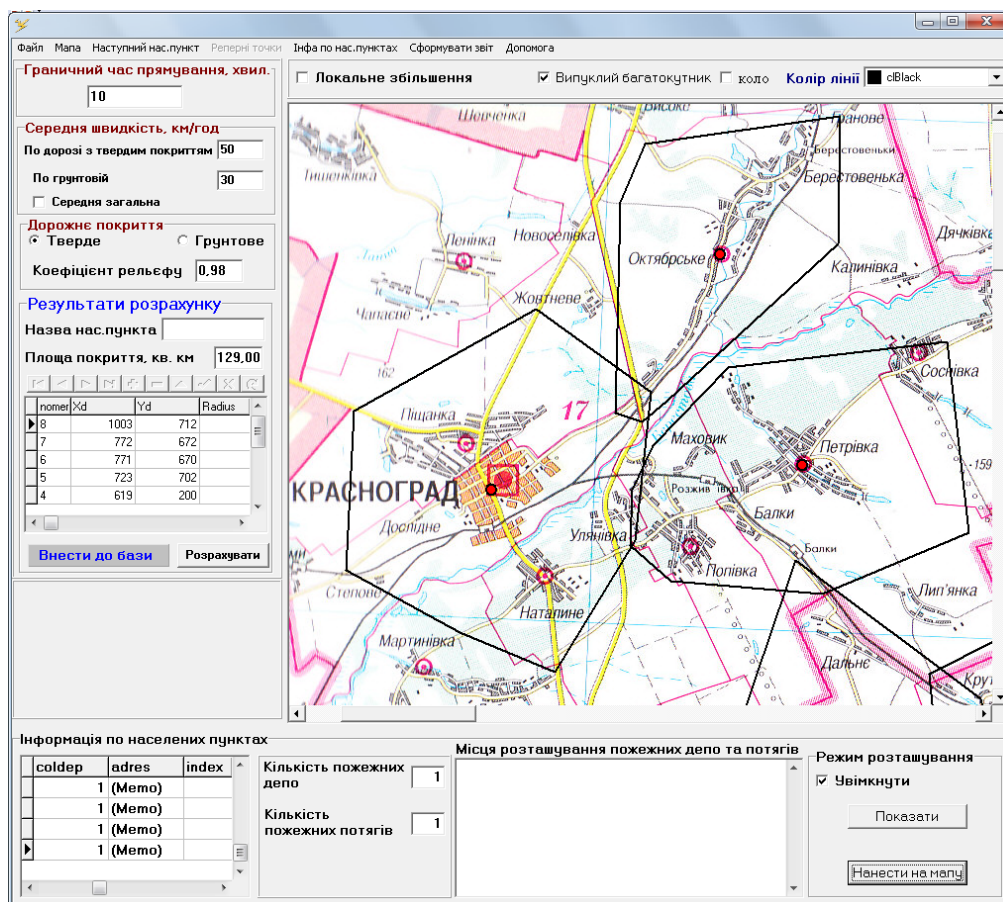


Рисунок 4.14

Результат комп'ютерного моделювання раціонального покриття об'єктів (ділянок) залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів наведено на рис. 4.15. При цьому найвіддаленіші точки ділянки залізниці, що обслуговуються пожежним поїздом, визначаються шляхом перетину кола відповідного радіусу (який є змінним) з відповідною ділянкою залізниці. Райони функціонування пожежно-рятувальних підрозділів являють собою неопуклі багатокутники зі змінними метричними характеристиками.

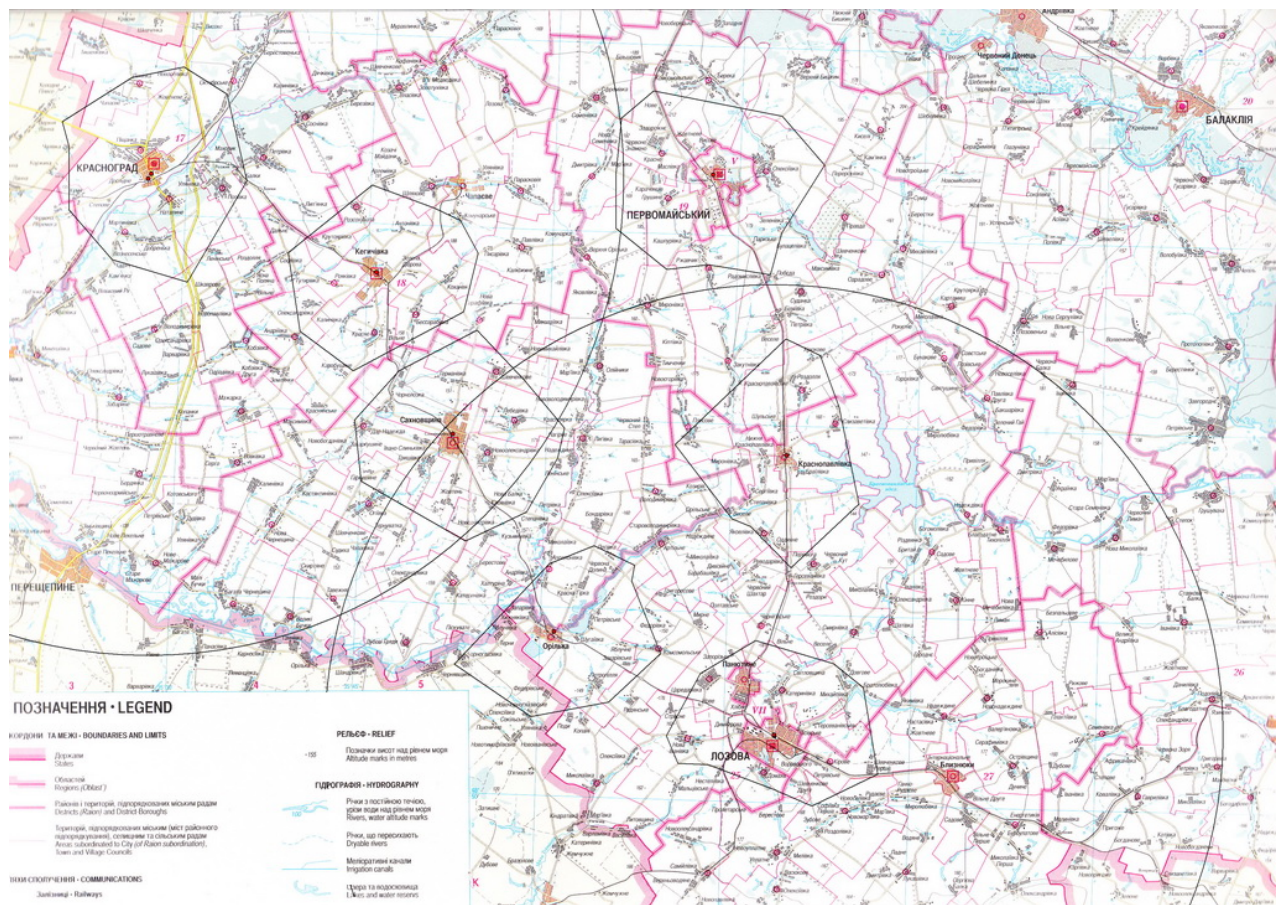


Рисунок 4.15

Слід зазначити, що при розв'язанні задачі враховано наявність пожежно-рятувальних підрозділів в м. Первомайський, м. Лозова, смт. Кегичівка та смт. Сахновщина, а також наявність підрозділу воєнізованої охорони на залізниці в м. Лозова. Під час розрахунків швидкість пожежно-рятувального автомобіля приймалась 30 км/год. [134], а час прибуття пожежно-рятувального підрозділу у найвіддаленішу точку району виїзду – 20 хв. Що стосується пожежного по-

їзду, то його швидкість приймалася рівною 40 км/год. [133], а час досягнення найвіддаленішої точки району виїзду (перетин кола відповідного радіусу з ділянкою залізниці) – 70 хв. (передбачається, що на відправлення зі станції відводиться до 20 хв.). Також враховувалось обмеження стосовно чисельності населення у відповідних населених пунктах. Координати вершин районів захисту та координати місць розташування підрозділів цивільного захисту записуються у файл.

Одержані результати дозволяють зробити рекомендації про необхідність створення підрозділу воєнізованої охорони на залізниці в м. Красноград, та двох пожежно-рятувальних підрозділів в смт. Краснопавлівка та смт. Орілька (Лозівський район Харківської області). Дані рекомендації повністю відповідають положенням Концепції Державної цільової соціальної програми забезпечення пожежної безпеки на 2011-2015 рр. (Розпорядження Кабінету Міністрів України від 29.12.2010 р. № 2348-р).

## ВИСНОВКИ

Дана робота присвячена розробці методу та способів оптимізаційного покриття заданих областей у просторі  $R^2$  геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Зазначені метод та способи базуються на застосуванні апарату  $\omega$ -функцій покриття та  $\omega$ -поверхонь.

*Значення для науки* даної роботи полягає у подальшому розвитку методів та способів побудови раціональної кількості геометричних об'єктів покриття зі змінними метричними характеристиками, що задовольняють обмеженням задачі, за допомогою удосконаленого апарату  $\omega$ -функцій та створеного нового способу побудови  $\omega$ -поверхонь.

*Значення для практики* полягає у комп'ютерному моделюванні оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, оскільки до даного класу можуть бути зведеними актуальні практичні задачі з різних сфер діяльності людини.

*При цьому отримано результати, що мають науково-практичну цінність:*

1. Аналіз існуючих методів геометричного моделювання об'єктів та процесів дозволив зробити висновок про те, що на теперішній час не існує методів розв'язання задач оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, яка відноситься до класу задач оптимізаційного геометричного проектування. Розроблено класифікацію задач оптимізаційного геометричного проектування.

2. Отримав подальшого розвитку підхід до побудови класу  $\omega$ -функцій для геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками. Вперше введено поняття та розроблено спосіб комп'ютерного моделювання  $\omega$ -поверхонь. Дослідження властивостей  $\omega$ -функцій та  $\omega$ -поверхонь, дозволило формалізувати обмеження та розробити ефективний метод розв'язання поставленої задачі.

3. Розроблено нову загальну модель оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, а також здійснено геометричне моделювання областей припустимих розв'язків задачі. Зроблено висновок, що цільова функція задачі є неаналітичною (алгоритмічною), обмеження



є кусочно-нелінійними. В загальному випадку, кількість обмежень, що необхідно врахувати для розв'язання задачі, дорівнює  $C_N^2 + 2N + v_n N + 1$ , де  $N$  - кількість об'єктів покриття;  $v_n$  - кількість областей заборони. Наведені особливості дозволили зробити висновок, що для розв'язання даної задачі неможливо застосувати відомі методи оптимізації.

4. Вперше розроблено метод та способи оптимізаційного покриття заданих областей (однозв'язний та багатозв'язний неопуклий багатокутник, ланки ломаних ліній, що належать неопуклому багатокутнику) геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками (опуклі та неопуклі багатокутники, кола), що дозволило створити алгоритми розв'язання поставлених задач. Отримано оцінки складності розроблених методів та способів.

5. На основі розроблених загальної моделі, методу та способів оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, було створено алгоритмічне та програмне забезпечення, здійснено комп'ютерне моделювання оптимізаційного покриття однозв'язних та багатозв'язних багатокутників і ланок ломаних ліній геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Для розроблених алгоритмів отримано оцінки похибки.

6. Отримано результат розв'язання актуальної практичної задачі, а саме, задачі раціонального покриття об'єктів (ділянок) залізниці районами функціонування підрозділів воєнізованої охорони та пожежно-рятувальних підрозділів. На основі одержаних результатів зроблено рекомендації щодо підвищення ефективності захисту об'єктів залізниці в Харківській області від надзвичайних ситуацій різного характеру за рахунок зменшення часу реагування оперативних підрозділів на дані НС та розробки планів взаємодії зазначених підрозділів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных сооружений / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалев. – К.: Будівельник, 1978. – 112 с.
2. Михайленко В.Е. Формообразование оболочек в архитектуре / Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л. – К.: Будівельник, 1972. – 207 с.
3. Михайленко В.Є. Сучасний стан методів геометричного та комп'ютерного моделювання та напрямки їх розвитку / В.Є. Михайленко, О.В. Черніков // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 68. – С. 3-6.
4. Михайленко В.Е. Прикладная геометрия в Украине / В.Е. Михайленко // Современные проблемы геометрического моделирования: сборник трудов украино-российской научно-практической конференции. Спец. выпуск. – Харьков, 2005. – С. 5-14.
5. Михайленко В.Є. Здобутки і задачі Української асоціації з прикладної геометрії / В.Є. Михайленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 7-11.
6. Михайленко В.Є. Еволюція змісту і значення нарисної геометрії за 70 років / В.Є. Михайленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2000. – Вип. 67. – С. 5-10.
7. Михайленко В.Є. Дискретне геометричне моделювання на базі інтегральної моделі кривої / В.Є. Михайленко, В.Г. Лі // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 1999. – Вип. 66. – С. 3-8.
8. Mikhailenko V.Ye. Integral models of curves / V.Ye. Mikhailenko, V.G. Li // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 19-26.
9. Михайленко В.Є. Управління формою тонкої оболонки розрахункового фрагмента водопідпірної споруди / В.Є. Михайленко, В.К. Цихановський, С.М. Козловець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 71. – С. 3-8.
10. Михайленко В.Є. Біонічні принципи енергозбереження в архітектурі та дизайні / В.Є. Михайленко, О.В. Кащенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 11-16.
11. Михайленко В.Є. Про наукові та методичні засади формування курсу біодизайну / В.Є. Михайленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2008. – Вип. 80. – С. 5-10.

12. Kovalev S.M. Main directions in the development of discrete applied geometry of curves and surfaces / S.M. Kovalev, L.S. Ivanova // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 67-71.

13. Ковалев С.Н. Статико-геометрический способ формирования дискретных сетей / С.Н. Ковалев // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К., 1989. – Вып. 48. – С. 17-19.

14. Ковальов С.М. Локальні інтерполяції дугами клотоїди з другим порядком гладкості / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 71. – С. 31-34.

15. Ковальов С.М. Одновимірна дискретна локальна інтерполяція з використанням кубічного поліному / С.М. Ковальов, О.І. Ахматшина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 77. – С. 21-25.

16 Ковальов С.М. Параметричний аналіз багатогранників / С.М. Ковальов, О.І. Ахматшина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 68. – С. 29-30.

17. Ковальов С.М. Параметризація симплексів у багатовимірних просторах / С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2005. – Вип. 75. – С. 16-19.

18. Ковалев С.Н. Прикладная геометрия и геометрическая статика / С.Н. Ковалев, В.А. Вязанкин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 41-43.

19. Ковальов С.М. Дискретна двовимірна кускова інтерполяція з першим порядком гладкості стикування порцій / С.М. Ковальов, А.В. Золотова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 164-170.

20. Куценко Л.Н. Теоретические основы и геометрические приложения метода A-отображений: автореф. дис. на соискание научн. степени доктора техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладная геометрия, инженерная графика» / Л.Н. Куценко. – К., 1992 – 36 с.

21. Куценко Л.М. Застосування чотиримісних R-операцій для опису геометричних об'єктів / Л.М. Куценко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 69. – С. 17-20.

22. Куценко Л.М. Визначення поверхні нерухомого відбивача у випадку рухомого джерела променів / Л.М. Куценко // Праці Тав-

рійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2004. – Т. 24. – С. 15-21.

23. Куценко Л.М. Визначення критичних значень параметрів нелінійних диференціальних рівнянь за допомогою анімації зображень їх розв'язків / Л.М. Куценко, М.М. Пікрасов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 33-40.

24. Куценко Л.М. Побудова відображення Пуанкаре для гравітаційного більярда в межах кута, утвореного двома півплощинами / Л.М. Куценко, О.В. Адашевський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2011. – Т. 51. – С. 71-78.

25. Kutsenko L.N. On some dissertations in the field of applied geometry written in Kharkiv region / L.N. Kutsenko // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 94-99.

26. Подгорный А.Л. Геометрическое моделирование пространственных конструкций: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / Подгорный Алексей Леонтьевич. – М., 1975. – 371 с.

27. Pidgorny O.L. From the theory of the maps to geometrical modelling of objects, phenomena and processes / O.L. Pidgorny // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 32-38.

28. Підгорний О.Л. Можливості енергозбереження на основі геометричних досліджень умов сонячного опромінення, природного та штучного освітлення / О.Л. Підгорний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 5-10.

29. Підгорний О.Л. Можливості розвитку досліджень нових лінійчатих поверхонь вищих порядків / О.Л. Підгорний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 18-22.

30. Підгорний О.Л. Напрямні конуси косих лінійчатих поверхонь вищих порядків в загальних та окремих випадках / О.Л. Підгорний // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2011. – Т. 50. – С. 3-6.

31. Подгорный А.Л. Некоторые результаты и перспективы развития прикладной геометрии в архитектурно-строительной области / А.Л. Подгорный // Современные проблемы геометрического моделирования: сборник трудов украино-российской научно-практической конференции. Спец. выпуск. – Харьков, 2005. – С. 32-39.



32. Підгорний О.Л. Проективний спосіб отримання подвійних ліній торсів 8-го порядку та його значення для розвитку дослідження торсів / О.Л. Підгорний, В.С. Обухова // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка.– Мелітополь, 2004. – Т. 24. – С. 10-14.

33. Обухова В.С. Торсові поверхні з напрямним конусом 2-го порядку / В.С. Обухова, О.Л. Підгорний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 69. – С. 6-10.

34. Obukhova V.S. Development of applied geometry of algebraic surfaces of higher orders / V.S. Obukhova // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 61-67.

35. Плоский В.О. Методологічна парадигма прикладної геометрії та зміст паспорту спеціальності 05.01.01 / В.О. Плоский // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 23-26.

36. Plosky V.O. From the system analysis of applied geometry methods toward structure of Ukrainian geometrical school / V.O. Plosky // Journal for Geometry and Graphics. – Vol. 6. – 2002, No. 2. – PP. 201-211.

37. Плоский В.О. Особливості та тенденції розвитку методології прикладної геометрії / В.О. Плоский // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2005. – Вип. 75. – С. 75-79.

38. Плоский В.А. Роль межнаучного взаємодія в розвитку прикладної геометрії // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 1997. – Вип. 61. – С. 53-58.

39. Плоский В.О. Принципи системності в прикладній геометрії та шляхи їх реалізації / В.О. Плоский, Р.М. Баглюк // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 88. – С. 16-20.

40. Плоский В.О. Системна класифікація ММР: поняття та активне використання / В.О. Плоский, С.А. Кожедуб // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 182-188.

41. Pidkorytov A.M. Methods of quasihelical surfaces geometrical and mathematical modeling / A.M. Pidkorytov // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 85-91.

42. Подкоритов А.М. Геометричне моделювання спряжених квазігвинтових поверхонь із точковим контактом, що виключає інтерференцію / А.М. Подкоритов // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка.– Мелітополь, 2007. – Т. 36. – С. 35-38.

43. Гнатушенко В.В. Реєстрація зображень з використанням ентропійних критеріїв / В.В. Гнатушенко, В.М. Корчинський // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2007. – Т. 34. – С. 64-68.

44. Корчинський В.М. Геометрична та радіометрична корекція проєкційних багатоспектральних зображень / В.М. Корчинський, Д.М. Свинаренко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків, 2005. – Вип. 9. – С. 90-95.

45. Корчинський В.М. Аналіз геометричних форм проєкційних зображень на основі вейвлет-перетворень / В.М. Корчинський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 68. – С. 63-66.

46. Корчинський В.М. До питання про оптимальне дискретне подання напівтонових проєкційних зображень / В.М. Корчинський // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2004. – Т. 24. – С. 22-26.

47. Пугачов Є.В. Розрахунок освітленості від світлових шахт у вигляді зрізаного колового конуса з дифузним відбиванням світла / Т.М. Кундрат, Є.В. Пугачов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 147-152.

48. Пугачов Є.В. Визначення типу апроксимувального об'єкта точкової множини / Є.В. Пугачов, В.І. Черняк // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 48-52.

49. Пугачов Є.В. Порівняння методів розрахунку ефективності циліндричних дзеркально відбиваючих світлових шахт / Ю.В. Гарбарук, Є.В. Пугачов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2012. – Вип. 90. – С. 79-83.

50. Khomchenko A.N. Probabilistic models in applied geometry / A.N. Khomchenko // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 121-126.

51. Хомченко А.Н. Проблема збереження геометричної ізотропії на серендипових елементах вищих порядків / А.Н. Хомченко, О.І. Литвиненко, І.О. Астіоненко // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2007. – Т. 36. – С. 39-44.

52. Хомченко А.Н. Візуалізація процедури гладкої зшивки поверхонь Біркгофа-Гарабедіана / А.Н. Хомченко, О.І. Литвиненко,

Н.О. Козуб, І.О. Астіоненко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 414-420.

53. Найдиш В.М. Дискретне диференціювання / Найдиш В.М., Верещага В.М., Найдиш А.В. – Мелітополь: «Люкс», 2007. – 116 с.

54. Найдиш В.М. Відновлення інформації на основі скінченних різниць / В.М. Найдиш // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2000. – Т. 11. – С. 3-9.

55. Найдыш В.М. Теоретические основы дискретного геометрического моделирования / В.М. Найдыш // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К., 1995. – Вып. 58. – С. 25-29.

56. Найдиш В.М. Геометричні аспекти дискретної інтерполяції / В.М. Найдиш, А.В. Найдиш // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2004. – Т. 23. – С. 3-8.

57. Найдиш В.М. Новий погляд на проблеми дискретного геометричного моделювання / В.М. Найдиш, А.В. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2004. – Вип. 74. – С. 14-19.

58. Naydysh V.M. Discrete geometric modeling – a new direction of the development in applied geometry of curve lines and surfaces / V.M. Naydysh // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С.50-55.

59. Naydysh A.V. Geometric direction of the solution of extremum problems with nondifferentiable functions / A.V. Naydysh // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 155-159.

60. Найдиш В.М. Аналіз вихідних даних дискретного геометричного моделювання / В.М. Найдиш, А.В. Найдиш // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2006. – Т. 33. – С. 3-9.

61. Найдиш А.В. Згущення дискретно представлені кривої з урахуванням внутрішньої геометрії вихідної ДПК / А.В. Найдиш, В.М. Малкіна, Д.О. Сосновських // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 27-32.

62. Верещага В.М. Поверхні Найдиша / В.М. Верещага // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2011. – Т. 50. – С. 7-13.

63. Верещага В.М. Побудова поверхонь Найдиша методом плавного перетікання на основі послідовних одновимірних згущень / В.М. Верещага, А.В. Найдиш, А.О. Бездітний, В.В. Кучеренко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2011. – Т. 50. – С. 48-55.

64. Верещага В.М. Визначення поняття дискретного геометричного образу у варіаційному дискретному геометричному моделюванні / В.М. Верещага // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2011. – Т. 51. – С. 3-8.

65. Тривимірні параметричні моделі елементів м'яких меблів / Сазонов К.О., Анпілогова В.О., Демченко В.В. [та ін.] // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 69. – С. 26-29.

66. Sazonov K.O. Development of computer-aided graphic spatial modeling / K.O. Sazonov // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 91-93.

67. Дворецкий А.Т. Аппарат вторичных ображений // А.Т. Дворецкий, Д.А. Дворецкий // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 16-22.

68. Дворецкий А.Т. Концепция освещения помещений жилых и общественных зальных зданий отраженным светом / А.Т. Дворецкий, О.И. Головченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 216-221.

69. Дворецкий А.Т. Компьютерное моделирование потока отраженных лучей / А.Т. Дворецкий, Т.В. Денисова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2008. – Вип. 80. – С. 19-24.

70. Скідан І.А. Спеціальні параметризації простору і поверхонь / І.А. Скідан // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків, 2005. – Вип. 9. – С. 6-12.

71. Скідан І.А. Напрямки досліджень Донецької школи з прикладної геометрії / І.А. Скідан // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2004. – Т. 24. – С. 27-31.

72. Скідан І.А. Включення країв у координатну сітку поверхні / І.А. Скідан, І.О. Абрамова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2011. – Т. 50. – С. 56-64.

73. Надолинний В.О. Розгортні прості куски поверхонь з мінімальною кількістю сторін / В.О. Надолинний, А.С. Павлоцький // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2005. – Вип. 75. – С.35-40.

74. Pylypaka S.F. Control of bending of ruled surfaces on an example of a screw conoid / S.F. Pylypaka // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 180-186.

75. Гумен М.С. Геометрія комплексного простору в розв'язанні задач оптимізації / М.С. Гумен, Є.В. Мартин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 68. – С. 31-33.

76. Гумен М.С. Геометрія оптимізації і області Парето / М.С. Гумен, Є.В. Мартин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 69. – С. 29-32.

77. Гумен М.С. Геометричні аспекти визначення раціональних параметрів елементів регульованих систем / М.С. Гумен, Є.В. Мартин, Б.В. Панкевич // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків, 2005. – Вип. 12. – С. 23-27.

78. Борисенко В.Д. Візуалізація геометричних моделей робочих коліс турбомашин / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 68. – С. 81-85.

79. Pavlov A.V. Review of the main scientific investigations in the field of applied geometry at the Department of descriptive geometry, engineering and computer graphics of the National technical university "Kyiv polytechnical institute" / A.V. Pavlov, V.V. Vanin // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 27-32.

80. Ванін В.В. Застосування структурно-параметричного підходу як методології комп'ютерної комбінаторно-варіаційної геометрії / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, В.Г. Вірченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 12-17.

81. Velichova D. Geometric optimization and its applications / Daniela Velichova // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 71. – С. 48-54.

82. Аушева Н.М. Моделювання мінімальних поверхонь на основі теорії кватерніонів / Н.М. Аушева, Г.А. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 56-60.

83. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян. – Х.: Ин-т проблем машиностроения АН УССР, 1983. – 36 с. (Препринт/ АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; 181.)

84. Рвачев В.Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов / В.Л. Рвачев // Доклады АН Украины. – 1963. – № 4. – С. 765-767.

85. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики / В.Л. Рвачев. – К.: Техника, 1967. – 212 с.

86. Стоян Ю.Г. Об одном обобщении функции плотного размещения / Ю.Г. Стоян // Доклады АН УССР. – 1980. – № 8. – С. 70-74.

87. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – К.: Наук. думка, 1976. – 248 с.

88. Магас С.Л. Методы решения экстремальных задач размещения многоугольных геометрических объектов на полосе: Автореф. дис. ... канд. физ. - мат. наук: 01.05.03 / ВЦ АН СССР. - М., 1984. – 20 с.

89. Михалевич В.С. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы / В.С. Михалевич, В.А. Трубин, Н.З. Шор. - М: Наука, 1986. - 264 с.

90. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. - К.: Наук, думка, 1981. - 288 с.

91. Шор Н.З. Методы оптимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. - К.: Наук, думка, 1979. - 200 с.

92. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. - К.: Наук, думка, 1982. - 551с.

93. Пшеничный Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. - М.: Физматгиз, 1975. - 319 с.

94. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования / Ю.М. Ермольев. - М.: Наука, 1976.-239 с.

95. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И.В. Бейко, Б.Н. Бублик, П.Н. Зинько. - К.: Вища школа, 1983. - 511 с.

96. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. - М.: Мир, 1985. - 509 с.

97. Михайленко В.Е. Геометрическое моделирование и компьютерная графика в САПР / В.Е. Михайленко, А.А. Лященко, К.А. Сазонов. - К.: Вища школа, 1991. - 374 с.

98. Стоян Ю.Г. Метод поиска локального экстремума в задаче размещения многоугольников в полосе / Ю.Г. Стоян, М.В. Новожилова // Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; 263. - Харьков, 1987. - 24 с.

99. Комяк В.М. Об одном подходе к построению допустимых вариантов размещения неориентированных объектов в заданной области / В.М. Комяк // Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; 270. - Харьков, 1988. - 18 с.

100. Пандорин А.К. Методы и алгоритмы построения раскладок в системах управления раскроем изотропных материалов: Автореф. дис...канд. техн. наук: 01.05.03 / Харьковский ин-т радиоэлектроники. - Харьков, 1988. - 17с.

101. Новожилова М.В. Математические модели и методы решения нелинейных задач размещения геометрических объектов: Автореф. дисс. ... доктора физ.-мат. наук: 01.05.02 / Ин-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. - Харків, 1999. - 35 с.

102. Stoyan Yu.G. Peculiarities of a mathematical model of optimization of a placement of circles and method of searching for an approximation to a global minimum / Yu.G. Stoyan, G.N. Yaskov// Доп. НАН України Сер. - 2000. - №1. - P. 86-90.

103. Stoyan Yu.G. A method of optimal lattice packing of congruent oriented polygons in the plane / Yu. G. Stoyan, V.N. Patsuk // European Journal of Operational Research. Elsevier.- 2000.- № 124.- P. 204-216.

104. Stoyan Yu.G.  $\Phi$  -function and its basic properties / Yu.G. Stoyan // Докл. АН Украины. Сер. А. -2001.-№8.-С. 112-117.

105. Stoyan Yu.G. Analytical description of interactions of point sets / Yu.G. Stoyan // Journal of mechanical engineering - 2001. - № 1-2, v.4 - С. 77-88.

106. Романова Т.Є. Засоби побудови математичних моделей оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів та їх застосування // Автореф. дисс. докт. техн. наук: 01.05.02 / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. - К.: 2003

107. Stoyan Y.  $\Phi$  – function for circular segments / Y. Stoyan, T. Romanova, G. Schithauer, M. Gil // Prepr. Technische Univarsitat Dresden; MATH-NM-07-2003. - Dresden. 2003. - 27 p.

108. Stoyan Y. Phi-function of non-convex polygons with rotations / Y. Stoyan // Journal of Mechanical Engineering, ISSN 0131-2928, V. 6, No 1, 2003, pp. 74-86.

109. Стоян Ю.Г. Оптимизация упаковки одинаковых кругов в многосвязную область / Ю.Г. Стоян Ю.Г., А.М. Чугай // Доклады НАН Украины, 2004.- № 12.- С. 64-68.

110. Stoyan Y. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip / Y. Stoyan, G. Yaskov // European Journal of Operational Research. 2004 .- Vol. 156, - P. 590 - 600.

111. Чугай А.М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей / А.М. Чугай // Радиоэлектроника и информатика, 2005. -№1. С.58-63

112. Stoyan Y.  $\Phi$ -function for 2D primary objects / Y. Stoyan, J. Terno, N. Gil, T. Romanova // Studia Informatica, Paris, University. - 2002. - Vol. 2, №1. - P. 1 - 32.

113. Stoyan Y.  $\Phi$ - function for complex 2D objects / Y. Stoyan, T. Romanova, M. Gil, J. Terno, G. Scheithauer //40 Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. Volume 2, Number 1, 2004 - P. 69 - 84.

114. Ступак Е.А. Математическое моделирование взаимодействия отрезка прямой и базовых геометрических объектов / Е.А. Ступак, Т.Е. Романова // Радиоэлектроника и информатика. - 2006. - № 2. - С. 12-15.

115. Ступак Е.А.  $\Phi$ -функции для некоторых видов составных объектов нелинейного вида / Е.А. Ступак, Т.Е. Романова // Искусственный интеллект. - 2006. - № 4. - С. 232-242.

116. Dowsland K.A. Packing problems / K.A Dowsland , W.B. Dowsland // Europ. Journ. Oper. Res.-1992.-V.56.-P.2-14.

117. Li Zn. A compaction algorithm for non-convex polygons and application / Zh..Li , V..Milenkovic // Proc. 9<sup>th</sup> Annual ACM Symposium on Comp. Geom., May 19-21.-1993.

118. Beasley J.E. An exact two-dimensional non -guillotine cutting tree search procedure / J.E. Beasley // Europ. Journ. Oper. Res.-1985.- V.33.-P.49-65

119. Milenkovic V. Placemant and compaction of nonconvex polygons for clothing manufacture / V. Milenkovic , K Daniels , Zn. Li // Proc. International Conf. on. Geom. - Canada.-1992.



120. Margues V.M. A system for the compec-tion of two dimentional irregular shapes based on simulated annealing / V.M. Margues, C.F Bispo, Sentieiro. // Proc. International Conf. on. IECON'91 (IEEE).-1991.-P.1911-1916.

121. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1986. – 265 с.

122. Коссе А.Г. Метод раціонального розміщення пожежних депо при проектуванні та оновленні районів міста: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук. : 21.06.02 «Пожежна безпека» / А.Г. Коссе.– Х., 2002. – 19 с.

123. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наук. Думка, 2005. – 564 с.

124. Садковий В.П. Раціональне розбиття множин при територіальному плануванні в сфері цивільного захисту: Монографія / В.П.Садковий В.П., В.М. Комяк В.М., О.М.Соболь – Харків.: Ліхтар, 2008.– 173 с.

125. Долгодуш М.М. Геометричне моделювання раціонального розбиття посівних площ за заданими вимогами: 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» / М.М.Долгодуш. – Мелітополь, 2008. – 20 с.

126. Элементы теории геометрического проектирования / [Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др.]; под ред. В.Л. Рвачева. – К.: Наук. думка, 1995. – 241 с.

127. Смеляков С.В. Моделирование пространства путей в задачах построения оптимальных траекторий / С.В. Смеляков, Ю.Г. Стоян // Журнал вычисл.матем. и матем. Физики.-1983, № 1. - С. 73-82.

128. Стоян Ю.Г. Алгебро-топологические свойства ф-объектов / Ю.Г. Стоян, В.Я. Винарский – Х.: ИПМаш АН УССР, 1981. – 34 с.

129. Юхимчук С.В. Моделі автоматизації вироблення рекомендацій керівнику гасіння пожежі на залізничному транспорті: Монографія / Юхимчук С.В., Кацман М.Д.: Вінницький національний технічний університет. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008.– 144 с.

130. Рекомендації з гасіння пожеж на об'єктах та в рухомому складі залізничного транспорту. – К.: Укрзалізниця, 2006. – 175 с.

131. Інформаційний бюлетень. Про надзвичайні ситуації техногенного та природного характеру в Україні у 2007 році (державний і регіональний рівні). Дії органів управління та сил цивільного захисту з ліквідації надзвичайних ситуацій. - №1, 2007.

132. Тимчасовий статут дій у надзвичайних ситуаціях. Частина II (Гасіння пожеж. Органи управління, пожежно-рятувальні підрозділи Оперативно-рятувальної служби цивільного захисту). Додаток до наказу МНС від 07.02.2008 №96.

133. Положення про пожежні поїзди на залізницях України (затверджено наказом Укрзалізниці від 01.02.2006 р. №039-Ц).

134. Пожежна тактика / [Клюс П.П., Палюх В.Г., Пустовий А.С. та ін.] – Харків: Основа, 1998. – 592 с.

135. Собина В.О. Поняття геометричної інформації в задачі захисту об'єктів залізничного транспорту від надзвичайних ситуацій / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2009. – Вип. 23. – С. 118-123.

136. Собина В.О. Геометричне моделювання областей припустимих розв'язків в задачі раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Т. 44. – С. 31-36.

137. Собина В.О. Загальна математична модель раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об'єктів залізниці / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Вестник Херсонського національного технічного університету. – Херсон, 2009. – Вип. 2(35). – С. 241-246.

138. Собина В.О. Метод геометричного моделювання визначення раціональної кількості та місць розташування оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: 2009. – Вип. 82. – С. 64-68.

139. Собина В.О. Постановка задачі раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об'єктів залізничного транспорту / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. – Харків: УЦЗУ, 2009. – Вип.9. – С. 56-62.

140. Собина В.О. Особливості загальної математичної моделі визначення раціональної кількості та місць розташування оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / В.М. Комяк, О.М. Соболю, А.Г. Коссе, В.О. Собина // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. – Харків: УЦЗУ, 2009. – Вип.10. – С. 106-111.

141. Собина В.О. Алгоритм визначення раціональної кількості та місць розташування оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / О.М. Соболю, Л.В. Ушаков, В.О. Собина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: 2010. – Вип. 85. – С. 181-185.

142. Собина В.О. Побудова  $\omega$ -функцій в задачах покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками / О.М. Соболю, В.О. Собина, О.М. Тур // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: 2010. – Вип. 86. – С. 118-122.

143. Собина В.О. Особливості методу визначення раціональної кількості та місць розташування оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / В.М. Комяк, О.М. Соболю, А.Г. Коссе, В.О. Собина // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. НУЦЗ України. – Харків: НУЦЗУ, 2010. – Вип.11. – С. 74-79.

144. Собина В.О. Моделювання раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / О.М. Соболю, В.О. Собина // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. НУЦЗ України. – Харків: НУЦЗУ, 2010. – Вип.12. – С. 149-154.

145. Собина В.О. Раціональне покриття об'єктів захисту районами виїзду підрозділів воєнізованої охорони на залізниці та пожежно-рятувальних підрозділів / О.М. Соболю, О.М. Семків, А.Г. Коссе, В.О. Собина // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. НУЦЗ України. – Харків: НУЦЗУ, 2011. – Вип.13. – С. 139-146.

146. Собина В.О. Моделювання раціонального покриття об'єктів залізниці районами виїзду пожежно-рятувальних підрозділів / В.О. Собина // Зб. наук. пр. Харківського університету Повітряних сил. – Харків: ХУПС, 2011. – Вип. 1(27). – С. 240-242.

*Наукове видання*

**Комяк** Валентина Михайлівна  
**Лісняк** Андрій Анатолійович  
**Соболь** Олександр Миколайович  
**Собина** Віталій Олександрович

**ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ ОБЛАСТЕЙ  
ГЕОМЕТРИЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ ЗІ ЗМІННИМИ  
МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Монографія

Підписано до друку 20.11.13. Формат 60x84/16.  
Папір 80 г/м<sup>2</sup>. Друк ризограф. Ум.друк. арк. 8,5.  
Тираж 300 прим. Вид. № 130/13. Зам.№ 530/13. Обл.вид арк. 5,7.  
Сектор редакційно-видавничої діяльності  
Національного університету цивільного захисту України  
61023, м. Харків, вул. Чернишевська, 94

КП "Міська друкарня", 61002, Харків, вул. Артема, 44  
Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення  
України про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,  
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції,  
№ 3613 серія ДК від 29.10.2009