

Тарасенко А.А., д-р техн. наук, вед. науч. сотр., НУГЗУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ОЧАГА МАСШТАБНОЙ ПРИРОДНОЙ ЧРЕЗВЫЧАЙНОЙ СИТУАЦИИ

Предложена модель и алгоритм для определения площади очага произвольной формы масштабной природной чрезвычайной ситуации, развивающейся на поверхности рельефа

Ключевые слова: площадь очага, поверхность рельефа

Постановка проблемы. Для некоторых видов природных чрезвычайных ситуаций (ПЧС) характерно распространение очага по поверхности рельефа (природные пожары, растекание нефтепродуктов при прорывах трубопроводов, селевые потоки, снежные лавины и т.д.), при этом для оценки последствий масштабных ПЧС и при построении математических моделей их динамики необходимо оценивать площадь пораженной территории (площадь участка рельефа) со сложной геометрией (криволинейными границами). Кроме того, при моделировании динамики области ЧС в режиме реального времени критичным является быстроедействие алгоритма, позволяющего находить указанные площади.

Анализ последних исследований и публикаций. Известные из курса математического анализа классические методы нахождения участков площадей поверхностей [1] при их реализации в общем виде (для произвольной поверхности и криволинейной границы) являются очень громоздкими и обладают низкой степенью практичности.

Существующие специализированные программные продукты и, в частности географические информационные системы (ГИС) [2], позволяют оценить лишь площадь проекции (площадь полигона) области, но не площадь участка поверхности с криволинейными границами.

Постановка задачи и ее решение. Целью работы является создание ГИС-ориентированной математической модели для автоматизированного оперативного вычисления площади участка поверхности и, в частности, - площади очага масштабной природной чрезвычайной ситуации.

Пусть в декартовой системе координат явно задана гладкая функция $Z(x, y)$, интерпретируемая как поверхность рельефа.

Пусть в плоскости XOY задана односвязная в общем случае невыпуклая область Ω (проекция области очага) и $\bar{\Omega}$ - ее положительно определенный контур, заданный двумерным массивом $K-1$ вершин $\{[x_k; y_k]\}_{k=1 \dots K-1}$, уравнение которого зададим параметрически в виде системы кусочно-линейных функций с аргументом ℓ - «континуальным» номером вершин ($1 \leq \ell < K$) в виде

$$\bar{\Omega}(\ell) = \begin{cases} X(\ell) = \sum_{k=1}^{K-1} [x_k + (x_{k+1} - x_k) \cdot (\ell - k)] \cdot [\eta(\ell - k) - \eta(\ell - (k + 1))] \\ Y(\ell) = \sum_{k=1}^{K-1} [y_k + (y_{k+1} - y_k) \cdot (\ell - k)] \cdot [\eta(\ell - k) - \eta(\ell - (k + 1))] \end{cases} \quad (1)$$

где $\eta(\ell) = \begin{cases} 0, & \ell < 0; \\ 1, & \ell \geq 0. \end{cases}$ Такой выбор параметра ℓ при натуральных его значениях k задает координаты k -ой вершины контура. В виду замкнутости контура $\bar{\Omega}(1) = \bar{\Omega}(K)$.

В виду замкнутости контура $\bar{\Omega}(1) = \bar{\Omega}(K)$.

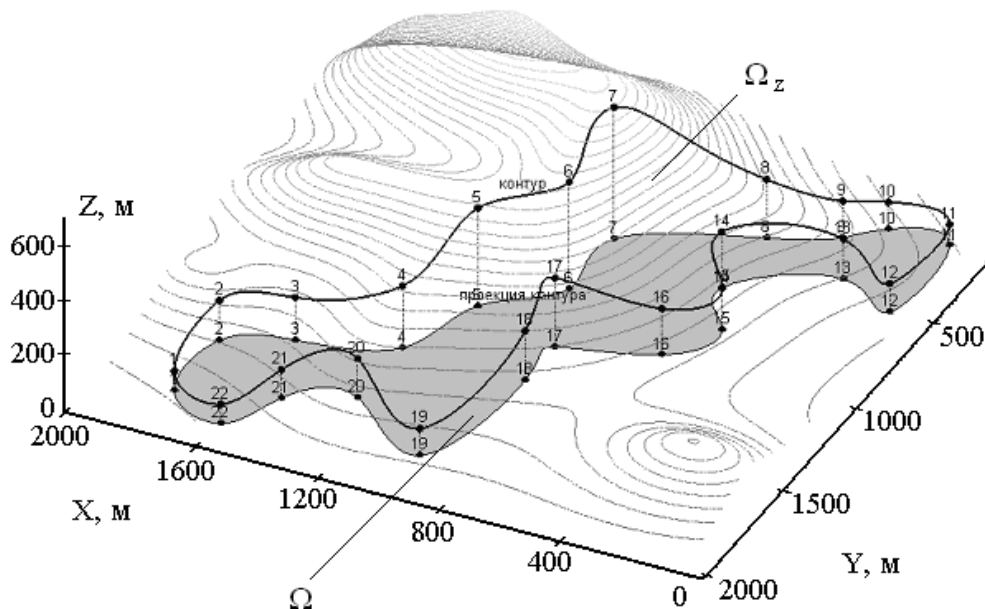


Рис. 1 – Иллюстрация очага ПЧС на поверхности рельефа

Вертикальные образующие вырезают на поверхности $Z(x, y)$ над (под) областью Ω область Ω_z (рис. 1), площадь которой S_{Ω_z} равна [1]

$$S_{\Omega_z} = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2)$$

Аналитическое вычисление неопределенного интеграла $\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy$ возможно лишь для задания $Z(x, y)$ в виде линейной поверхности либо в отдельных частных случаях, что не позволяет адекватно аппроксимировать поверхность рельефа. И даже когда вычисление такого интеграла возможно, нахождение самого интеграла (2) становится технически сложной задачей при задании невыпуклой области интегрирования Ω , поскольку необходимо осуществлять ее разбивку на выпуклые непересекающиеся подобласти $\omega_i \left| \bigcup_i \omega_i = \Omega \right.$ (например, методом триангуляции Делоне [3]), по которым и надлежит осуществлять интегрирование. При этом аппроксимация поверхности линейными треугольными патчами будет тем точней, чем мельче разбиение, тем самым увеличивается объем вычислений и снижается быстродействие данного алгоритма.

Устранение данных проблем возможно при использовании нижеприведенной схемы.

Согласно формуле Стокса

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Omega} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (3)$$

В том случае, если

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y}\right)^2}, \quad (4)$$

получим

$$S_{\Omega_Z} = \oint_{\Omega} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (5)$$

Положим $P(x, y) = 0$. В этом случае

$$S_{\Omega_Z} = \oint_{\Omega} \left[\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \right)^2} dx \right] dy. \quad (6)$$

С учетом (1) получаем

$$S_{\Omega_Z} = \sum_{k=1}^{K-1} \left[\int_k^{k+1} (y_{k+1} - y_k) \times \right. \\ \left. \times \left(\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \right)^2} dx \right) \Bigg|_{\substack{x=x_k+(x_{k+1}-x_k)(\ell-k) \\ y=y_k+(y_{k+1}-y_k)(\ell-k)}} d\ell \right]. \quad (7)$$

Найти (7) можно лишь в случае возможности аналитического вычисления внутреннего интеграла, что в свою очередь возможно лишь при условии, что $Z(x, y)$ представляет собой линейную или билинейную функцию. При этом в виду тривиальности, первый случай не представляет интереса, но может служить тестом на правильность представленного метода.

В случае задания $Z(x, y)$ в виде билинейной функции (т.е. $Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$) внутренний интеграл в (7) вычисляется аналитически

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \right)^2} dx = \\ = \frac{1}{8A\sqrt{A}} \left[2\sqrt{A(Ax^2 + Bx + C)} (2\sqrt{Ax + B}) - \right. \\ \left. - (B^2 - 4AC) \cdot \ln \left(\frac{2Ax + B + 2\sqrt{A(Ax^2 + Bx + C)}}{2\sqrt{A}} \right) \right], \quad (8)$$

где $A = a_3^2$; $B = 2a_2a_3$; $C = 1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_3y + a_3^2y^2$.

Как видно из (6) и (7), нахождение внешнего криволинейного интеграла осуществляется с помощью стандартного перехода к определенному интегралу по переменной ℓ в пределах $1...K$ согласно (1). При этом вычисление внешних $K - 1$ интегралов после указанных замен переменных допускает численное решение.

В случае задания реальной поверхности рельефа $Z(x, y)$ в виде [4] необходимо осуществить ее билинейную сплайн-аппроксимацию поверхностью $\tilde{Z}(x, y)$. Использование билинейных сплайнов обеспечивает непрерывность аппроксимации (неразрывность поверхности рельефа) и в тоже время задание регулярной квадратной решетки делает удобной работу с такой областью инструментарием ГИС, в чем имеется существенное преимущество перед нерегулярным триангуляционным разбиением. Кроме того, билинейность сплайнов обеспечивает более близкое приближение аппроксимации к исходной нелинейной поверхности, нежели плоские триангуляционные элементы.

Аппроксимирующую поверхность $\tilde{Z}(x, y)$ зададим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(x, y) &= \\ &= \sum_{s=1}^{U-1} \sum_{t=1}^{V-1} S_{st}(x, y) (\eta(x - x_u) - \eta(x - x_{u+1})) (\eta(y - y_v) - \eta(y - y_{v+1})), \end{aligned} \quad (9)$$

где $S_{st}(x, y) = \alpha_0^{st} + \alpha_1^{st} x + \alpha_2^{st} y + \alpha_3^{st} xy$ - билинейный сплайн, заданный на квадратной s_{st} ячейке; $\Delta x = x_{u+1} - x_u$; $\Delta y = y_{v+1} - y_v$; $\Delta x = \Delta y$ - шаг квадратной решетки (параметр ячейки); $\Delta x \cdot U$, $\Delta y \cdot V$ - габариты картографируемой области.

Нахождение коэффициентов α_i^{st} ($i = 1...4$) осуществляется путем решения $U \times V$ систем линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0^{st} + \alpha_1^{st} x_u + \alpha_2^{st} y_v + \alpha_3^{st} x_u y_v - Z(x_u, y_v) = 0; \\ \alpha_0^{(u+1)v} + \alpha_1^{(u+1)v} x_{u+1} + \alpha_2^{(u+1)v} y_v + \alpha_3^{(u+1)v} x_{u+1} y_v - Z(x_{u+1}, y_v) = 0; \\ \alpha_0^{st(u+1)} + \alpha_1^{st(u+1)} x_u + \alpha_2^{st(u+1)} y_{v+1} + \alpha_3^{st(u+1)} x_u y_{v+1} - Z(x_u, y_{v+1}) = 0; \\ \alpha_0^{(u+1)(v+1)} + \alpha_1^{(u+1)(v+1)} x_{u+1} + \alpha_2^{(u+1)(v+1)} y_{v+1} + \alpha_3^{(u+1)(v+1)} x_{u+1} y_{v+1} - Z(x_{u+1}, y_{v+1}) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

При этом каждая из s_{st} ячеек может находиться с областью Ω в трех видах множественных отношений:

а) $s_{uv} \cap \Omega = \emptyset$ - ячейка целиком лежит вне области Ω ;

б) $s_{uv} \subseteq \Omega$ - ячейка целиком лежит в области Ω . Обозначим такие области (в данном случае совпадающие с самими ячейками) как s'_{uv} ;

в) $s_{uv} \not\subseteq \Omega \vee s_{uv} \cap \Omega = s''_{uv} \neq \emptyset$ - ячейка частично лежит в области Ω . При этом области пересечений ячейки и области (в общем случае несвязные) обозначим как s''_{uv} . Нахождение результата пересечения осуществляется программными средствами с использованием алгоритма Шутте [5].

В этом случае выражение (6) примет вид

$$S_{\Omega_z} = \sum_{u=1}^{U-1} \sum_{v=1}^{V-1} \oint_{s'_{uv} \cup s''_{uv}} \left[\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial S_{uv}(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_{uv}(x, y)}{\partial y} \right)^2} dx \right] dy. (11)$$

Для (11) необходимо выполнить (7), что решает поставленную задачу.

Выводы. Получена математическая модель для нахождения площади очага масштабной природной чрезвычайной ситуации, развивающейся на поверхности рельефа. Осуществленная программная реализация положений (1)-(11) позволяет находить площадь очага динамической ЧС в режиме реального времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1972 – 357 с.
2. Создание интегрированной многоуровневой ГИС мониторинга лесных пожаров и прогнозирования динамики лесных ресурсов [Электронный ресурс] / Н.А. Абушенко, И.Н. Владимиров, А.В. Татарников – Режим доступа: <http://www.gisa.ru/5742.html>.
3. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
4. Абрамов Ю.А., Басманов А.Е., Тарасенко А.А. Моделирование пожаров, их обнаружения, локализации и тушения. – Харьков: НУГЗУ, 2011. – 927 с.

5. Schutte K. An edge labeling approach to concave polygon clipping // ACM Transactions on Graphics. 1995. P. 1–10.

Тарасенко О.А.

Визначення площі осередку масштабної природної надзвичайної ситуації

Запропоновано модель і алгоритм для визначення площі осередку довільної форми масштабної природної надзвичайної ситуації, що розвивається на поверхні рельєфу

Ключові слова: площа осередку, поверхня рельєфу

Tarasenko A.A.

Determining the area of large-scale natural emergencies

The model and algorithm for determining the area of a large-scale freeform natural emergency developing on the surface of relief are present

Key words: hearth area, surface of relief