

Чуб І.А., Новожилова М.В., Андронов В.А.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ
РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ З МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ,
ЩО ЗМІНЮЮТЬСЯ

ХАРКІВ

2017

Друкується за рішенням Вченої ради
Національного університету цивільного
захисту України
Протокол № 5 от 15.12.2016 г.

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор І.В. Козін
доктор фізико-математичних наук, професор Н.Д. Сізова
доктор технічних наук, професор М.Л. Угрюмов

УДК 519.8

Чуб І.А., Новожилова М.В., Андронов В.А.

Моделювання прикладних оптимізаційних задач розміщення об'єктів з метричними характеристиками, що змінюються: монографія / Чуб І.А., Новожилова М.В., Андронов В.А. – Харків: НУЦЗ України, 2017. – 167 с.

ISBN 978-617-7155-02-6

В монографії розглянуті математичні моделі та оптимізаційні методи розв'язання задач розміщення неорієнтованих геометричних об'єктів і джерел фізичних полів, у тому числі зі змінюваними метричними характеристиками й просторовою формою, в ізотропних і анізотропних областях та на їхній основі створене алгоритмічне і програмне забезпечення.

Запропоновано засоби моделювання геометричних обмежень на параметри розміщення об'єктів зі змінюваними метричними характеристиками й просторовою формою на основі Φ -функцій.

Розроблено математичну модель та метод розв'язання задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням рельєфу області. Побудована Φ -функція об'єктів з урахуванням впливу результуючого концентраційного поля, проведено чисельне дослідження при розв'язанні практичних задач.

Побудовано математичну модель багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів зі змінюваними метричними характеристиками й просторовою формою, запропоновано метод її розв'язання, проведено чисельні дослідження.

Рекомендується для викладачів, аспірантів та студентів вищих навчальних закладів в галузі знань «Цивільна безпека» та «Інформаційні технології», а також для науково-практичних працівників та фахівців вказаних напрямків.

Лл. 52. Табл. 12 Бібліогр.: 124 назв.

ISBN 978-617-7155-02-6

© НУЦЗУ, 2017

© І.А. Чуб, М.В. Новожилова,
В.А. Андронов

ЗМІСТ

ВСТУП	7
ГЛАВА 1	
СИСТЕМОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ	10
1.1 Деякі постановки прикладних оптимізаційних задач розміщення	10
1.2 Аналіз методик моделювання і розв'язання задач розміщення геометричних об'єктів з фіксованими метричними характеристиками і просторовою формою	19
1.2.1 Задача одновимірного розміщення	19
1.2.2 Аналіз засобів моделювання 2D задач розміщення	21
1.2.3 Аналіз і класифікація методів вирішення задач прямокутного розміщення	25
1.2.3.1 Методи пошуку наближеного розв'язку задачі	25
1.2.3.2 Точні методи розв'язання задачі прямокутного розміщення	26
1.2.4 Аналіз і класифікація методів вирішення задач розміщення багатокутників	27
1.2.5 Особливості моделювання і розв'язання 2D задач нерегулярного розміщення геометричних об'єктів в анізотропних областях	31
1.3 Аналіз математичних моделей задач розміщення геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою	32
1.3.1 Особливості математичних моделей оптимізаційних задач розподілу обмежених ресурсів проектів	32
1.3.2 Аналіз особливостей математичних моделей розміщення джерел забруднюючих викидів як оптимізаційних задач розміщення багатокутних геометричних об'єктів	34
1.4 Висновки по главі 1	39
ГЛАВА 2. ПОБУДОВА ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ОБЛАСТЯХ ІЗ ВЛАСТИВІСТЮ АНІЗОТРОПІЇ	41
2.1 Моделювання геометричних обмежень на параметри	

розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками за допомогою апарату Ф-функцій	41
2.1.1 Побудова Ф-функції опуклого об'єкта і області розміщення	43
2.1.2 Побудова Ф-функції двох опуклих об'єктів $T_1(u_1, \Delta\alpha_1)$ і $T_2(u_2, \Delta\alpha_2)$ із змінними метричними характеристиками	48
2.2 Побудова Ф-функції об'єктів, для яких в процесі розміщення можлива зміна топологічної розмірності	54
2.3 Формалізація умов розміщення з урахуванням впливу параметрів розміщення на метричні характеристики об'єктів	60
2.4 Побудова Ф-функції опуклих об'єктів у задачі розміщення в анізотропній області	64
2.4.1 Побудова умови торкання об'єкта T_1 області Ω	64
2.4.2 Формалізація умов торкання об'єктів T_1, T_2	68
2.4.3 Аналітичний опис умов взаємного неперетину об'єктів T_1, T_2	74
2.5 Побудова Ф-функції об'єктів, котрі належать до множини базових, із змінними метричними характеристиками	83
2.6 Висновки по главі 1	87
ГЛАВА 3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ КОНЦЕНТРАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗАБРУДНЮЮЧИХ ВИКИДІВ З УРАХУВАННЯМ РЕЛЬЄФУ ОБЛАСТІ РОЗМІЩЕННЯ	88
3.1 Математична модель розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням рельєфу області	88
3.1.1 Моделювання зони забруднення земної поверхні аерозольними викидами пожежі	90
3.1.2 Визначення метричних характеристик зони забруднення викидами пожежі з урахуванням рельєфу місцевості	94
3.1.2.1 Моделювання рельєфу області розміщення	94
3.1.2.2 Моделювання швидкості приземного вітру з урахуванням рельєфу	97
3.1.2.3 Визначення метричних характеристик зони забруднення земної поверхні аерозольними викидами пожежі з урахуванням рельєфу місцевості	99
3.1.3 Математична модель оптимізаційної задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням	

рельєфу місцевості	101
3.2 Формалізація системи обмежень оптимізаційної задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням рельєфу області	105
3.2.1 Параметризація концентраційного поля аерозольних викидів пожежі	105
3.2.2 Побудова Φ -функції об'єктів з урахуванням концентраційного поля забруднюючої домішки	107
3.3 Метод розв'язання оптимізаційної задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області з урахуванням її рельєфу	114
3.3.1 Визначення початкового варіанту розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області Ω	115
3.3.2 Визначення локального мінімуму функції мети основної задачі	116
3.3.3 Виділення рекордного значення функції мети	119
3.4 Практична реалізація методу оптимального розміщення пожежонебезпечних об'єктів у заданій області з урахуванням її рельєфу	120
3.4.1 Фізико-географічна та кліматична характеристика району проєктованої діяльності та підприємства, що реконструюється, (Гнідинцівський газопереробний завод, с.м.т. Варва Чернігівської області)	120
3.4.2 Підготовка вихідних даних	122
3.4.3 Задача оптимізації розміщення пожежонебезпечних об'єктів	124
3.5 Висновки по главі 3	127
ГЛАВА 4. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ ПРОЄКТУ ЯК ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	130
4.1 Аналіз методик побудови критеріїв ефективності інвестиційно-будівельного проєкту	130
4.2 Оптимізація розподілу обмежених ресурсів проєкту комплексної системи пожежної автоматики складського терміналу (м Вишневе Київської області)	132
4.2.1 Структурна і параметрична ідентифікація задачі визначення оптимальних витратних характеристик проєкту	136
4.2.2 Формалізація критерію якості задачі – величини витрат	138
4.2.3 Постановка і вирішення задачі вирівнювання ресурсів	139

4.3 Оптимізація розподілу обмежених ресурсів проекту реконструкції ділянки водопровідних мереж (м. Харків)	143
4.3.1 Побудова математичної моделі	143
4.3.2 Методика зведення багатокритеріальної задачі вирівнювання ресурсів до однокритеріальної постановки	146
4.4 Висновки по главі 4	154
ЛІТЕРАТУРА	155

ВСТУП

Оптимізаційні задачі розміщення геометричних об'єктів різної фізичної природи як окремий клас екстремальних задач теорії дослідження операцій мають значну теоретичну цінність і, одночасно, важливе прикладне значення. Ціла множина практичних задач розкрою ізотропних і анізотропних матеріалів, оптимального розподілу ресурсів, енергозбереження, календарного планування можуть бути сформульовані як задачі розміщення. До цього ж класу належать оптимізаційні задачі розміщення джерел фізичних полів, в тому числі температурних, електромагнітних, концентраційних і т.п.

Задачі розміщення, як найважливіший клас задач оптимізаційного геометричного проектування, полягають у визначенні оптимального положення скінченної множини геометричних об'єктів довільної просторової форми в заданих областях розміщення при наявності різноманітних обмежень і критеріїв якості розміщення і пов'язані з обробкою геометричної інформації.

Початок розробки підходів до моделювання та розв'язання задач оптимального розміщення, в першу чергу задач розкрою і упаковки, покладено працями академіка Л.В. Канторовича [1], В.А. Залгаллера [2], В.Л. Рвачева [3], Ю.Г. Стояна [4], Р. Gilmore [5], Е.А. Мухачева [6] та ін.

Теоретичний базис рішення таких важливих прикладних задач як задача оптимального розподілу обмежених ресурсів і календарного планування, які є спеціальними задачами дискретного програмування, закладений дослідженнями академіка В.С. Михалевича [7, 8], академіка І.В. Сергієнка [9], академіка Н.З Шора [10], В.В.Скопецкого [11], Г.А. Донця [12] та інших вчених.

Створення теорії оптимізаційного геометричного проектування [13, 14, 15-18], основою якої є побудова і дослідження різноманітних видів відображень геометричної інформації, дозволило побудувати єдиний математичний апарат моделювання таких важливих прикладних задач, як задачі оптимального розкрою промислових матеріалів [19-22], розробки генеральних планів промислових підприємств, раціонального використання відходів, розміщення виробничого обладнання, елементів і блоків апаратури [23, 24], проектування і управління складними технічними системами [25], в тому числі з урахуванням фізичних полів різноманітної природи [26, 27], якщо носії цих полів мають довільну просторову форму. До задачі прямокутного розміщення зводяться деякі задачі теорії розкладів і об'ємно-календарного планування.

В останні три десятиліття проводяться інтенсивні наукові дослідження в даній області знань, що пояснюється як складністю моделювання і побудови методів розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування, так і надзвичайно широким спектром практичних застосувань. Математичні моделі, методи вирішення задач оптимального регулярного і нерегулярного розміщення геометричних об'єктів довільної просторової форми і джерел фізичних полів розроблені в працях Н.І. Гіля [18, 28], В.М. Комяк [29], С.В. Яковлева [14], М.В. Новожилової [30-33], Е.І. Ненахова [34], Т.Є. Романової [35-37], В.П. Путятіна [26, 27], І.А. Чуба [38-41] та ін.

Для успішного вирішення наукових і практичних задач геометричного проектування необхідні не тільки розробка загальних принципів моделювання задач розміщення геометричних об'єктів різної фізичної природи, а й побудова і дослідження математичних моделей конкретних класів задач даної предметної області, методів і алгоритмів їх вирішення.

З математичної точки зору найбільшу складність представляє клас оптимізаційних задач нерегулярного розміщення об'єктів довільної просторової форми, серед яких найменш вивченими є задача нерегулярного розміщення неорієнтованих геометричних об'єктів в анізотропних областях. Крім того, в переважній більшості випадків розглядаються задачі, в яких область і об'єкти розміщення мають фіксовані метричні характеристики і просторову форму. Однак ряд задач проектування радіоелектронної апаратури ставляться як задачі оптимізації розміщення джерел температурних і електромагнітних полів в областях із змінними метричними характеристиками і формою, а деякі задачі розподілу обмежених ресурсів, проектування промислових систем із джерелами забруднюючих викидів з урахуванням рельєфу місцевості та зміни параметрів вітру зводяться до оптимізаційних задач розміщення об'єктів, форма і метричні характеристики яких змінюються в процесі розміщення. Як показує аналіз вітчизняних і зарубіжних наукових публікацій, математичні моделі таких задач є недостатньо вивченими.

Одним із найважливіших етапів побудови і дослідження математичних моделей таких задач є аналітичне моделювання обмежень (як геометричних, пов'язаних з урахуванням просторової форми розміщуваних об'єктів і області розміщення, так і обмежень, обумовлених особливостями даної задачі, наприклад, обмежень на характеристики результуючого фізичного поля, технологічних обмежень і т.п.), які виділяють область допустимих рішень оптимізаційної задачі. Тому для

вирішення задач зазначених класів необхідно розробити інструментальні засоби моделювання основних геометричних обмежень, а саме, умов взаємного неперетинання об'єктів і їх приналежності області розміщення, на основі апарату Ф-функцій [42].

За своєю математичною постановкою ці задачі належать до класу багатовимірних багатоекстремальних задач нелінійного неопуклого математичного програмування зі специфічною областю допустимих рішень. Складність аналітичного уявлення області допустимих рішень, нелінійність і недиференційованість в загальному випадку функцій обмежень області допустимих рішень виводять даний клас задач за рамки класичної теорії дослідження операцій, що гранично ускладнює використання для їх вирішення класичних методів умовної оптимізації. Тому актуальним є виділення нових конструктивних властивостей області допустимих рішень і побудова на цій основі методики лінеаризації основних обмежень області допустимих рішень, що робить можливим подальше вдосконалення і використання точних і наближених оптимізаційних методів вирішення.

У зв'язку з цим велике наукове значення набуває виявлення загальних закономірностей моделювання оптимізаційних задач розглянутих класів, що забезпечує можливість використання методики вирішення задач одного класу для вирішення задач інших класів, відмінних за своїми неформальними постановками.

Незважаючи на те, що розглянуті оптимізаційні задачі належать до класу NP-повних [43, 44] і переважна більшість методик рішення є наближеними, швидкий розвиток обчислювальної техніки дозволяє здійснити чисельну реалізацію задач практичної розмірності, тому актуальним є продовження досліджень в області розробки чисельних методів їх рішення. Одночасно, побудова точних засобів вирішення цих задач, що забезпечують отримання глобально-оптимального розміщення об'єктів, також має велике наукове і прикладне значення.

Реалізація чисельних методів у вигляді алгоритмічного і програмного забезпечення дозволяє розширити сферу практичних застосувань за рахунок збільшення кількості можливих просторових форм і особливостей метричних характеристик об'єктів і області розміщення.

Розгляду перерахованих вище питань присвячена ця монографія.

ГЛАВА 1

СИСТЕМОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЮВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ

У цій главі проведено аналіз і класифікація оптимізаційних задач теорії дослідження операцій, що безпосередньо є або приводяться до задач оптимізаційного геометричного проектування. Запропоновано класифікацію підходів до математичного моделювання 2D задач розміщення. На підставі вивчення літературних джерел здійснено аналітичний огляд сучасного арсеналу засобів моделювання та обчислювальних методів вирішення задач даного класу.

Виділено класи оптимізаційних задач розміщення з загальними фундаментальними властивостями, математичні моделі та оптимізаційні методи вирішення яких відсутні або недостатньо розвинені, не дивлячись на очевидну теоретичну і практичну цінність.

1.1 Деякі постановки прикладних оптимізаційних задач розміщення

У практичній діяльності часто зустрічаються задачі, що зводяться до оптимізації розміщення об'єктів різної фізичної природи. До них відносяться задачі розкрою на заготовки заданої форми листового і рулонного матеріалу [45], включаючи розкрій матеріалу з властивістю анізотропії [46], задачі компоновання обладнання в цехах і відсіках [31-36], задачі компоновочного синтезу апаратури [23, 25, 38], задачі проектування міської забудови [47], задачі розміщення джерел фізичних полів різної природи [26, 27, 48, 49], задачі оптимального розподілу ресурсів [50-52] і багато інших.

Укрупнена класифікація оптимізаційних задач розміщення об'єктів наведена на рис. 1.1.

Далі під *оптимізаційною задачею розміщення* будемо розуміти наступну задачу.



Рисунок 1.1 – Класифікація оптимізаційних задач розміщення об'єктів

Задача 1. Нехай є скінчений набір $T_i, i = \overline{1, N}$, об'єктів розміщення і область розміщення Ω . Необхідно розмістити множину об'єктів розміщення у області Ω без взаємних перетинів так, щоб заданий критерій якості $\Psi(u)$ досягав екстремального значення, тобто знайти:

$$\Psi(u) \rightarrow \underset{D \subset R^k}{\text{extr}}, \quad (1.1)$$

де область допустимих рішень D визначається обмеженнями виду

$$T_i \subset \Omega, \quad (1.2)$$

$$\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } T_j(u_j) = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j. \quad (1.3)$$

Зауваження 1.1. Усюди далі будемо вважати, що об'єкти розміщення та область розміщення мають кусково-лінійну границю.

Зауваження 1.2. Розмірність K простору R^K , в якому задана область D , прямо пропорційна добутку Nm , де m – топологічна розмірність об'єкта T_i .

Зауваження 1.3. Критерій (1.1) може бути векторним.

Детальний аналіз сучасного стану в області моделювання і розв'язання задач розміщення, або, іншими словами, упаковки і розкрою – Cutting and Packing problems (C&P) – проведено в роботі [53]. Наслідуючи традиції попередніх досліджень, в [53] наводиться укрупнена класифікація задач розглянутого класу. Найбільш репрезентативними задачами з множини 2D C&P задач, з точки зору авторів, є задачі прямокутного розкрою [54-56], задачі нерегулярного розміщення багатокутників (nesting problem) [57, 58]. У роботах [54-58] та ін. розглядаються задачі зазначених класів разом з їх практичними додатками.

Класична задача прямокутного розкрою (**Задача 2**) є задача виду (1.1)–(1.3) за умови, що об'єкти розміщення T_i , є прямокутниками, а область розміщення Ω – прямокутник або напівнескінченна смуга.

Задача нерегулярного розміщення багатокутників (**Задача 3**) є задачею виду (1.1)–(1.3) за умови, що об'єкти T_i , $i = \overline{1, N}$, є багатокутниками, в загальному випадку неопуклими, в ізотропній області розміщення Ω . При цьому, якщо в процесі розміщення допускається тільки трансляція об'єктів, то такі об'єкти називаються орієнтованими, при наявності можливості повороту об'єкти розміщення називаються неорієнтованими [14].

У припущенні, що об'єкти розміщення є орієнтованими, справедливі такі властивості.

Властивість 1.1. Багатогранна область D є незв'язною замкнутою і при $N > 1$ неопуклою точковою множиною. Компоненти зв'язності області допустимих рішень D неопуклі, в загальному випадку багатозв'язані множини. Границя області $\Gamma = \text{Fr}D$ – кусочно-лінійна.

Властивість 1.2. Область D може бути представлена у вигляді об'єднання кінцевого числа опуклих підмножин:

$$D = \bigcup_{q=1}^Q D_q, \quad (1.4)$$

де $D_q \subset R^K$ – багатогранна опукла множина, $K > 2N + 1$, $Q = 4^{N(N-1)/2}$.

Розглянемо наступні постановки оптимізаційних задач, які не є класичними задачами розміщення геометричних об'єктів, однак можуть бути сформульовані (і розв'язані) як задачі розміщення.

Задача розміщення N пожежонебезпечних об'єктів в області Ω без урахування її рельєфу (**Задача 4**) формулюється таким чином.

Задача 4. Визначити таке місце розташування пожежонебезпечних об'єктів S_i , $i = \overline{1, N}$, в області Ω , щоб максимальна сумарна концентрація аерозольних викидів можливих пожеж в кінцевій множині точок контролю $P = \{p_j\} = \{x_j^p, y_j^p\}$ була мінімальною, тобто знайти:

$$\min_{(x_i, y_i) \in D} \max_{(x_j^p, y_j^p) \in P} \sum_{i=1}^N C(x_j^p, y_j^p, x_i, y_i, G, Q), \quad j = \overline{1, J}, \quad (1.5)$$

де $G = \{g_k^i\}$ – множина параметрів пожеж на об'єктах S_i , $Q = \{q_h\}$ – множина геокліматичних умов в області Ω , $k = \overline{1, K}$, $h = \overline{1, H}$.

Під пожежонебезпечним об'єктом далі будемо розуміти промисловий об'єкт, на якому може виникнути пожежа і який є джерелом забруднюючих аерозольних викидів в атмосферу.

Множина Q геокліматичних умов включає в себе параметри приземного вітру в області Ω і характеристики стійкості атмосфери.

Множина G включає в себе інтенсивність викиду і висоту початкового підйому забруднюючої аерозольної домішки.

Крім геометричних обмежень виду (1.2) – (1.3) враховуються фізичні обмеження на характеристики результуючого концентраційного поля і технологічні обмеження на мінімально (максимально) допустимі відстані між об'єктами розміщення, зумовлені особливостями технологічного процесу, а також між об'єктами розміщення і інженерними комунікаціями.

Задача оптимального розподілу обмежених ресурсів проекту (**Задача 5**). Проект – це кінцева послідовність робіт, що підпорядкована єдиній меті, має чітко визначений початок і термін завершення і володіє властивістю унікальності [59].

Задача 5. Нехай деякий проект T є множина $\{T_i\}, i = \overline{1, N}$, робіт. На виконання кожної роботи T_i необхідна певна кількість

$\{t_i, b_i^1, \dots, b_i^k\}$ ресурсів, де t_i – час виконання роботи. На проект в цілому в кожний момент часу виділено $\{B^1, \dots, B^k, \dots, B^K\}$ ресурсів. Задача полягає у визначенні такого розподілу робіт у часі, при якому величина ресурсів кожного k -го виду на виконання робіт буде мінімальною.

Робота T_i може бути інтерпретована як гіперпаралелепіпед в просторі ресурсів $\{t_i, b_i^1, \dots, b_i^K\}$, обмеження $\{B^1, \dots, B^K\}$ в розглянутому просторі виділяють область Ω розміщення.

Отже, дана задача може бути поставлена як багатокритеріальна задача розміщення множини об'єктів T виду:

$$t \rightarrow \min_D, B^k \rightarrow \min_D, k = \overline{1, K}, \quad (1.6)$$

де область допустимих рішень $D \subset \mathbb{R}^{K*(N+1)}$ виділена умовами виду (1.2) – (1.3), а також умовами часткової впорядкованості множини T робіт та іншими специфічними обмеженнями.

Відзначимо, що задача (1.6) є багатокритеріальною задачею дослідження операцій.

Для формалізації просторових відносин між об'єктами розміщення в роботах [14, 60] введено поняття геометричної інформації про об'єкт розміщення T_i

$$g_i = (\{s_i\}, \{m_i\}, \{u_i\}), \quad (1.7)$$

де $\{s_i\}$ – сукупність просторових форм, що складають об'єкт T_i ; $\{m_i\}$ – набір метричних характеристик, які визначають розміри точкових множин, що мають просторову форму $\{s_i\}$; $\{u_i\}$ – параметри розміщення об'єкта T_i в області розміщення.

Параметри розміщення задають положення полюса O_i об'єкта T_i – центра власної системи координат (ВСК) об'єкта, причому $O_i \in \text{cl } T_i$, де $\text{cl } T_i$ – замикання точкової множини T_i .

В абсолютній більшості розглянутих раніше задач розміщення просторова форма s_i і метричні характеристики m_i об'єкта розміщення T_i не змінювалися в процесі розміщення, тобто для кожної задачі розміщення ці параметри були екзогенними.

Крім того, в [36] виділено клас «Primary objects», які є базовими, а їх комбінації (об'єднання, перетин і інші теоретико-множинні операції) є достатніми для моделювання реальних об'єктів. До класу «Primary objects»

віднесені коло, прямокутник, правильний багатокутник, опуклий багатокутник і об'єкти, побудовані як замикання їх доповнень до R^2 .

Однак в наведених вище постановках оптимізаційних задач необхідно враховувати, що метричні характеристики об'єктів розміщення і їх просторова форма можуть (і повинні) змінюватися в процесі розміщення.

На рис. 1.2 подано класифікацію задач розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками.

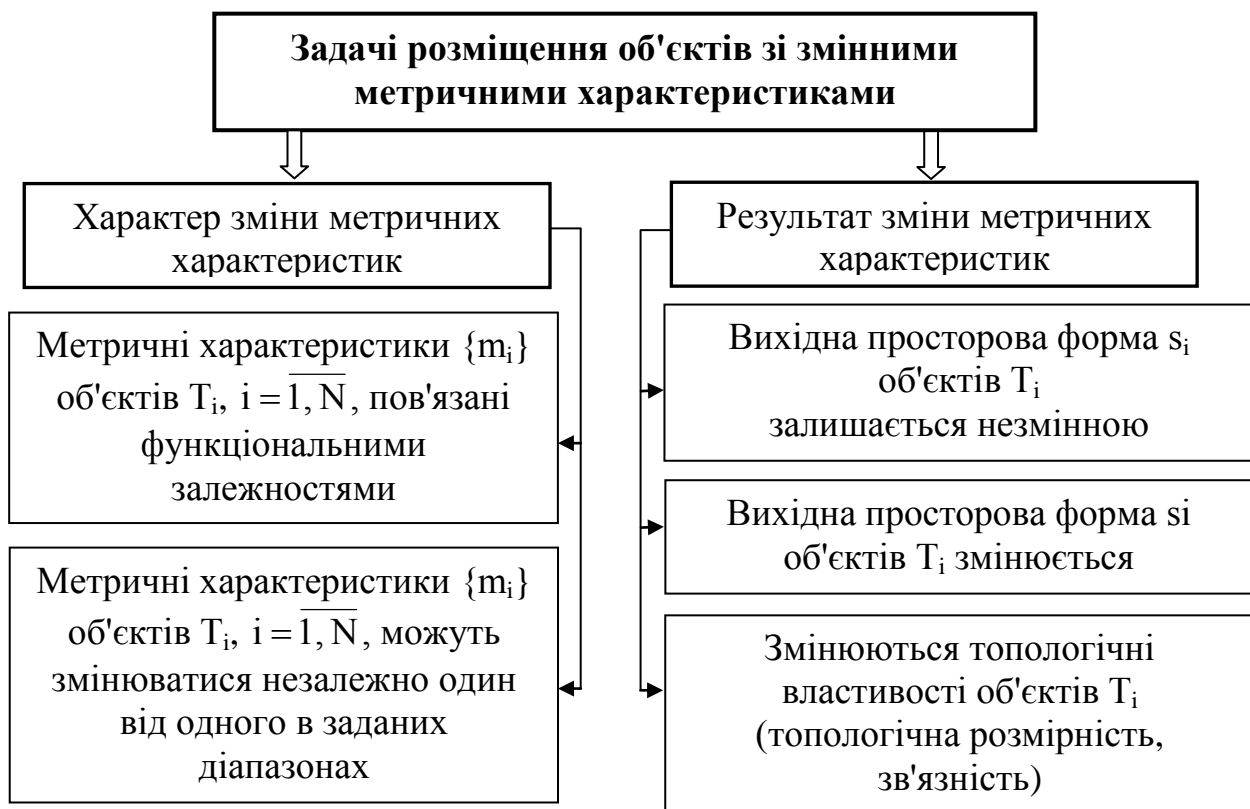


Рисунок 1.2 – Класифікація задач розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками

За характером зміни метричних характеристик такі задачі можуть мати наступні особливості:

- метричні характеристики m_i об'єктів T_i , $i = \overline{1, N}$, можуть змінюватися незалежно один від одного в деяких заданих діапазонах, залишаючи об'єкти в класі початкових просторових форм (інтервальний аналіз, нечіткі множини, м'які обчислення);

- метричні характеристики m_i об'єктів T_i , $i = \overline{1, N}$, пов'язані функціональними залежностями;

- зміна метричних характеристик m_i виводить об'єкти T_i , з класу початкових просторових форм.

Виділені класи задач відрізняються як в постановочному плані, так і в плані набору застосовуваних підходів до моделювання та розв'язання.

Параметри u_i об'єктів розміщення також є важливими характеристиками задач розміщення.

Якщо над об'єктами розміщення допустимі тільки власні неконгруентні перетворення, то в якості параметрів розміщення в задачах розміщення виступають параметри трансляції та кутовий параметр повороту власної системи координат об'єкту розміщення.

У табл. 1.1 наведені різні типи задач розміщення щодо такого параметра розміщення об'єкта розміщення, як кут повороту власної системи координат. Наявність або відсутність кутового параметра розміщення істотно змінює властивості задачі і є визначальним фактором вибору засобів її моделювання та рішення.

Таблиця 1.1 – Класифікація задач розміщення щодо кута повороту власної системи координат

Ізотропна область розміщення		Задача розміщення об'єктів в анізотропній області
Задача розміщення орієнтованих об'єктів	Задача розміщення неорієнтованих об'єктів	
Для всіх точок області розміщення кут повороту ВСК об'єкта, що розміщується, постійний	У будь-якій точці області кут повороту ВСК об'єкта, що розміщується може приймати будь-яке значення	У будь-якій точці області є свій і тільки один можливий кут повороту ВСК об'єкта, що розміщується

Наведемо постановку типової задачі розміщення в анізотропній області (**Задача 6**).

Задача 6. Нехай в R^2 маємо замкнуту область Ω , яка обмежена кусково-лінійною ламаною, задану в загальній системі координат XOY . Область Ω є анізотропною внаслідок наявності в кожній точці області Ω свого напрямку найменшої тягучості S_{point} .

З аналізу практичних застосувань випливає, що законом розподілу анізотропії можна вибрати коло (еліпс) напружень, при цьому координати (x, y) довільної точки області Ω задовольняють умовам (рис. 1.3а):

$$x = at \cos \varphi, y = bt \sin \varphi, \quad (1.8)$$

де t – коефіцієнт гомотетії; a, b – довжини півосей базового еліпса. В окремому випадку $a = b$.

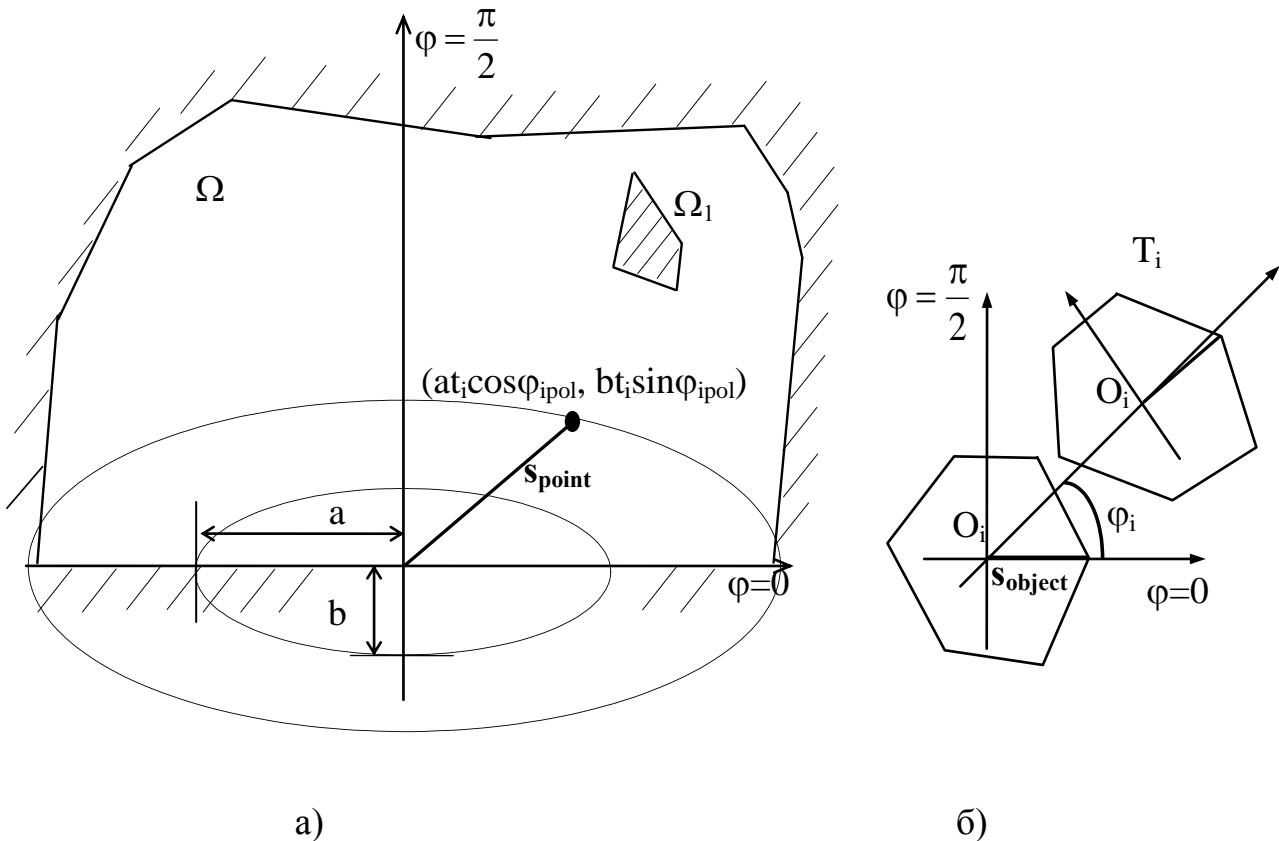


Рисунок 1.3 – Область розміщення Ω (а) і об'єкт розміщення T_i (б)

Необхідно розмістити кінцевий набір багатокутних об'єктів розміщення $\{T_i\}$, $i = \overline{1, N}$ (рис. 1.3б), з параметрами розміщення (x_i, y_i) так, щоб напрямок вектора найменшої тягучості S_{object} об'єкта T_i (рис. 1.3б) збігався з напрямком найменшої тягучості S_{point} в точці області. Напрямок S_{point} визначається кутом φ_{ipol} ВИДУ

$$\varphi_{ipol} = \arctg \frac{y_i}{x_i}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Математична модель задачі 6 має вигляд:

знайти:

$$\Psi(u) \rightarrow \underset{D}{\text{extr}}, \quad (1.9)$$

де область допустимих рішень D визначається обмеженнями виду:

$$\left. \begin{aligned} T_i &\subset \Omega; \\ i, j = \overline{1, N}, i \neq j; \text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } T_j(u_j) &= \emptyset, i, j = \overline{1, N}, i \neq j \\ S_{\text{object}} &= S_{\text{point}} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Узагальнено взаємозв'язок всіх компонент вектора геометричної інформації про об'єкт розміщення представлений на рис. 1.4.

2D-задачі розміщення геометричних об'єктів T :
 $g = (\{s\}, \{m\}, \{u\})$; “s” = “Primary objects”

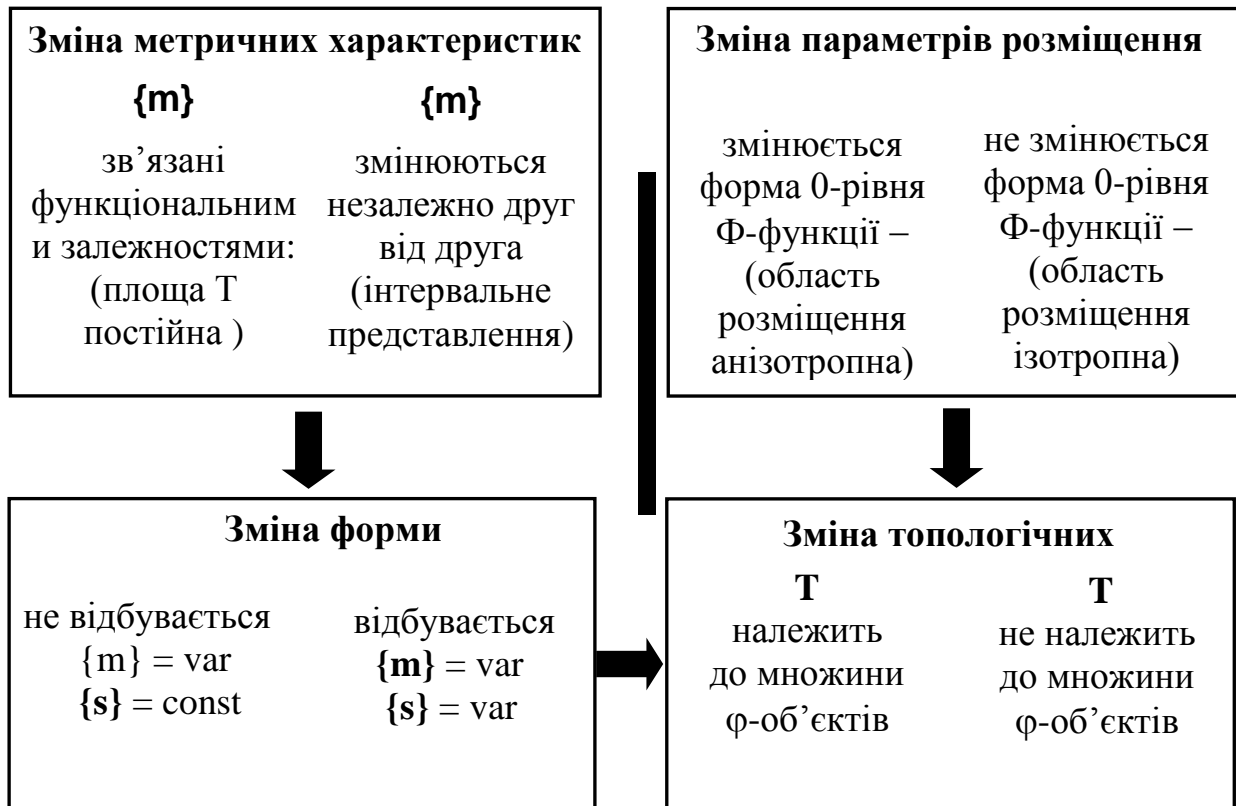


Рисунок 1.4 – Взаємозв'язок компонент вектора геометричної інформації про об'єкт розміщення

1.2 Аналіз методик моделювання і розв'язання задач розміщення геометричних об'єктів з фіксованими метричними характеристиками і просторовою формою

Як зазначалося вище, в переважній більшості наукових робіт побудова конструктивних засобів математичного моделювання та обчислювальних методів розв'язання здійснюється за допущенням, що метричні характеристики і просторова форма об'єктів розміщення для кожної задачі розміщення є екзогенними параметрами.

У цьому випадку вибір базових засобів, наявних в арсеналі сучасного математичного програмування, для побудови алгоритму розв'язання визначається, в основному, чотирма факторами:

- розмірність об'єкта розміщення (і, відповідно, області розміщення);
- кількість об'єктів розміщення;
- характеристика гладкої ділянки границі об'єкта і області розміщення (лінійна, нелінійна);
- наявність або відсутність кутового параметра розміщення.

При цьому необхідно враховувати також вид функції мети.

Найбільш складними для моделювання та аналітичного опису є обмеження на область допустимих рішень задачі розміщення виду (1.2) – (1.3). Тому одним з концептуальних підходів є релаксація двовимірних і тривимірних задач розміщення до задач, при розв'язанні яких не враховується просторова форма розміщуваних об'єктів. До таких задач відносяться, по-перше, задачі з областю розміщення у вигляді набору можливих фіксованих позицій. Моделі таких задач не містять систему геометричних обмежень і можуть бути сформульовані як дискретні оптимізаційні задачі про призначення, теорія і методи розв'язання яких добре розвинені [61-63]. По-друге, це задачі, в яких об'єкти, що розміщуються, мають одну метричну характеристику (довжину), тобто задача одновимірного розміщення.

1.2.1 Задача одновимірного розміщення

Однією з перших робіт, присвячених вивченню моделей і засобів розміщення геометричних об'єктів з урахуванням їх розмірів (але без урахування їх просторової форми), була монографія [2]. У ній для розв'язання задач одновимірного розміщення (розкрою) запропонований метод дозволяючих множників, розроблений акад. Л.В. Канторовичем [1], і

який склав згодом основу лінійного програмування. Таким чином, задачі одновимірного розміщення допускають формулювання у вигляді задач лінійного програмування.

Серед множини точних методів побудови оптимальних планів одновимірного розміщення поширені підходи, які використовують метод відсікань для розв'язання відповідних задач цілочисельного лінійного програмування; методи, засновані на розв'язанні ряду допоміжних задач лінійного програмування або підходи, що реалізують переборні алгоритми на основі методу гілок і меж [6, 64]. Робота [64] присвячена побудові математичної моделі і розв'язанню динамічної задачі лінійного розкрою паперових рулонів відповідно до стохастичних розмірів замовлень з метою мінімізації середньої вартості відходів матеріалу. Рішення здійснюється в дві стадії: на першій стадії використовується лінійне програмування, в результаті чого генерується множина допустимих рішень, які потім аналізуються засобами стохастичного програмування.

Надзвичайно розвинені евристичні методи, використовувані для розв'язання задач одновимірного розкрою [65-68]. Відзначимо деякі найбільш цікаві результати.

В роботі [66] розглядається задача одновимірного розкрою з мінімізацією величини відходів і визначення на отриманому розміщенні послідовності розміщених об'єктів, на якій довжина часткових різів досягає мінімуму. Побудована математична модель задачі та розроблений евристичний підхід до її розв'язання, що складається з трьох етапів. На першому етапі для отримання початкового рішення пропонується модифікація "жадібного" алгоритму, другий етап реалізує евристичний "tabu search" підхід, третій етап – процедура пошуку локального мінімуму цільової функції на дереві рішень (implicit enumeration procedure), яка використовує отримані на перших двох етапах результати в якості верхньої оцінки функції мети.

В роботі [67] розроблено математичну модель для задачі побудови раціональних планів поздовжнього розкрою рулонних матеріалів. Застосування векторного критерію дозволяє враховувати не тільки втрати матеріалу в відхід, але також і ряд технологічних і виробничих обмежень. Розглянуто загальний підхід до реалізації генетичного алгоритму розв'язання задачі.

У статті [68] двовимірна задача розміщення множини неопуклих геометричних об'єктів в обмеженій прямокутній області зводиться до задачі одновимірного розкрою шляхом призначення кожному розміщуваному об'єкту тільки одної його метричної характеристики –

довжини. Вважається, що розміщуваних об'єктів більш ніж достатньо, а відсутність або наявність даного об'єкта в області розміщення визначається значенням використовуваних бінарних змінних. Задача формулюється як задача змішаного цілочисельного програмування, пропонується методика розв'язання, в результаті застосування якої отримується допустимий (не оптимальний в загальному випадку) розв'язок.

Якщо при розгляді двовимірної за постановкою задачі прямокутного розміщення хоча б один розмір прямокутника і області розміщення збігаються [69], то двовимірна задача зводиться до одновимірної, яка може бути розв'язана методами динамічного програмування.

1.2.2 Аналіз засобів моделювання 2D задач розміщення

Задачі розміщення, в яких необхідно враховувати просторову форму розміщуваних об'єктів при формалізації обмежень виду (1.2) – (1.3) на область допустимих рішень, в свою чергу, можуть бути розбиті на два класи: регулярного і нерегулярного розміщення.

До задач першого класу належать, зокрема, задача решітчастого [70, 71] і періодичного розміщення [72, 73].

Найбільшою складністю серед класу двовимірних задач розміщення мають задачі нерегулярного розміщення геометричних об'єктів довільної просторової форми. Це пояснюється складністю аналітичного опису умов їх взаємного неперетину. Одними з перших в цьому напрямку є роботи Л.Б. Беякової [20, 74], в яких розроблено алгоритм визначення умов взаємного неперетину об'єктів, що використовує зсув об'єкта в заданому напрямку, при якому ця умова виконується.

Серед дослідників, що займаються задачами нерегулярного розміщення об'єктів складної форми і мають в цій області фундаментальні результати, перш за все слід виділити члена-кореспондента НАН України, професора Ю.Г. Стояна і його учнів [14, 75, 76]. Серед зарубіжних вчених відзначимо W. Milenkovic (США), K. Dowsland, B. Dowsland (Великобританія), J. Blazewicz, P. Hawryluk, R. Walkowiak (Польща), C. Ribeiro, M. Carravilla, J. Oliveira (Португалія), H. Yanasse, J. Verceneri, N. Soma (Бразилія), проф. Е.А. Мухачеву з учнями (Росія, Уфа), проф. В.В. Бухвалову (Санкт-Петербург) та інших вчених.

Важливим кроком вперед, який дозволив аналітично описувати об'єкти складної геометричної форми і використовувати математичний апарат класичного аналізу для їх дослідження, було створення академіком НАН України В.Л. Рвачевим теорії R-функцій [77]. На базі R-функцій були

розроблені аналітичні методи дослідження різних геометричних об'єктів і побудови умов їх взаємного неперетину.

Апарат моделювання основних геометричних обмежень різних задач розміщення протягом ряду років послідовно розвивався чл.-кор. НАН України, професором Ю.Г. Стояном і його учнями в рамках створеної теорії оптимізаційного геометричного проектування. Так, для опису умови торкання об'єктів в [78] введено поняття годографа функції щільного розміщення, яке пізніше розвинене в роботах [4, 79]. У роботі Некман Р., Lengauer Т. [80], написаної пізніше, в контексті розв'язку двовимірної задачі розміщення геометричних об'єктів різної форми в прямокутній області також розглядається проблема опису умови торкання об'єктів, причому використовується поняття годографа, яке ідентичне поняттю годографа функції щільного розміщення.

Крім того, в роботах [80, 81] розглядається зв'язок між поняттям годографа і теоретико-множинною операцією суми Мінковського. Цей зв'язок також був детально вивчений значно раніше в роботах наукової школи Ю. Г. Стояна, зокрема, [82].

Так як в якості об'єктів розміщення виступають об'єкти різної фізичної природи, в теорії оптимізаційного геометричного проектування введено і вивчено поняття φ -об'єктів [83] для побудови геометричних моделей реальних фізичних об'єктів.

Визначення 1.1. Непорожня множина $T \subset \mathbb{R}^2$ називається φ -об'єктом, якщо виконуються наступні умови:

- T – канонічно замкнута ($\chi\alpha$) або канонічно відкрита ($\chi 0$) множина [83];
- внутрішність ($\text{int } T$) і замикання ($\text{cl } T$) множини T мають один і той же гомотопічний тип [83].

Для формалізації обмежень виду (1.1), (1.2) в роботах [14, 84] запропонований математичний апарат Φ -функцій, що представляють собою узагальнення поняття функції щільного розміщення. Дамо загальний опис цього апарату.

Нехай $T_i(u_i) \subset \mathbb{R}^2$ и $T_j(u_j) \subset \mathbb{R}^2$ – φ -об'єкти ($\text{int } T_i(u_i) \neq \emptyset$), метричні характеристики об'єктів $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$ незмінні.

Визначення 1.2 [14]. Довільна, усюди визначена і неперервна функція в \mathbb{R}^4 , що має таку характеристичну властивість

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) > 0, \text{ если } \text{cl}T_i(u_i) \cap \text{cl}T_j(u_j) = \emptyset; \quad (1.11)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0, \text{ если } \text{cl}T_i(u_i) \cap \text{cl}T_j(u_j) \neq \emptyset \text{ и } \text{int}T_i(u_i) \cap \text{int}T_j(u_j) = \emptyset; \quad (1.12)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0, \text{ если } \text{int}T_i(u_i) \cap \text{int}T_j(u_j) \neq \emptyset, \quad (1.13)$$

називається Φ -функцією.

Характеристична властивість $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ -функції задає неперетин (1.11), дотик (1.12) і перетин (1.13) замкнутих φ -об'єктів $T_i(u_i)$ і $T_j(u_j)$, де $u_i=(x_i, y_i)$, $u_j=(x_j, y_j)$ – параметри трансляції полюса φ -об'єктів $T_i(u_i)$ і $T_j(u_j)$, при цьому $T_i(u_i), T_j(u_j) \subset \mathbb{R}^2$.

Поверхня $\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0$ є 0-рівнем Φ -функції.

Випадок 1. Якщо в якості $T_i(u_i), T_j(u_j) \subset \mathbb{R}^2$ розглядаються опуклі орієнтовані багатокутники ($\varphi_i, \varphi_j = \text{const}$), тоді поверхня 0-рівня $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ -функції є замкнута багатогранна поверхня T_{ij} , що складається з K гіперплощин T_{ij}^k . Кожна з таких гіперплощин задається лінійним рівнянням з функцією виду

$$f_{ij}^k(u_i, u_j) = A^k(x_i - x_j) + B^k(y_i - y_j) + C^k, \quad k=1, 2, \dots, K \leq (n_i+n_j),$$

де коефіцієнти A^k, B^k, C^k є лінійні функції координат вершин об'єктів і не залежать від параметрів розміщення, n_i, n_j – кількість вершин об'єктів $T_i(x_i, y_i), T_j(x_j, y_j)$ відповідно.

Якщо при цьому $C^k > 0$, то виконання хоча б одної нерівності

$$A^k(x_i - x_j) + B^k(y_i - y_j) + C^k \geq 0$$

визначає умову (1.10) неперетину (в граничному випадку умова (1.11) торкання) об'єктів.

Тоді $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ – функція об'єктів $T_i(x_i, y_i), T_j(x_j, y_j)$ має вигляд:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \max_{k=1, K} \{f_{ij}^k(u_j - u_i)\}. \quad (1.14)$$

Випадок 2. [85]. Якщо область розміщення S_0 ізотропна і об'єкти розміщення $T_i(x_i, y_i, \varphi_i), T_j(x_j, y_j, \varphi_j)$ є неорієнтованими, то поверхня 0-рівня $\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j, \varphi_i, \varphi_j)$ -функції є нелінійною гіперповерхнею в просторі \mathbb{R}^6 параметрів розміщення об'єктів, що складається з набору гладких частин $T_{ij}^h, h=1, 2, \dots, H, H = O(n_i * n_j)$, коефіцієнти A, B, C є опосередковано функціями кутових параметрів об'єктів. Поверхня $T_{ij}^h \subset \mathbb{R}^6$ визначається рівнянням $f_{ij}^h=0$, де функція f_{ij}^h має вигляд

$$A^h(\varphi_i)(x_i - x_j) + B^h(\varphi_i)(y_i - y_j) + C^h(\varphi_i, \varphi_j) \quad h=1,2,\dots,H,$$

причому необхідно враховувати можливі межі зміни кутових параметрів φ_i і φ_j . Припускаючи, що $\varphi_i \in [0, 2\pi]$, параметр φ_j повинен задовольняти обмеженням:

$$\varphi_i - \varphi_j \geq -\varphi_{ij}^{h-2}, \quad \varphi_j - \varphi_i \geq \varphi_{ij}^{h-1}.$$

$\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j, \varphi_i, \varphi_j)$ – функція для базових об'єктів – неорієнтованих опуклих багатокутників $T_i(x_i, y_i, \varphi_i)$, $T_j(x_j, y_j, \varphi_j)$ – має вигляд:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \max_{h=1, H} \{ \Psi_{ij}^h(u_i, u_j) \}, \quad (1.15)$$

де функція $\Psi_{ij}^h(u_i, u_j) = \max_{h=1, H} \{ f_{ij}^h \} K_h(\varphi_i, \varphi_j) + \Theta_h(\varphi_i, \varphi_j)$, при цьому

$$K_h(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Theta_h(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

$$\Theta_h(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \varphi_{ij}^{h-1} \leq \varphi_j - \varphi_i \leq \varphi_{ij}^{h-2}, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

В роботі [86] запропонований підхід до розширення поняття Φ -функції на випадок, коли один або обидва розглянутих геометричних об'єктів $T_i(u_i)$, $T_j(u_j) \subset \mathbb{R}^2$ мають порожню внутрішність в просторі, в якому вони задані. Введено наступне розширення поняття Φ -функції:

Визначення 1.3. Φ -функцією називається довільна всюди визначена функція $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ в \mathbb{R}^4 , яка характеризується властивістю:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) > 0, \quad \text{якщо } \text{cl}T_i(u_i) \cap \text{cl}T_j(u_j) = \emptyset; \quad (1.16)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0, \quad \text{якщо } \text{cl}T_i(u_i) \cap \text{cl}T_j(u_j) \neq \emptyset \text{ і} \\ [\text{ri}T_i(u_i) \cap T_j(u_j) = \emptyset] \vee [T_i(u_i) \cap \text{ri}T_j(u_j) = \emptyset]; \quad (1.17)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0, \quad \text{якщо } [\text{ri}T_i(u_i) \cap T_j(u_j) \neq \emptyset] \wedge [T_i(u_i) \cap \text{ri}T_j(u_j) \neq \emptyset], \quad (1.18)$$

де $\text{ri}T_i(u_i)$ – відносна внутрішність об'єкта $T_i(u_i)$.

Відзначимо, що умова (1.16) визначення 1.3 збігається з умовою

(1.11) класичного визначення 1.2. Таким чином, Φ -функція дорівнює нулю, якщо перетинаються тільки межі об'єктів, а перетин меж з відносною внутрішністю об'єктів порожньо.

В роботі [87] також розглянуто підхід до формалізації умов взаємного неперетину і розміщення опуклих n -політопів.

1.2.3 Аналіз і класифікація методів розв'язання задач прямокутного розміщення

1.2.3.1 Методи пошуку наближеного розв'язку задачі

Двовимірна задача прямокутного розміщення (див. п. 1.1) з різними характеристиками дуже часто виникає на практиці, породжуючи, зокрема, нерегулярний розкрій напівнескінченної смуги на прямокутні заготовки.

Серед 2D C&P задач клас задач розміщення прямокутників с постійними метричними характеристиками в прямокутній області є найбільш вивченим.

Як показує аналіз наукової літератури, для розв'язання задач зазначеного класу пропонуються як точні, так і наближені методи. Однак, переважна більшість результатів, опублікованих останнім часом в зарубіжній науковій періодиці, відноситься до розробки і використання евристичних процедур.

Евристичні методи не гарантують отримання оптимальних розв'язків, але відрізняються порівняльною простотою і дозволяють при незначних витратах отримувати рішення, прийнятні для практичного використання.

Відзначимо, що задача розміщення прямокутників є базовою і застосовується як допоміжний засіб для вирішення багатьох інших задач розміщення і тих, що зводяться до них, зокрема, задач управління ресурсами проекту або задач теорії розкладів.

Детальний огляд, присвячений моделям, нижнім оцінкам, наближеним і точним алгоритмам, а також реалізаціям метаевристик для задачі прямокутного розміщення орієнтованих об'єктів в смугі або в контейнерах, можна знайти в роботі [88]. Інші варіанти задачі, коли допускаються повороти предметів на 90 градусів, а також обмеження на розміщення об'єктів, такі як гільйотинний розкрій, детально висвітлюються в [89].

1.2.3.2. Точні методи розв'язання задачі прямокутного розміщення

Розвитку точних методів в зарубіжній і вітчизняній літературі присвячена значно менша кількість публікацій. При цьому основна увага приділяється математичному моделюванню задачі і основам побудови методик її розв'язання. Це пояснюється складністю задачі, приналежністю її до класу NP-повних.

У різні роки цю задачу вивчали і розробляли точні методи її розв'язання І.В. Романовський, А.І. Ліповецький, який запропонував метод зон, в подальшому модифікований В.В. Бухваловою, S. Martello, D. Vigo, В. Мартинов, J. E. Beasley, Mitsutoshi Kenmochi, D. Pisinger і інші.

Вивчення властивостей області допустимих рішень задачі, її континуально-дискретної структури, дозволило адаптувати схему методу послідовного аналізу варіантів [90] для задач даного класу і розробити ефективні схеми точного розв'язання задачі.

У роботах С.Л. Магаса [91, 92] пропонується методика точного розв'язання задачі розміщення заданого набору прямокутників у напівнескінченній смугі. Отримання розв'язку передбачає перебір опуклих підобластей області допустимих рішень D , яка визначається обмеженнями виду (1.2), (1.3), і рішення на кожній з таких підобластей задачі лінійного програмування.

У роботах М.В. Новожилової [54, 93] розроблено альтернативний підхід до розв'язання даної задачі. Відмінність від попереднього полягає в реалізації ідеї перебору вершин області припустимих рішень D і рішення відповідних систем лінійних рівнянь.

В роботі [94] пропонується алгоритм для визначення глобального оптимуму задачі упаковки в смугу прямокутників і кіл. Запропонований підхід є комбінацією методу гілок і меж і градієнтного методу.

Двовимірна задача оптимізації розміщення прямокутних об'єктів у колі, до якої зведена задача упаковки паралелепіпедів в сфері (задача компонування штучних супутників), досліджується в роботі [95]. В якості незалежних змінних виступають параметри трансляції та кутові параметри розміщення прямокутників. Побудовано математичну модель задачі та розроблено точний алгоритм її вирішення.

Задача розміщення прямокутних об'єктів виключно важлива для розвитку теорії складності алгоритмів, тому продовження її дослідження і доказ нових властивостей, що дозволяють поліпшити оцінку обчислювальної складності алгоритму рішення, є актуальною задачею.

1.2.4 Аналіз і класифікація методів розв'язання задач розміщення багатокутників

Аналіз методик моделювання і розв'язання нерегулярних двовимірних задач розміщення орієнтованих і неорієнтованих об'єктів довільної просторової форми (Задача 3) демонструють інтерес до них як в теоретичному, так і в практичному аспектах.

У багатьох публікаціях для вирішення розглянутих задач розміщення використовуються різні евристичні алгоритми поліноміальної складності: однопрохідні евристики, багатопрохідні детерміновані і недетерміновані, в тому числі метаевристики, генетичні алгоритми, методологія імітаційного відпалу. Детальний опис метаевристичних процедур, їх порівняльну характеристику і використання для вирішення задач раціонального розкрою і упаковки можна знайти в роботі [96].

У статті [97] розглядається сімейство так званих алгоритмів ущільнення (compaction algorithms), за допомогою яких можна поліпшити початкове розміщення неопуклих багатокутних об'єктів у прямокутній області розміщення згідно заданому критерію якості. Наведені результати роботи алгоритмів на прикладах практичної розмірності.

В роботі [98] автори проводять аналіз стану проблеми розміщення геометричних об'єктів довільної просторової форми. Розглядаються завдання нерегулярного розміщення. Для їх вирішення пропонуються евристичні засоби або застосування змішаного цілочисельного програмування. Обговорюється оригінальна ідея застосування логічного програмування з обмеженнями.

У статті [99] досліджується задача визначення можливості розміщення заданого опуклого багатокутника в опуклій багатокутній області. В якості незалежних змінних задачі виступають параметри трансляції та кутовий параметр багатокутника, що розміщується. Розглядається задача параметричного лінійного програмування з нелінійним параметром, відповідним кутовому параметру багатокутника, що розміщується. Запропоновано оптимізаційний метод розв'язання, проведено його порівняння з існуючим чисто геометричним підходом.

Серед 2D C&P задач розглядаються як однокритеріальні так і багатокритеріальні задачі. В роботі [100] пропонується узагальнений генетичний алгоритм, застосовуваний для вирішення як однокритеріальних, так і багатокритеріальних задач розміщення. У цікавій роботі [101] розглядається двокритеріальна задача розміщення

багатокутних в загальному випадку неопуклих неорієнтованих об'єктів в обмеженій області. Розглянуто розширення на випадок 3D. У роботі пропонується підрозділ алгоритмів розв'язання задачі розміщення на дві категорії: «суворий» метод розміщення (legal placement method) і «ослаблений» метод розміщення (relaxed placement method). Для першого випадку необхідним є виконання всіх геометричних обмежень на кожному кроці алгоритму рішення. Друга група алгоритмів допускає порушення умов неперетину в процесі розміщення. У роботі вказується на складність побудови галузі взаємного неперетину двох неорієнтованих об'єктів і пропонується використовувати алгоритм відділення (separation algorithm). Цей алгоритм заснований на поданні багатокутних неопуклих неорієнтованих об'єктів множиною кіл і використовує функцію штрафу, пропорційну мінімальній відстані, на яке одна компонента повинна бути відтрансльована від іншої для забезпечення умови неперетину. Відзначимо, що ідеологічно близька методика була розроблена раніше, в 1984-1985 рр. в науковій школі Ю. Г. Стояна, зокрема, в роботах В.Я. Винарського, М.В. Новожилової [102].

Ефективним підходом до визначення локального мінімуму задачі розміщення орієнтованих багатокутних об'єктів є метод послідовно-одиначного розміщення.

Побудова математичних моделей задач розміщення орієнтованих багатокутних об'єктів за допомогою апарату Φ -функцій (1.11) – (1.13) і подальшого аналітичного представлення Φ -функції у вигляді структури лінійних нерівностей або систем наборів лінійних нерівностей, використання представлення області допустимих рішень D у вигляді (1.4) – все це дозволило сформулювати розглянуту задачу як багатоекстремальну задачу математичного програмування з неопуклою незв'язною багатогранною областю допустимих рішень і обґрунтувати застосування методології лінійного програмування до пошуку екстремуму цільової функції. В роботі [103] запропонований підхід, який використовує представлення області D у вигляді (1.4) і симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування на опуклій підобласті D_q для пошуку локального мінімуму завдання розміщення орієнтованих багатокутників. В роботі [104] розглянуто і реалізований підхід, який використовує метод активного набору. Стратегія активного набору є універсальною і застосовується як для вирішення завдань лінійного програмування, так і для вирішення завдань нелінійного програмування.

В роботі [103] також запропонований метод пошуку глобального мінімуму функції мети в задачі розміщення орієнтованих багатокутників в

напівнескінченній смузі на основі впорядкованого перебору опуклих підобластей D_q виду (1.4) – відповідних задач лінійного програмування – по дереву рішень в схемі методу гілок і меж.

Послідовний розвиток отримали моделі і методи розв'язання задач розміщення неорієнтованих багатокутників. В роботі [105] математична модель задачі розміщення неорієнтованих багатокутників була побудована на основі предикатного опису області допустимих рішень і мала мінімаксну функцію мети. В роботі [106] запропоновано завдання умов виду (1.1), (1.2) в задачі розміщення неорієнтованих багатокутників за допомогою аналітичного опису Φ -функції і структур нелінійних нерівностей. Завдання умов неперетину розміщуваних неорієнтованих об'єктів за допомогою цих двох засобів дозволило сформулювати дану задачу нерегулярного розміщення як задачу математичного програмування, хоча і не зовсім звичайну, і використовувати розроблені в рамках теорії математичного програмування підходи як основу побудови методології рішення.

В роботі [107] побудована математична модель оптимізаційної задачі розміщення кругів і неорієнтованих неопуклих багатокутників в прямокутній області з метою мінімізації одного з параметрів (довжини) прямокутної області розміщення як задача нелінійного математичного програмування.

В роботі [108] розглядається методика розв'язання оптимізаційної задачі нерегулярного розміщення неорієнтованих багатокутників в смузі, що заснована на методиці імітаційного підпалу. Алгоритм перевірки умов взаємного неперетину об'єктів розміщення і умови розміщення в смузі мають на увазі обмежений бінарний пошук для визначення множника, що масштабує, за допомогою якого визначаються розміри об'єкта розміщення, що дозволяють йому бути поміщеними в область розміщення. Вказується, то розглянутий алгоритм може бути застосований у разі розміщення неопуклих багатокутників в області розміщення.

В роботі [109] розглядається задача розміщення множини неопуклих багатокутних об'єктів розміщення на листі, причому кожен об'єкт має свою множину допустимих орієнтацій – кут повороту змінюється дискретно. Ця задача трактується як задача розміщення всіх об'єктів в заданій області з мінімальними перетинами. Пропонований евристичний підхід до вирішення апробований на множині тестових задач.

Основними особливостями постановки задачі розміщення неорієнтованих багатокутників, стримуючими розробку ефективних методів локальної та глобальної оптимізації, є:

- суттєва яружність функцій-обмежень області припустимих рішень задачі,

- суттєва виродженість області допустимих рішень;

- незв'язність області допустимих рішень задачі.

Друга особливість означає, що точка локального (глобального) мінімуму функції мети задачі розміщення неорієнтованих багатокутників може бути аналітично описана більш, ніж однією сумісною системою рівнянь рангу K (див. зауваження 1.2), що відповідає розмірності простору R^K , якому належить область допустимих рішень задачі.

Третя особливість означає необхідність здійснення монотонного переходу від однієї неопуклої підобласті області допустимих рішень, яка описується системою нелінійних нерівностей, до іншої в разі пошуку локального мінімуму функції мети задачі, або організації повного перебору набору таких підобластей, що містять область D .

Необхідно відзначити, що ідея застосування методології нелінійного програмування, судячи з літератури, до вирішення суто лінійних задач умовної оптимізації, виявилася досить плідною. Достатньо згадати поліноміальний метод Шора-Хачіяна, заснований на методі еліпсоїдів Н.З.Шора, який дозволяє знайти рішення канонічної задачі лінійного програмування, а також ціле сімейство методів внутрішньої точки.

Одним з ефективних методів вирішення нелінійних задач математичного програмування є метод лінеаризації [110], розроблений Б.Н. Пшеничним. При цьому головною вимогою до функцій, що описують оптимізаційну задачу, є їх гладкість. Однак ідеї, покладені в основу методу лінеаризації, успішно використовуються при розв'язанні багатьох інших задач, наприклад, при розв'язанні деяких мінімаксних задач.

Для розв'язання загальної задачі опуклого програмування розроблений комбінований метод, заснований на ідеях трьох методів: лінеаризації, відсікання і точних штрафних функцій. Комбінований метод сходиться при загальних припущеннях і дозволяє оцінити множники Лагранжа.

Ще одним класом негладких оптимізаційних задач є задачі обернено-опуклого програмування. Ці задачі – багатоекстремальні. В роботі [110] запропонована ефективна модифікація методу лінеаризації для відшукання локальних екстремумів задачі обернено-опуклого програмування. У загальну схему задачі обернено-опуклого програмування укладаються чимало математичних моделей задач упаковки і розміщення різних об'єктів в просторі R^n . На відміну від традиційних методів класичної математики,

при чисельному розв'язанні з'являється можливість значно збільшувати розмірності задач і знімати чимало обмежень на форми і розміри об'єктів.

Слід відзначити роботу [34], в якій розглядаються дві модифікації застосування методу лінеаризації до вирішення негладких оптимізаційних задач. У даній роботі використовується підхід, заснований на формулюванні проблеми упаковки у вигляді загальної оптимізаційної задачі обернено-опуклого програмування і вирішенні її модифікованим методом лінеаризації, запропонованим в [110]. Наведено розрахунки множини конкретних задач упаковки та розміщення об'єктів, які демонструють ефективність роботи описаної модифікації методу лінеаризації і розробленого на його основі пакета прикладних програм Packing.

Даний аналіз показує, що проблема математичного та комп'ютерного моделювання задач розміщення неорієнтованих об'єктів далека від вирішення, і побудова нових конструктивних засобів моделювання і вирішення даного класу задач є актуальною проблемою.

1.2.5 Особливості моделювання і розв'язання 2D задач нерегулярного розміщення геометричних об'єктів в анізотропних областях

Серед 2D C&P задач останнім часом підвищена увага приділяється оптимізаційним задачам нерегулярного розміщення геометричних об'єктів в анізотропних областях довільної форми (Задача 6). Ці задачі, незважаючи на значну прикладну цінність, вивчені в недостатній мірі, що обумовлено їх складністю в постановочному і обчислювальному планах. Відсутні ефективні засоби вирішення таких задач.

До вказаного класу належить оптимізаційна задача розкрою шкіри, кожна ділянка якої характеризується своїм напрямом найменшої тягучості, що є параметром анізотропії. В якості оптимізаційного критерію $\mathcal{N}(X)$ може виступати коефіцієнт заповнення області розміщення, площа невикористаної шкіри, кількість об'єктів, які розміщуються, і т.п. В роботі [111] обмеження на розміщення об'єкта в області забезпечуються введенням кодування розміщуваних об'єктів і області за допомогою бінарного масиву. Пошук хорошої послідовності об'єктів, що розміщуються, здійснюється генетичним алгоритмом з використанням заповнених раніше осередків масиву для області, об'єктів і орієнтації об'єктів.

У роботах [46, 111-113] проаналізовано особливості задач розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області, побудовані математичні моделі та запропоновано методи їх розв'язання.

1.3 Аналіз математичних моделей задач розміщення геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою

Окремий клас C&P задач складають задачі розміщення геометричних об'єктів, метричні характеристики і просторова форма яких може змінюватися в процесі розміщення і залежить від місця розташування в області розміщення. Оптимізаційні задачі цього класу є математичними моделями великої кількості практичних задач, що зустрічаються в багатьох областях людської діяльності. Прикладом можуть служити оптимізаційні задачі розподілу обмежених ресурсів проектів (Задача 5) і задачі оптимізації розміщення джерел забруднюючих викидів з урахуванням рельєфу місцевості, що побудовані на основі Задачі 4.

1.3.1 Особливості математичних моделей оптимізаційних задач розподілу обмежених ресурсів проектів

Специфіка задач першого класу вимагає оптимального розподілу ресурсів проекту на множині складових його робіт (операцій) з можливістю зміни характеристик робіт і жорсткими обмеженнями на використання ресурсів і тривалість робіт. Теорія оптимізаційного геометричного проектування дозволяє представляти роботи проекту як об'єкти розміщення, необхідні ресурси – як метричні характеристики (розміри) об'єктів, послідовність і умови часткової впорядкованості робіт – як умови розміщення. Зазначені задачі розглядаються в багатовимірному просторі ресурсів і можуть бути сформульовані як задачі оптимізаційного геометричного проектування, а саме як задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками і просторовою формою в заданій області.

Відзначимо наступні особливості цих задач, що дозволяють виділити їх в особливий клас задач розміщення:

- можливу зміну кількості одного або декількох ресурсів тягне за собою зміну необхідної кількості інших ресурсів, і вартість роботи проекту в умовах інфляції залежить від моменту часу її виконання. У термінах

задач геометричного проектування це відповідає зміні метричних характеристик об'єктів розміщення;

- об'єкти розміщення можуть зазнавати афінних перетворень гомотетії, при якому можлива зміна гомотопічного типу об'єкта. Крім того, в деяких випадках допустимо розбиття роботи на кілька робіт, рознесених в часі, що приводить до зміни зв'язності вихідного об'єкта;

- при моделюванні багатьох практичних задач розподілу ресурсів виявляється необхідною обробка інформації про геометричні об'єкти з порожньою внутрішністю $\text{int } T_i = \emptyset$, (але не порожньою відносною внутрішністю), які не є φ -об'єктами.

З публікацій з даної тематики відзначимо наступні роботи.

Робота [33] присвячена моделюванню багатовимірної задачі календарного планування (задача оптимального розподілу багатьох ресурсів проекту). Вихідна задача зведена до оптимізації розміщення гіперпаралелепіпедів, що моделюють багаторесурсні операції (роботи) проекту. Запропоновано підхід до її вирішення, заснований на схемі методу гілок і меж.

В роботі [55] розглядається двовимірна задача розподілу обмежених ресурсів проекту в умовах, коли роботи проекту мають дві характеристики – вартість і час виконання і допускається їх розбиття за часом. Задача зведена до оптимізації розміщення прямокутників із змінними розмірами в смузї з мінімізацією її довжини (загального часу виконання проекту). Для вирішення задачі розроблена модифікація методу гілок і меж. Аналогічна задача в тривимірній постановці досліджується в роботі [52]. Побудовано математичну модель, яка зводиться до задачі оптимального розміщення паралелепіпедів.

У роботах [114, 115] розглянуто і реалізовано застосування ідеології інтервальної геометрії при побудові математичної моделі задачі розподілу ресурсів в умовах невизначеності як задачі оптимізаційного геометричного проектування. Метричні характеристики об'єктів розміщення, що моделюють роботи проекту, можуть змінюватися незалежно один від одного в деяких діапазонах значень.

У роботах [116, 117] побудована математична модель і метод розв'язання двокритеріальної динамічної задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів проекту як оптимізаційної задачі розміщення прямокутних об'єктів зі змінюваними метричними характеристиками й просторовою формою та можливістю їх розбиття.

Аналіз останніх публікацій показав, що, незважаючи на очевидну практичну важливість, клас задач розміщення геометричних об'єктів із

змінними метричними характеристиками і просторовою формою вивчений в меншій мірі в порівнянні з оптимізаційними задачами розміщення об'єктів з фіксованими розмірами.

1.3.2. Аналіз особливостей математичних моделей розміщення джерел забруднюючих викидів як оптимізаційних задач розміщення багатокутних геометричних об'єктів

Оптимальне розміщення об'єктів, які є джерелами підвищеної пожежонебезпеки (пожежонебезпечні об'єкти) в регіоні (див. Задача 4) – один з дієвих методів зниження шкідливого впливу на навколишнє середовище пожеж та підвищення загального рівня пожежної безпеки території.

Аналіз наукової літератури показав, що абсолютна більшість авторів розвивають методологію математичного та комп'ютерного моделювання процесів негативного екологічного впливу пожеж з тим або іншим ступенем обліку динаміки атмосферних процесів і конкретних метеорологічних умов. Поряд з цим, відносно невелике число публікацій присвячено моделюванню і рішенню більш загальної задачі оптимізації параметрів (в тому числі параметрів розміщення) об'єктів з джерелами викидів шкідливих речовин в атмосферу з урахуванням геокліматичних факторів.

Так, в роботі [118] розглянута тривимірна по неформальній постановці задача розміщення небезпечних підприємств (хімічних заводів, сховищ радіоактивних відходів тощо) в області, що має заборонені зони (місця, де знаходяться населені пункти). Дана задача формулюється як задача з двокритеріальною функцією мети, яка максимізує мінімальні відстані і суми відстаней від небажаних підприємств до населених пунктів. Автори нехтують просторовою формою підприємств, моделюючи задачу як розміщення точок в багатокутній області.

Оптимізаційна задача розміщення об'єктів з джерелами шкідливих викидів в атмосферу може бути сформульована як задача компоновочного синтезу технічних систем з розподіленими параметрами [26, 27]. У цих роботах проведені дослідження по створенню математичних моделей та оптимізаційних методів синтезу технічних систем, що містять дискретні джерела фізичних полів. Продовженням досліджень є робота [119], в якій розглянуті нові моделі задач компоновочного синтезу екологічних систем, запропоновані підходи чисельної реалізації задач розміщення джерел викидів і екологічно значущих об'єктів.

У роботах [120, 121] здійснена математична постановка задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням негативного впливу можливої пожежі, і запропонований метод їх раціонального розміщення, що дозволяє мінімізувати рівень забруднення екологічно значущих зон аерозольними викидами пожежі. При цьому задача розміщення пожежонебезпечних об'єктів зведена до задачі розміщення відповідних їм зон забруднення. Рельєф області розміщення не враховувався, напрямок і швидкість вітру в межах області вважалися постійними. Як джерело забруднення виступала пожежа в заданій області Ω , що викидає на висоту H з інтенсивністю M аерозольні продукти горіння. Кількісною характеристикою забруднення області продуктами горіння є їх концентрація в точках даної області $C(x, y)$.

Процес поширення домішок в атмосфері з вітром, який дме зі швидкістю v уздовж осі Ox , моделювався рівнянням турбулентної дифузії виду

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (1.19)$$

де c , w – концентрація і швидкість осідання домішки; k_y , k_z – відповідно складові коефіцієнта обміну.

Граничні умови на нескінченному віддаленні від джерела мають вигляд:

$$c \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Граничні умови на підстильній поверхні

$$k_z \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0. \quad (1.21)$$

Для випадку наземної концентрації ($z = 0$) легкої аерозольної домішки рішення рівняння (1.19) з умовами (1.20), (1.21) має вигляд:

$$c(x, y, 0) = \frac{M}{2(1+n)\sqrt{\pi k_0 x} (k_1 x)} \exp\left(-\frac{v_{g1} H^{1+n}}{(1+n)^2 k_1 x} - \frac{y^2}{4k_0 x}\right), \quad (1.22)$$

де v_{g1} – швидкість вітру на висоті $z = 1$ м; k_1 – коефіцієнт обміну на висоті

$z = 1$ м; n – безрозмірний параметр для інтерполяції вертикального профілю швидкості вітру; k_0 – масштаб турбулентності в приземному шарі атмосфери, а для випадку важкої домішки, яка осідає, представляється у вигляді:

$$c(x, y, 0) = \frac{MH^{n+\omega(1+n)}v_{g1}^{1.5+\omega}}{2(1+n)\Gamma(1+\omega)\sqrt{\pi k_0 x} (k_1 x)^{1+\omega}} \exp\left(-\frac{v_{g1}H^{1+n}}{(1+n)^2 k_1 x} - \frac{y^2}{4k_0 x}\right), \quad (1.23)$$

де функція $\omega = \frac{w}{k_1(1+n)}$; Γ – гамма-функція.

Розв'язки (1.22) і (1.23) відповідають випадку, коли швидкість вітру з висотою змінюється за степеневим законом, а коефіцієнт обміну лінійно зростає з висотою:

$$v = v_{g1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n; \quad k_z = k_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m,$$

де $z_1 = 1$ м., а показник ступеня $m = 1$.

Найбільша концентрація домішки досягається при $y = 0$, тобто на осі OX . При цьому на осі викиду на деякій відстані X_M від джерела спостерігається максимум приземної концентрації C_M домішки (рис. 1.5)

Вирази для C_M і X_M на осі факела ($y = 0$) мають вигляд:

- легка домішка

$$C_{MЛ} = \frac{0.116(1+n)^2 M}{v_{g1} H^{1.5(1+n)}} \sqrt{\frac{k_1}{k_0 v_{g1}}} \quad X_{MЛ} = \frac{0.67 u_1 H^{1+n}}{(1+n)^2 k_1} \quad (1.24)$$

- важка домішка

$$C_{MТ} = \frac{0.055(1+n)^2 M}{v_{g1} H^{1.5(1+n)}} \sqrt{\frac{k_1}{k_0 v_{g1}}} \frac{(1.5+\omega)^{1.5+\omega}}{\Gamma(1+\omega)e^\omega} \quad X_{MТ} = \frac{v_{g1} H^{1+n}}{(1+n)^2 (1.5+\omega)k_1} \quad (1.25)$$

Отже, основними параметрами рішення є: приземна швидкість вітру в районі пожежі v_{g1} , інтенсивність викиду пожежею продуктів горіння M , висота початкового підйому продуктів горіння H .

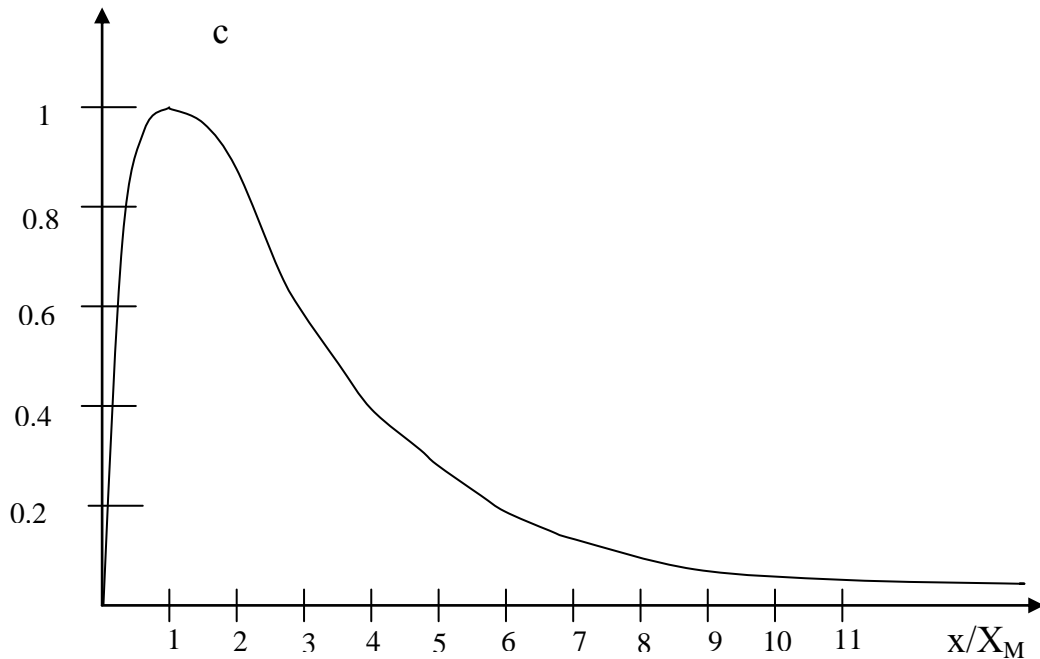


Рисунок 1.5 – Залежність концентрації викидів від відстані до пожежі

При визначенні концентраційного поля продуктів горіння враховується напрямок і сила вітру в районі пожежі. Тому функція концентрації має вигляд $C = C(x, y, u, G, Q)$, де u – вектор параметрів розміщення пожежонебезпечних об'єктів; G – характеристики пожежі; Q – геокліматичні умови в області. При цьому форма області забруднення викидами пожежі моделюється восьмикутником Γ_K , кожна з вершин якого відповідає одному з напрямків частин світу, а найбільш ймовірний напрямок вітру і його швидкість визначаються по розі вітрів, характерної для даної місцевості.

Розрахунок ліній рівних концентрацій викидів проводиться з урахуванням середньорічного значення вітру розглянутого географічного регіону по кожному напрямку. Розміри області забруднення (при постійних величинах M і H) визначаються приземної швидкістю вітру. Модель зони забруднення земної поверхні викидами пожежі в цьому випадку показана на рис. 1.6.

Границя Γ_K отриманого восьмикутника Γ_K – це лінія, в кожній точці якої досягається максимальна концентрація домішки в даному напрямку λ :

$$C(x,y)|_{(x,y) \in \Gamma_K} = \max C(x,y)|_{\lambda}. \quad (1.26)$$

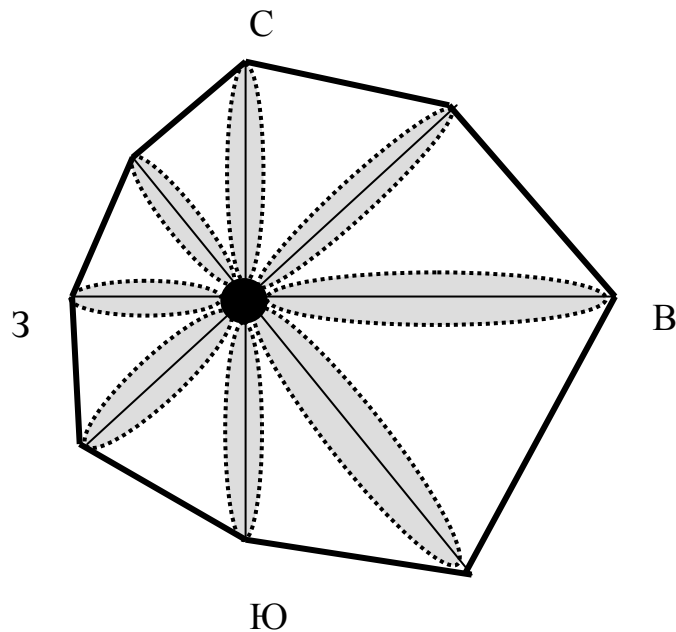


Рисунок 1.6 – Модель зони забруднення у вигляді восьмикутника

Така побудова області забруднення гарантує, що за її межами концентрація домішки буде менше, ніж на границі.

При побудові моделі форми зони забруднення викидами пожежі були зроблені наступні допущення:

- в межах області Ω роза вітрів не змінюється. Тому області забруднення є восьмикутниками з постійними розмірами і формою, що не залежить від їх місця розташування в Ω ;
- область розміщення Ω – плоска горизонтальна рівнина. Тому не враховується вплив рельєфу місцевості на зміни напрямку і швидкості вітру.

Аналіз особливостей задачі і зроблених припущень дозволив звести задачу оптимального розміщення джерел концентраційних полів (пожежонебезпечних об'єктів) до задачі нерегулярного розміщення орієнтованих геометричних об'єктів (фіксованих областей забруднення T_k) в обмеженій багатозв'язній області з урахуванням заданої системи обмежень.

Таким чином, задача оптимального розміщення екологічно небезпечних об'єктів як потенційних джерел забруднення навколишнього середовища знаходяться в полі пильної уваги дослідників. Однак, як показує аналіз літературних джерел, переважна більшість авторів моделюють поширення забруднюючих домішок крайовими задачами

турбулентної дифузії, не враховуючи при цьому рельєф місцевості і пов'язані з ним зміни напрямку і швидкості вітру в області розміщення. Іншими словами, розглядаються задачі, в яких об'єкти, що розміщуються, мають фіксовані метричні характеристики. Тим часом, при проектуванні виробничих систем, що містять пожежонебезпечні об'єкти, з урахуванням рельєфу місцевості та зміни параметрів вітру виникають задачі оптимізації розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою. Актуальність даного класу задач обумовлює необхідність створення математичних моделей і ефективних методів їх вирішення, заснованих на сучасному математичному інструментарії. В першу чергу це стосується розробки аналітичного опису геометричних обмежень з урахуванням наявності в області розміщення фізичного поля.

1.4 Висновки по главі 1

1. Оптимізаційні задачі розміщення геометричних об'єктів різної фізичної природи, що складаються у визначенні оптимального розміщення кінцевої множини геометричних об'єктів довільної просторової форми в заданих областях розміщення при наявності різноманітних обмежень і критеріїв якості розміщення, мають важливе практичне значення і при цьому мають значну теоретичну цінність як окремий клас екстремальних задач теорії дослідження операцій.

2. Для успішного розв'язання наукових і практичних задач геометричного проектування необхідні не тільки розробка загальних принципів моделювання задач розміщення геометричних об'єктів різної фізичної природи, але і побудова математичних моделей конкретних класів задач даної предметної області, методів і алгоритмів їх вирішення.

3. З математичної точки зору найбільшу складність представляє клас оптимізаційних задач нерегулярного розміщення об'єктів довільної просторової форми, серед яких найменш вивченими є задачі нерегулярного розміщення неорієнтованих геометричних об'єктів в анізотропних областях довільної просторової форми.

4. У переважній більшості випадків розглядаються задачі, в яких об'єкти розміщення мають фіксовані метричні характеристики і просторову форму. Однак ряд найважливіших задач розподілу обмежених ресурсів, проектування промислових систем з джерелами забруднюючих викидів (наприклад, пожежонебезпечних об'єктів) з урахуванням рельєфу місцевості та зміни параметрів вітру зводяться до оптимізаційних задач

розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою.

5. За своєю математичною постановкою ці задачі належать до класу багатовимірних багатоекстремальних задач нелінійного неопуклого математичного програмування із специфічною областю допустимих рішень. Складність аналітичного представлення області допустимих рішень, нелінійність і недиференційованість в загальному випадку функцій обмежень області допустимих рішень виводить даний клас задач за рамки класичної теорії дослідження операцій, ускладнює або робить неможливим використання для їх вирішення класичних методів умовної оптимізації. З цієї точки зору актуальним є виділення нових конструктивних властивостей області допустимих рішень і побудова на цій основі методики лінеаризації основних обмежень області допустимих рішень, що є основою подальшого вдосконалення і використання точних і наближених оптимізаційних методів вирішення.

6. Таким чином, з урахуванням широкого спектра практичних застосувань і недостатнім ступенем розвитку теоретичного апарату розробка математичних моделей, оптимізаційних методів вирішення та створення на їх основі сучасного програмного забезпечення задач розміщення неорієнтованих геометричних об'єктів і джерел фізичних полів, в тому числі із змінними метричними характеристиками і просторовою формою, в ізотропних і анізотропних областях є актуальною науковою проблемою.

ГЛАВА 2

ПОБУДОВА ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ЗМІНЮВАНИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ОБЛАСТЯХ ІЗ ВЛАСТИВІСТЮ АНІЗОТРОПІЇ

Розглянуто засоби побудови основних геометричних обмежень задачі розміщення (1.1) – (1.3) за умови, що об'єкти розміщення належать до класу базових або є суперпозицією базових об'єктів, але мають при цьому істотну відмінність від об'єктів, що розглядалися раніше – допускається зміна просторової форми об'єктів і їх метричних характеристик в процесі розміщення. У деяких випадках це викликано анізотропією області розміщення. Ці особливості істотно впливають на область визначення і характер Φ -функції, тому моделювання основних геометричних обмежень в задачах зазначеного класу проводиться на базі виділення додаткових властивостей Φ -функції.

2.1 Моделювання геометричних обмежень на параметри розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками за допомогою апарату Φ -функцій

Нехай дано такі об'єкти:

- прямокутник Ω , метричні характеристики якого – довжина Z і ширина W – вважаються постійними;
- об'єкт $\Omega^* = cl(\mathbb{R}^2/\Omega)$;
- прямокутник $T \subset \mathbb{R}^2$, заданий послідовністю своїх вершин $\{v^1, \dots, v^4\}$, $v^i = (x^i, y^i)$, $i = \overline{1, 4}$ у власній системі координат XOY , початок якої O (полюс об'єкта T) є точка перетину діагоналей T :

$$O = [v^1, v^3] \cap [v^2, v^4], d^1 = \frac{1}{2} |v^1, v^3|, d^2 = \frac{1}{2} |v^2, v^4|.$$

При цьому площа S об'єкта T визначається за формулою $S = 2d^1 d^2 \sin 2\alpha$, де 2α – гострий кут між діагоналями $2\alpha < \frac{\pi}{2}$, (рис.2.1).

Якщо метричні характеристики розглянутих об'єктів Ω , T постійні, то ці об'єкти відносять до класу 2D primary objects.

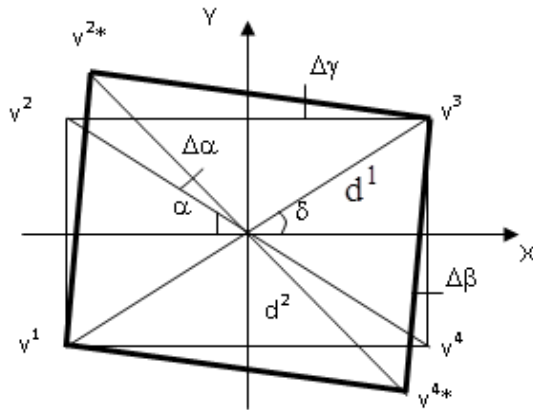


Рисунок 2.1 – Вид об'єкта Т

Нехай метричні характеристики об'єкта Т є змінними величинами по наступному закону:

$$S = \text{const}, d^1 = \text{const}, d^2 = \text{var}, \Delta\alpha = \text{var}. \quad (2.1)$$

Іншими словами, розглянемо випадок, коли величини d^2, α пов'язані функціональними залежностями, тобто зміна величини кута $\Delta\alpha$ викликає зміну довжини d^2 діагоналі (v_2, v_4) :

$$d^2(\Delta\alpha) = \frac{S}{2d^1 \sin(2\alpha + \Delta\alpha)}. \quad (2.2)$$

Зауваження 2.1. Розглядається об'єкт розміщення Т такий, що при $\Delta\alpha=0$ це прямокутник з довжиною $|x^3 - x^1|$ і шириною $|y^3 - y^1|$. Зміна $\Delta\alpha$ призводить до виведення Т з початкового класу просторових форм "прямокутник". Вихідний об'єкт трансформується в паралелограм $v^1 v^{2*} v^3 v^{4*}$.

Зауваження 2.2. Покладемо, що діагональ d^1 є орієнтованою у власній системі координат об'єкту Т, тобто кут $\delta = \text{const}$.

Координати вершин об'єкта Т у власній системі координат визначаються наступним чином:

$$x^3 = \frac{S}{4d^1} \frac{1}{\sin \alpha}, \quad y^3 = \frac{S}{4d^1} \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (2.3)$$

$$x^1 = -x^3, \quad y^1 = -y^3, \quad (2.4)$$

$$x^2(\Delta\alpha) = \frac{S}{2d^1} \frac{\cos(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \quad y^2(\Delta\alpha) = \frac{S}{2d^1} \frac{\sin(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \quad (2.5)$$

$$x^4(\Delta\alpha) = -x^2(\Delta\alpha), \quad y^4(\Delta\alpha) = -y^2(\Delta\alpha). \quad (2.6)$$

Зауваження 2.3. Приріст $\Delta\alpha$ лежить в межах

$$-2\alpha < \Delta\alpha < \pi - 2\alpha. \quad (2.7)$$

Знаки строгих нерівностей забезпечують T властивість всюди щільної множини в R^2 : $\text{int}T \neq \emptyset$.

При $\Delta\alpha = \pi - 2\alpha$ ($\Delta\alpha = -2\alpha$) об'єкт T вироджується в ніде не щільну множину (пряму). Подальше збільшення $\Delta\alpha$ поверне T в клас усюди щільних множин.

Вважаємо далі позитивним зміну α за годинниковою стрілкою.

Розташування об'єкта T визначається вектором параметрів розміщення, пов'язаних з полюсом O власної системи координат. Розташування об'єкту Ω (Ω^*) задається вектором, тобто дані об'єкти задані в нерухомій системі координат. Без втрати спільності далі будемо вважати, що $T = T(u, \Delta\alpha)$, $T(0,0, \Delta\alpha) = T(\Delta\alpha)$.

2.1.1 Побудова Φ -функції опуклого об'єкта і області розміщення

Умова розміщення об'єкта в області розміщення є одним з основних геометричних обмежень в задачах оптимізаційного геометричного проектування, що розглядалися в главі 1 (див. П.1.1). Це обмеження має вигляд (1.2) або в даному випадку:

$$\text{int} T(u, \Delta\alpha) \cap \text{int} \Omega^*(u_0) = \emptyset. \quad (2.8)$$

Побудову Φ -функції $\Phi(u_0, u, \Delta\alpha)$ об'єктів $\Omega^*(u_0)$ і $T(u, \Delta\alpha)$ проведемо на основі підходу, викладеному в [42].

Об'єкт вважаємо нерухомим.

Нехай $\Delta\alpha=0$.

Введемо в розгляд функції $f_0^i(x, y)$, $i = \overline{1,4}$ виду

$$f_0^1(x, y) = x - \underline{x}; f_0^2(x, y) = Z - x - \bar{x}; f_0^3(x, y) = y_1 - \underline{y}; f_0^4(x, y) = W - y - \bar{y}, \quad (2.9)$$

де

$$\underline{x} = - \min_{i=1,4} x^i, \quad \bar{x} = \max_{i=1,4} x^i, \quad \underline{y} = - \min_{i=1,4} y^i, \quad \bar{y} = \max_{i=1,4} y^i,$$

причому величини

$$\underline{x} = x^1 (= x^2), \quad \bar{x} = x^3 (= x^4), \quad \underline{y} = y^1 (= y^4), \quad \bar{y} = y^2 (= y^3)$$

при $\Delta\alpha = 0$ є константами.

Тоді Φ -функція об'єктів $\Omega^*(u_0)$ і $T(u, 0)$ має вигляд:

$$\Phi(u_0, x, y, 0) = \min\{f_0^1(x, y); f_0^2(x, y); f_0^3(x, y); f_0^4(x, y)\} \quad (2.10)$$

При цьому умова $\Phi(u_0, x, y, 0) \geq 0$ задає область G_0 параметрів розміщення (x, y) таку, що обмеження (2.8) виконано, і аналітично описується системою лінійних нерівностей

$$F_0(x, y) \geq 0, \quad (2.11)$$

де $F_0(x, y) = \{f_0^i(x, y)\}$, $i = \overline{1,4}$.

Нехай тепер $\Delta\alpha$ безперервно змінюється в межах (2.7).

Тоді область визначення $\Phi(u_0, u, \Delta\alpha)$ -функції, на відміну від класичного випадку, являє собою деякий відкритий шар Ξ простору R^3 параметрів $(x, y, \Delta\alpha)$. Рівні Φ -функції є кусково-гладкими нелінійними гіперповерхнями. Область $G \subset \Xi$, де $\Phi(u_0, u, \Delta\alpha) \geq 0$ являє собою точкову множину, що обмежена набором гладких нелінійних поверхонь g_j ,

$$\text{Fr}G = \bigcup_{j=1}^J g_j, \quad \text{причому } g_j \text{ задається нелінійним рівнянням } f_k^i(x, y, \Delta\alpha) = 0,$$

функція якого визначається на основі $f_0^i(x, y)$ і додаткових перетворень, наведених нижче, $j = \text{function}(i, k)$.

Побудуємо аналітичний опис множини G . Для цього діапазон (2.7) розіб'ємо на дві підмножини

$$0 \leq \Delta\alpha < \pi - 2\alpha, \quad -2\alpha < \Delta\alpha \leq 0$$

і розглянемо кожну окремо.

Діапазон 1: $0 \leq \Delta\alpha < \pi - 2\alpha$.

В даному діапазоні існує деяке значення $\Delta\alpha^*$, при якому $x^2 = x^3$ (аналогічно $x^4 = x^1$), тобто при $\Delta\alpha = \Delta\alpha^*$ відбувається перехід на іншу гладку поверхню, що обмежує область G.

З урахуванням (2.3), (2.5) отримуємо рівняння для визначення кута $\Delta\alpha^*$:

$$\sin 2\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta\alpha^*}{2} - H_\alpha \operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha^*}{2} - \sin 2\alpha = 0. \quad (2.12)$$

де $H_\alpha = \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha$.

Корені рівняння (2.11) мають вигляд:

корінь 1
$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha^*}{2} = \frac{H_\alpha - \sqrt{H_\alpha^2 + 4 \sin^2 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha} < 0;$$

корінь 2.
$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha^*}{2} = \frac{H_\alpha + \sqrt{H_\alpha^2 + 4 \sin^2 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha} > 0$$

Аналіз коренів показує, що корінь 1 відповідає випадку, коли $2\alpha > \pi/2$, що суперечить визначенню об'єкта T. Корінь 2 є шуканим рішенням, тоді

$$\Delta\alpha^* = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{H_\alpha + \sqrt{H_\alpha^2 + 4 \sin^2 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha} \right). \quad (2.13)$$

Якщо $\Delta\alpha < \Delta\alpha^*$, то $x^2 < x^3$ ($x^1 < x_4$); при $\Delta\alpha > \Delta\alpha^*$ $x^2 > x^3$ ($x^4 > x^1$).

Приклад 2.1. Нехай вихідний об'єкт T (на рис. 2.2 показаний суцільною лінією) задається координатами вершин $\{(-3,464, -2); (-3,464, 2); (3,464, 2); (3,464, -2)\}$, $\alpha = 0,524$. Умова $x^2 = x^3$ (аналогічно $x^4 = x^1$) виконується при $\Delta\alpha^* = 1,571$. Відповідна довжина діагоналі $d^2(\Delta\alpha^*) = 6,928$. Координати вершин перетвореного об'єкта T($\Delta\alpha^*$): $\{(-3,464, -2);$

$(3,464, 6); (3,464, 2); (-3,464, -6)$ (на рис. 2.2 показаний пунктирною лінією).

Діапазон 2: $-2\alpha < \Delta\alpha \leq 0..$

Діагональ (v^2, v^4) обертається проти годинникової стрілки у власній системі координат. При зміні $\Delta\alpha$ в даному діапазоні існує деякий кут $\Delta\alpha^{**}$, при якому $y^2 = y^1$ ($y^4 = y^3$).

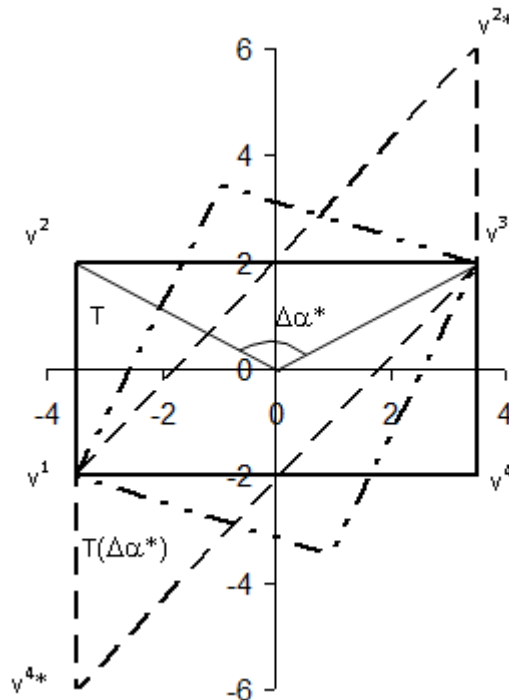


Рисунок 2.2 – Перетворення об'єкта $T(\Delta\alpha^*)$ в діапазоні $0 \leq \Delta\alpha < \pi - 2\alpha$

Вираз для кута $\Delta\alpha^{**}$ визначається з урахуванням (2.3), (2.6) і має вигляд

$$\Delta\alpha^{**} = 2 \arctg \left(\frac{M_\alpha - \sqrt{M_\alpha^2 + 4 \sin^2 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha} \right)$$

де $M_\alpha = \cos 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha$.

Продовжимо Приклад 2.1. На рис. 2.3 наведено перетворення об'єкта $T(\Delta\alpha^{**})$ (показаний пунктирною лінією) в розглянутому діапазоні $-2\alpha < \Delta\alpha \leq 0$ при цьому $\Delta\alpha^{**} = -0,714$.

Якщо кут $|\Delta\alpha| < \Delta\alpha^{**}$, то $y^2 > y^1$ ($y^3 > y^4$); якщо $|\Delta\alpha| > \Delta\alpha^{**}$, то

$$y^2 < y^1 \quad (y^3 < y^4).$$

Таким чином, область зміни параметра $\Delta\alpha$ розбивається на чотири підобласті: $\{-2\alpha < \Delta\alpha \leq \Delta\alpha^{**}; \Delta\alpha^{**} \leq \Delta\alpha < 0; 0 \leq \Delta\alpha \leq \Delta\alpha^*; \Delta\alpha^* \leq \Delta\alpha < \pi - 2\alpha\}$.

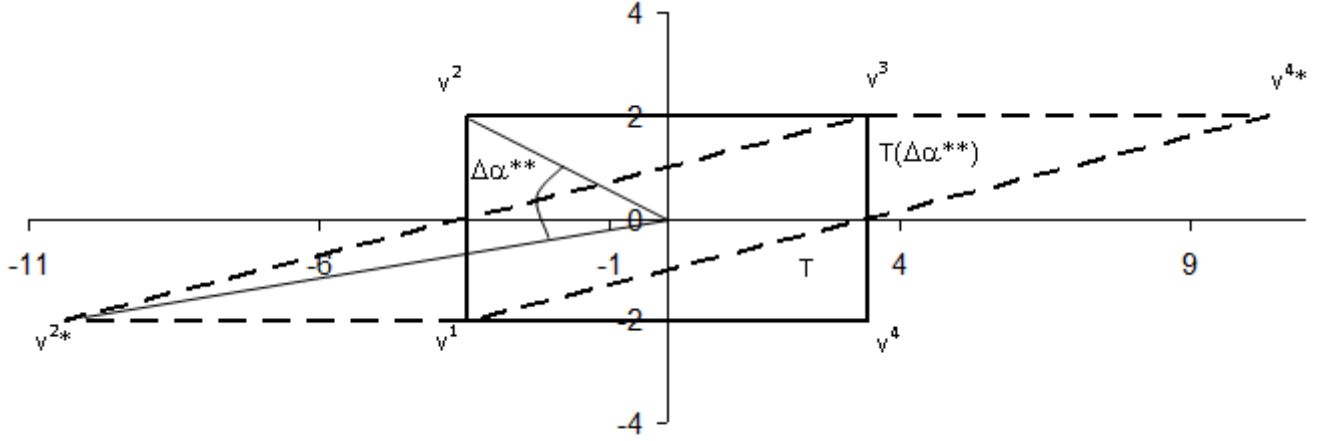


Рисунок 2.3 – Перетворення об'єкта $T(\Delta\alpha^{**})$

Позначимо $\eta_1 = -2\alpha$, $\eta_2 = \Delta\alpha^{**}$, $\eta_3 = 0$, $\eta_4 = \Delta\alpha^*$, $\eta_5 = \pi - 2\alpha$.

Функції $f_0^i(x, y)$ з (2.11) при $\Delta\alpha = \text{var}$ трансформуються в набір $f_k^i(x, y, \Delta\alpha)$, $i = \overline{1, 4}$, $k = \overline{1, 3}$ нелінійних функцій наступного вигляду:

$$f_k^1(x, y, \Delta\alpha) = \langle x - \underline{x}_k(\Delta\alpha), k = \overline{1, 3},$$

де

$$\underline{x}_k(\Delta\alpha) = \begin{cases} \underline{x}_1(\Delta\alpha) := \frac{S}{2d^1} \frac{\cos(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_1 \leq \Delta\alpha \leq \eta_3, \\ \underline{x}_2(\Delta\alpha) := -d^1 \cos\alpha, \text{ если } \eta_3 \leq \Delta\alpha \leq \eta_4, \\ \underline{x}_3(\Delta\alpha) := -\frac{S}{2d^1} \frac{\cos(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_4 \leq \Delta\alpha < \eta_5, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$f_k^2(x, y, \Delta\alpha) = \langle Z - x - \bar{x}_k(\Delta\alpha).$$

$$\bar{x}_k(\Delta\alpha) = \begin{cases} \bar{x}_1(\Delta\alpha) := -\frac{S}{2d^1} \frac{\cos(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_1 \leq \Delta\alpha \leq \eta_3, \\ \bar{x}_2(\Delta\alpha) := d^1 \cos\alpha, \text{ если } \eta_3 \leq \Delta\alpha \leq \eta_4, \\ \bar{x}_3(\Delta\alpha) := \frac{S}{2d^1} \frac{\cos(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_4 \leq \Delta\alpha < \eta_5, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$f_k^3(x, y, \Delta\alpha) = \langle y - \underline{y}_k(\Delta\alpha);$$

$$\underline{y}_k(\Delta\alpha) = \begin{cases} \underline{y}_1(\Delta\alpha) := \frac{S}{2d^1} \frac{\sin(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_1 \leq \Delta\alpha \leq \eta_2, \\ \underline{y}_2(\Delta\alpha) := -d^1 \sin \alpha, \text{ если } \eta_2 \leq \Delta\alpha \leq \eta_3, \\ \underline{y}_3(\Delta\alpha) := -\frac{S}{2d^1} \frac{\sin(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_3 \leq \Delta\alpha < \eta_5, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$f_k^4(x, y, \Delta\alpha) = \langle W - y - \bar{y},$$

де

$$\bar{y}_k(\Delta\alpha) = \begin{cases} \bar{y}_1(\Delta\alpha) := \frac{S}{2d^1} \frac{\sin(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_1 \leq \Delta\alpha \leq \eta_3, \\ \bar{y}_2(\Delta\alpha) := -d^1 \sin \alpha, \text{ если } \eta_3 \leq \Delta\alpha \leq \eta_4, \\ \bar{y}_3(\Delta\alpha) := -\frac{S}{2d^1} \frac{\sin(\pi - \alpha - \Delta\alpha)}{\sin(2\alpha + \Delta\alpha)}, \text{ если } \eta_4 \leq \Delta\alpha < \eta_5, \end{cases} \quad (2.17)$$

Тоді $\Phi(u_0, u, \Delta\alpha)$ – функція в діапазоні $\{-2\alpha < \Delta\alpha < \pi - 2\alpha\}$ має вигляд:

$$\Phi(x, y, \Delta\alpha) = \min_{i=1,4} \left\{ \min_{k=1,3} \{f_k^i(x, y, \Delta\alpha)\} \right\}, \quad (2.18)$$

при цьому умова (2.8) задається формулою $\Phi(x, y, \Delta\alpha) \geq 0$.

Аналitична умова (2.8) при зміні $\Delta\alpha$ в межах (2.7) задається системою $F(x, y, \Delta\alpha) \geq 0$, де $F(x, y, \Delta\alpha)$ – набір функцій виду $f_k^i(x, y, \Delta\alpha)$, $k = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,4}$.

2.1.2 Побудова Φ -функції двох опуклих об'єктів $T_1(u_1, \Delta\alpha_1)$ і $T_2(u_2, \Delta\alpha_2)$ із змінними метричними характеристиками

Позначимо через $\Delta\beta_k$ кут $v_k^2 v_k^1 v_k^{2*}$ ($v_k^4 v_k^3 v_k^{4*}$ (відповідно), а через $\Delta\gamma_k$ кут $v_k^2 v_k^4 v_k^{2*}$ ($v_k^4 v_k^1 v_k^{4*}$ (відповідно), $k = 1, 2$ (рис.2.1).

Координати вершин $v_k^1, v_k^2(v_k^{2*})$, $v_k^3, v_k^4(v_k^{4*})$ об'єкта T_k у власній системі координат $X_k O_k Y_k$ визначені формулами (2.3–2.6).

У разі, якщо метричні характеристики об'єктів T_1, T_2 фіксовані, то

0-рівень Φ -функції є кусково-лінійною гіперповерхнею G в просторі параметрів розміщення $R^4 (x_1, y_1, x_2, y_2)$ об'єктів T_1, T_2 . Коефіцієнти рівняння

$$A^i (x_2 - x_1) + B^i (y_2 - y_1) + C^i = 0,$$

кожної грані G^i $i=\overline{1,4}$ поверхні G обчислюються в залежності від одного з трьох можливих випадків торкання об'єктів.

1-й тип: q -а сторона (v_2^q, v_2^{q+1}) об'єкта T_2 – g -а вершина об'єкта T_1 ;

$$A^i = y_2^q - y_2^{q+1}, B^i = x_2^{q+1} - x_2^q, C^i = -(x_1^g - x_2^q)A^i - (y_1^g - y_2^q)B^i$$

2-й тип: g -а сторона об'єкта T_1 – q -а вершина об'єкта T_2 ;

$$A^i = y_1^{g+1} - y_1^g, B^i = x_1^g - x_1^{g+1}, C^i = -(x_1^g - x_2^q)A^i - (y_1^g - y_2^q)B^i.$$

3-й тип: g -а сторона об'єкта T_1 – q -а сторона об'єкта T_2 .

Очевидно, в початковому положенні об'єктів (див. Зауваження 2.1) присутній тільки 3-й тип торкання. При цьому 3-й тип торкання є поєднання 1-го і 2-го типу торкання. Так, дотик 3-го типу «сторона (v_1^3, v_1^4) об'єкта T_1 сторона об'єкта T_2 », що генерує гіперплощину, можна інтерпретувати 4-ма способами:

1: G_1^1 : сторона (v_1^3, v_1^4) – вершина v_2^1 ,

2: G_2^1 : сторона (v_2^1, v_2^2) – вершина v_1^4 ,

3: G_3^1 : сторона (v_2^1, v_2^2) – вершина v_1^3 ,

4: G_4^1 : сторона (v_1^3, v_1^4) – вершина v_2^2 .

На верхньому рівні діаграми рис. 2.4 (блок, обведений пунктирною лінією) представлені всі варіанти торкань об'єктів $T_1 (0,0)$ і $T_2 (u_2,0)$.

У разі, якщо метричні характеристики об'єктів T_1, T_2 змінюються $(\Delta\alpha_1=\text{var}, \Delta\alpha_2=\text{var})$, 0-рівень Φ -функції є кусково-нелінійною гіперповерхнею \tilde{G} у просторі R^6 параметрів розміщення $(x_1, y_1, \Delta\alpha_1, x_2, y_2, \Delta\alpha_2)$ об'єктів T_1, T_2 . При цьому, перетин гіперповерхні \tilde{G} площиною $\Delta\alpha_1=0, \Delta\alpha_2=0$ є кусково-лінійною гіперповерхнею G^1 .

Коефіцієнти рівняння

$$f_p^j(u_1, \Delta\alpha_1, u_2, \Delta\alpha_2) = 0$$

$$\tilde{A}_p^j(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2)(x_2 - x_1) + \tilde{B}_p^j(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2)(y_2 - y_1) + \tilde{C}_p^j(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2) = 0 \quad (2.19)$$

кожної гладкої частини $\tilde{G}_p^j, j=\overline{1,4}, p=\overline{1,4}$ поверхні \tilde{G} є функціями

прирістів кутів $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2$ в діапазонах, що визначаються співвідношеннями величин $\Delta\beta_1$ і $\Delta\beta_2, \Delta\gamma_1$ і $\Delta\gamma_2$, (рис. 2.4).

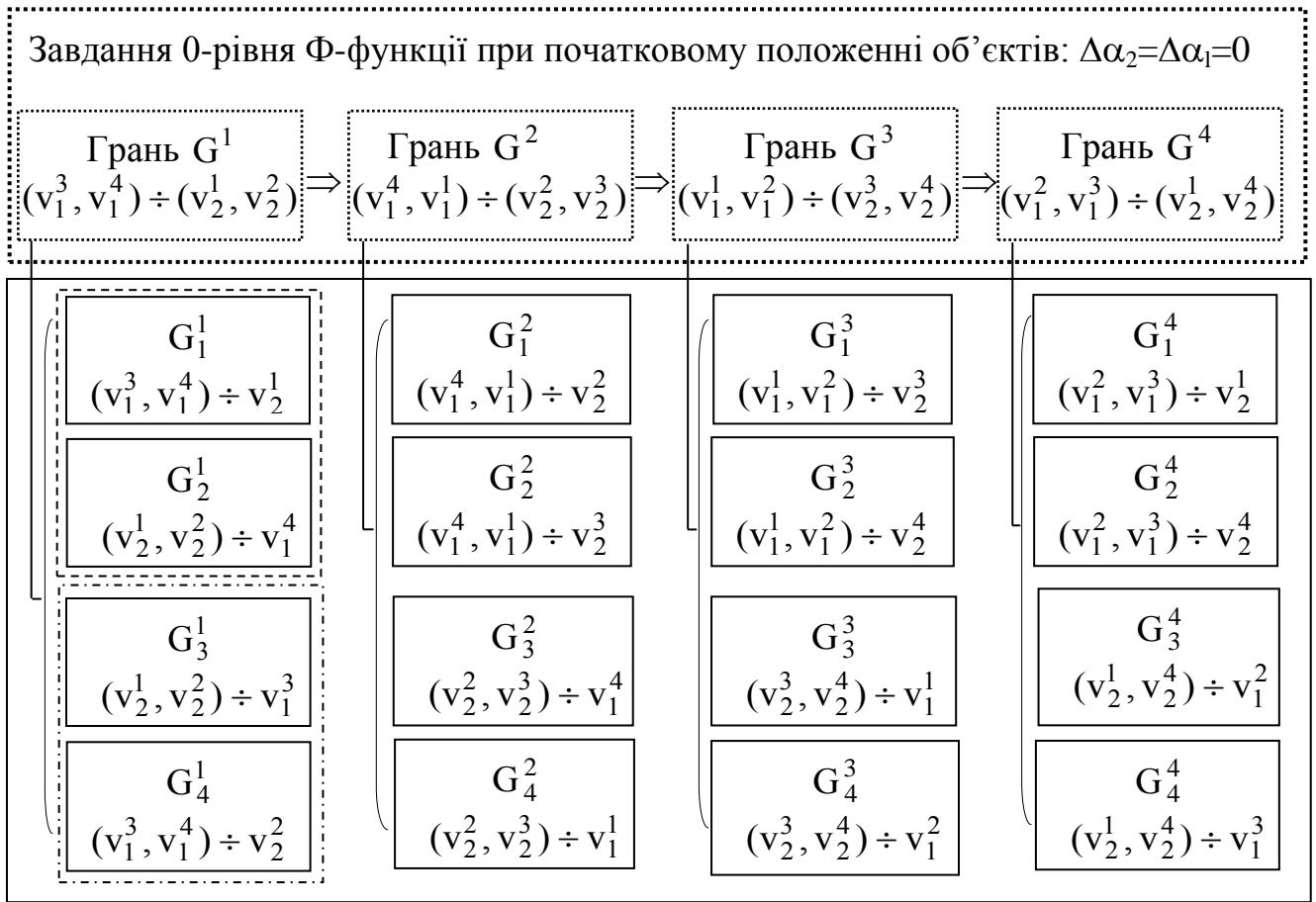


Рисунок 2.4 – Реалізація типів торкання при побудові 0-рівня об'єктів $T_1(0,0)$ і $T_2(0,0)$

Залежно від значень $\Delta\beta_1$ і $\Delta\beta_2, \Delta\gamma_1$ і $\Delta\gamma_2$ реалізуються блоки нижніх рівнів діаграми рис. 2.4.

Величини $\Delta\beta_k, \Delta\gamma_k$ є функціями збільшень $\Delta\alpha_k, k = 1,2$, і виражаються в наступному вигляді:

$$\Delta\beta_k(\Delta\alpha_k) = \arccos \left[\frac{\frac{S_k}{4d_k^1 \sin \alpha_k} - \frac{S_k \cos(\alpha_k + \Delta\alpha_k)}{2d_k^1 \sin \Theta_k}}{\sqrt{(d_k^1)^2 + \left(\frac{S_k}{2d_k^1 \sin \Theta_k} \right)^2 - S_k \operatorname{ctg} \Theta_k}} \right], \quad (2.20)$$

$$\Delta\gamma_k(\Delta\alpha_k) = \arccos \left[\frac{\frac{S_k}{4d_k^1 \cos\alpha_k} - \frac{S_k}{2d_k^1 \sin\Theta_k} \sin(\alpha_k + \Delta\alpha_k)}{\sqrt{(d_k^1)^2 + \left(\frac{S_k}{2d_k^1 \sin(\pi - \Theta_k)} \right)^2} - S_k \operatorname{ctg}(\pi - \Theta_k)} \right], \quad (2.21)$$

де $\Theta_k = 2\alpha_k + \Delta\alpha_k$.

При цьому, коли $0 \leq \Delta\alpha < \pi - 2\alpha$, то $\Delta\beta_k(\Delta\alpha_k) \leq 0$, $\Delta\gamma_k(\Delta\alpha_k) \leq 0$.

Діапазони зміни кутів $\Delta\beta_k$, $\Delta\gamma_k$ такі:

$$\begin{aligned} -(\pi - \alpha_k) &\leq \Delta\beta_k \leq (\pi + \alpha_k) \\ -\alpha_k &\leq \Delta\gamma_k \leq (\pi - 2\alpha_k), \quad k=1,2. \end{aligned}$$

Продовжимо Приклад 2.1. На рис. 2.2 штрих-пунктирною лінією показано положення об'єкта Т при $\Delta\alpha = 0,78$. При цьому $\Delta\beta = 0,4326$ (формула 2.20).

Можливі такі випадки діапазонів взаємної зміни кутів

$$\begin{aligned} \text{Випадок 1. } &\begin{cases} -2\alpha_1 < \Delta\alpha_1 \leq 0 \\ -2\alpha_2 < \Delta\alpha_2 \leq 0 \end{cases}, & \text{Випадок 2. } &\begin{cases} -2\alpha_1 < \Delta\alpha_1 \leq 0 \\ 0 \leq \Delta\alpha_2 < \pi - 2\alpha_2 \end{cases}, \\ \text{Випадок 3. } &\begin{cases} 0 \leq \Delta\alpha_1 \leq 0 - 2\alpha_1 \\ -2\alpha_2 < \Delta\alpha_2 \leq 0 \end{cases}, & \text{Випадок 4. } &\begin{cases} 0 \leq \Delta\alpha_1 < \pi - 2\alpha_1 \\ 0 \leq \Delta\alpha_2 < \pi - 2\alpha_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Розглянемо Випадок 1 і проведемо аналіз зміни виду умов торкання в залежності від взаємних значень кутів $\Delta\beta_k$, $\Delta\gamma_k$.

Грань $G^1 : (v_1^3, v_1^4) \div (v_2^1, v_2^2)$ при $\Delta\alpha_1 = \text{var}$, $\Delta\alpha_2 = \text{var}$ і $\Delta\beta_1 - \Delta\beta_2 \geq 0$ розбивається (точніше, розшаровується) на два нелінійних різноманіття: $\tilde{G}_1^1 : (v_1^3, v_1^4) \div v_2^1$ і $\tilde{G}_2^1 : v_1^4 \div (v_2^1, v_2^2)$, в той же час гіперповерхня $(v_1^1, v_1^2) \div (v_2^3, v_2^4)$ розбивається на дві гладких ділянки – $\tilde{G}_4^3 : (v_2^3, v_2^4) \div v_1^2$ і $\tilde{G}_1^3 : v_2^3 \div (v_1^1, v_1^2)$.

На рис. 2.5в товстою ламаною суцільною лінією показані перерізи Π_1^1 , Π_2^1 , Π_1^3 , Π_4^3 різноманіть \tilde{G}_1^1 , \tilde{G}_2^1 , \tilde{G}_1^3 , \tilde{G}_4^3 гіперплощиною $(0, 0, \Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2)$ відповідно.

При цьому товстою штрих-пунктирною лінією показані перерізи Π_3^1

Π_4^1 , Π_2^3 , Π_3^3 , різноманіть \tilde{G}_3^1 , \tilde{G}_4^1 , \tilde{G}_2^3 , \tilde{G}_3^3 гіперплощиною $(0, 0, \Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2)$ відповідно. Ці гіперповерхні існують, проте лежать в області негативних значень Φ -функції.

При $\Delta\beta_1 - \Delta\beta_2 < 0$ умова торкання $(v_1^3, v_1^4) \div (v_2^1, v_2^2)$ розбивається на $(v_1^3, v_1^4) \div v_2^2$ і $v_1^3 \div (v_2^1, v_2^2)$, умова торкання $(v_1^3, v_1^4) \div (v_2^1, v_2^2)$ розбивається на $(v_2^3, v_2^4) \div v_1^1$ і $v_2^4 \div (v_1^1, v_1^2)$.

При $\Delta\beta_1 = \Delta\beta_2$ знову є торкання виду сторона (v_1^3, v_1^{4*}) – сторона (v_2^1, v_2^{2*}) (відповідно) $(v_1^3, v_1^4) \div (v_2^1, v_2^2)$.

Умова торкання: $G^4: (v_1^2, v_1^3) \div (v_2^1, v_2^4)$ при $\Delta\alpha_1 = \text{var}$, $\Delta\alpha_2 = \text{var}$ і $\Delta\gamma_1 - \Delta\gamma_2 \geq 0$ розширюється на два нелінійних різноманіття: $\tilde{G}_4^4: v_1^3 \div (v_2^1, v_2^{4*})$ і $\tilde{G}_2^4: v_2^{4*} \div (v_1^2, v_1^3)$.

При $\Delta\gamma_1 - \Delta\gamma_2 \leq 0$ грань $G^4: (v_1^2, v_1^3) \div (v_2^1, v_2^4)$ розбивається на два нелінійних різноманіття: $\tilde{G}_4^4: v_2^1 \div (v_1^2, v_1^3)$, $\tilde{G}_3^4: (v_2^1, v_2^{4*}) \div v_1^{2*}$.

Аналогічна методика застосовується для аналізу інших варіантів. У будь-якому випадку для побудови Φ -функції необхідно мати аналітичний опис всіх 16-ти варіантів торкань (рис. 2.4).

Побудуємо рівняння $f_p^j(u_1, \Delta\alpha_1, u_2, \Delta\alpha_2) = 0$ (2.19) поверхні $\tilde{G}_1^1: (v_1^3, v_1^{4*}) \div v_2^1$.

Зафіксуємо:

$$X_1 = x_1^3 - x_2^1; \quad Y_1 = y_1^3 - y_2^1; \quad X_2 = x_1^{4*} - x_2^1; \quad Y_2 = y_1^{4*} - y_2^1$$

$$X_1 = \frac{S_1}{4d_1^1} \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{S_2}{4d_2^1} \frac{1}{\sin \alpha_2}$$

$$Y_1 = \frac{S_1}{4d_1^1} \frac{1}{\cos \alpha_1} + \frac{S_2}{4d_2^1} \frac{1}{\cos \alpha_2}$$

$$X_2 = -\frac{S_1}{2d_1^1} \frac{\cos(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} + \frac{S_2}{4d_2^1} \frac{1}{\sin \alpha_2};$$

$$Y_2 = -\frac{S_1}{2d_1^1} \frac{\sin(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} + \frac{S_2}{4d_2^1} \frac{1}{\cos \alpha_2};$$

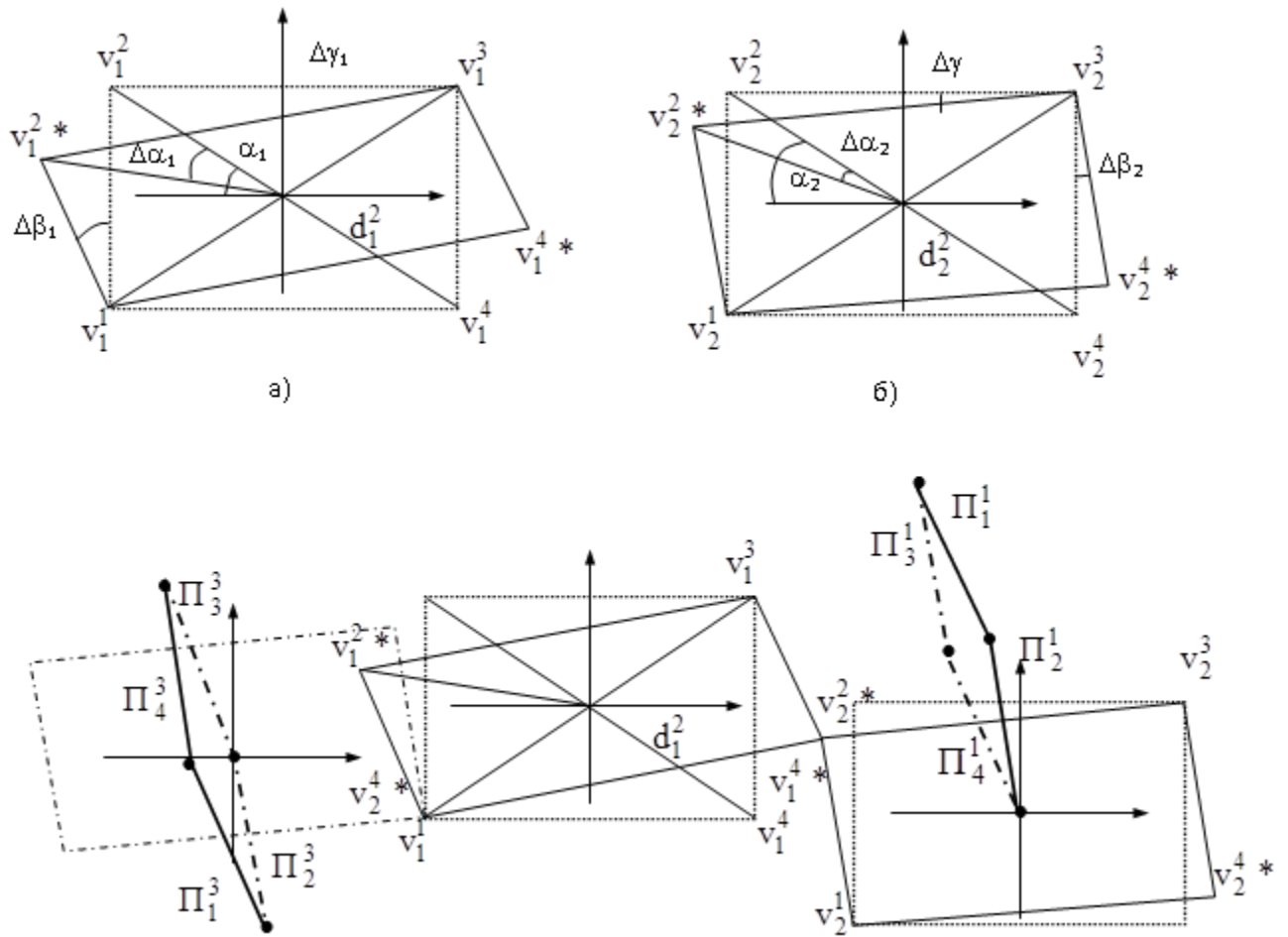


Рисунок 2.5 – Переріз 0-рівня $\Phi(u_1, \Delta\alpha_1, u_2, \Delta\alpha_2)$ -функції гіперплощиною $(0, 0, \Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2)$

$$\tilde{A}_1^1(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2) = Y_1 - Y_2 = \frac{S_1}{2d_1^1} \left[\frac{\sin(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} + \frac{1}{2\cos\alpha_1} \right]; \quad (2.22)$$

$$\tilde{B}_1^1(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2) = X_2 - X_1 = -\frac{S_1}{2d_1^1} \left[\frac{1}{2\sin\alpha_1} + \frac{\cos(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} \right]; \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^1(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2) = & -X_1 \tilde{A}_1^1 - Y_1 \tilde{B}_1^1 = \\ & -\frac{S_1}{8d_1^1} \left[\frac{\sin(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} + \frac{1}{2\cos\alpha_1} \right] \left(\frac{S_1}{d_1^1} \frac{1}{\sin\alpha_1} + \frac{S_2}{d_2^1} \frac{1}{\sin\alpha_2} \right) + \end{aligned}$$

$$\frac{S_1}{8d_1^1} \left[\frac{1}{2 \sin \alpha_1} + \frac{\cos(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} \right] \left(\frac{S_1}{d_1^1} \frac{1}{\cos \alpha_1} + \frac{S_2}{d_2^1} \frac{1}{\cos \alpha_2} \right) =$$

$$\frac{S_1}{2d_1^1} \left[\frac{\cos(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} Y_1 - \frac{\sin(\pi - \alpha_1 - \Delta\alpha_1)}{\sin(2\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} X_1 \right] \quad (2.24)$$

Рівняння інших гладких частин поверхні \tilde{G} , що представляє 0-рівень Φ -функції двох розглянутих об'єктів визначаються аналогічно.

Тоді Φ -функція двох багатокутників із змінними метричними характеристиками і просторовою формою зазначеного типу має вигляд

$$\Phi(x_1, y_1, \Delta\alpha_1, x_2, y_2, \Delta\alpha_2) = \max_{j=1,4} \max_{p=1,4} \{f_p^j(u_1, \Delta\alpha_1, u_2, \Delta\alpha_2)\}. \quad (2.25)$$

2.2 Побудова Φ -функції об'єктів, для яких в процесі розміщення можлива зміна топологічної розмірності

Продовжимо вивчення класу 2D primary objects з урахуванням можливості зміни метричних характеристик.

Розглянемо два перших типи 2D primary objects (див. п.п. 1.1.), а саме точкові множини з прямокутною і круговою межею – прямокутник T_r з довжиною і шириною (a_r, b_r) і еліпс T_c з великою і малою осями (a_c, b_c) . Нехай метричні характеристики (a_h, b_h) розглянутих об'єктів є змінними величинами:

$$0 \leq a_h \leq a_h^{\max}, \quad 0 \leq b_h \leq b_h^{\max}, \quad h \in \{r, c\}.$$

Об'єкти T_h задані у власній системі координат X_h, O_h, Y_h , початок якої збігається з полюсом об'єкта (нормалізоване положення).

Введемо наступні попередні зауваження.

Розглянемо афінне відображення \mathfrak{Z} , тобто безперервне відображення

$$\mathfrak{Z}_{\lambda, \beta}: T_h \xrightarrow{\mathfrak{Z}_{\lambda, \beta}} \Psi, \quad \text{точкової множини } T_h \in \mathbb{R}^2 \text{ на точкову безліч } \Psi = \mathfrak{Z}_{\lambda, \beta} T_h \subset \mathbb{R}^2 \text{ виду}$$

$$\Psi = \{z = (x_\Psi, y_\Psi) \in \Psi \mid x_\Psi = \lambda x_h, y_\Psi = \beta y_h, 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, (x_h, y_h) \in T_h\}.$$

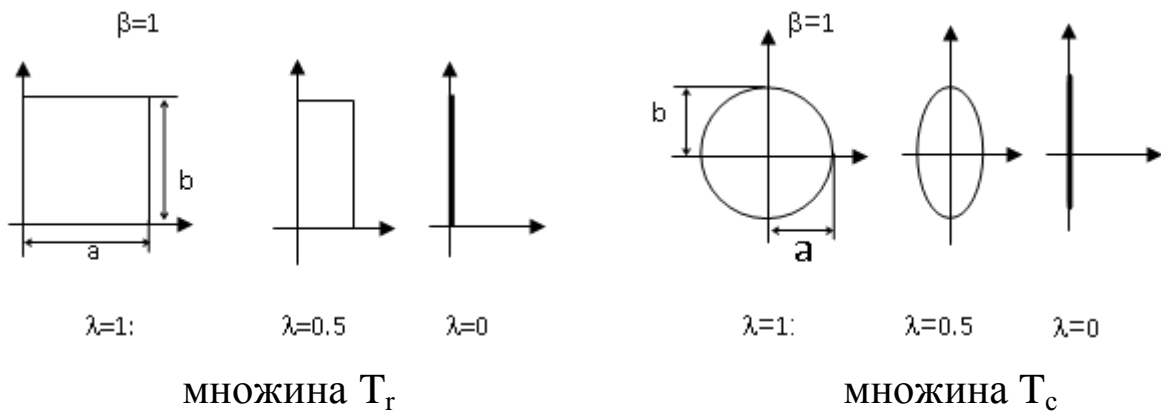
Властивість 2.1. Відображення \mathfrak{Z} безперервно.

Властивість 2.2. Для зазначеного діапазону зміни параметрів λ і β відображення \mathfrak{Z} є стисненням.

Так, результатом Ψ відображення $\mathfrak{Z}_{\lambda,1}$, виду

$$\mathfrak{Z}_{\lambda,1}: T_h \xrightarrow{\mathfrak{Z}_{\lambda,1}} \Psi; \Psi = \{z=(x_\Psi, y_\Psi) \in \Psi \mid x_\Psi = \lambda x_h, y_\Psi = \beta y_h, 0 \leq \lambda \leq 1, \beta = 1, (x_h, y_h) \in T_h\}$$

є прямокутник Ψ_r або еліпс Ψ_c відповідно до типу вихідного об'єкта T_r і T_c , а при $\lambda=0$ об'єкт Ψ – відрізок (рис.2.6, б).



а)

б)

Рисунок 2.6 – Відображення $\mathfrak{Z}_{\lambda,1}$

Результатом Ψ відображення $\mathfrak{Z}_{1,\beta}$ виду

$$\mathfrak{Z}_{1,\beta}: T_h \xrightarrow{\mathfrak{Z}_{1,\beta}} \Psi; \Psi = \{z=(x_\Psi, y_\Psi) \in \Psi \mid x_\Psi = \lambda x_h, y_\Psi = \beta y_h, \lambda = 1, 0 \leq \beta \leq 1, (x_h, y_h) \in T_h\}$$

також є прямокутник Ψ_r або еліпс Ψ_c відповідно до типу вихідного об'єкта T_r і T_c , а при $\beta=0$ об'єкт Ψ – відрізок (рис.2.7 а,б).

Рівняння $F_T \Psi_c$ в канонічному вигляді для випадку, якщо об'єкт Ψ_c знаходиться в нормалізованому стані:

$$(\beta b_c)^2 x^2 + (\lambda a_c)^2 y^2 = (\lambda a_c)^2 (\beta b_c)^2. \quad (2.26)$$

При $\lambda=0, \beta \neq 0$ рівняння (2.26) має вигляд $x = 0$, тобто крива другого порядку вироджується у відрізок на осі OY (рис. 2.6б, випадок $\lambda = 0$).

При $\lambda \neq 0, \beta = 0$ рівняння (2.26) має вигляд $y = 0$, тобто крива другого порядку вироджується у відрізок на осі OX (рис. 2.7б, випадок $\beta = 0$).

При $\lambda=0, \beta=0$ отримуємо одну точку $(0,0)$ (пара уявних прямих або вироджений еліпс). При $\lambda=\beta$ відображення $\mathfrak{Z}_{\lambda,\beta}$ – гомотетія.

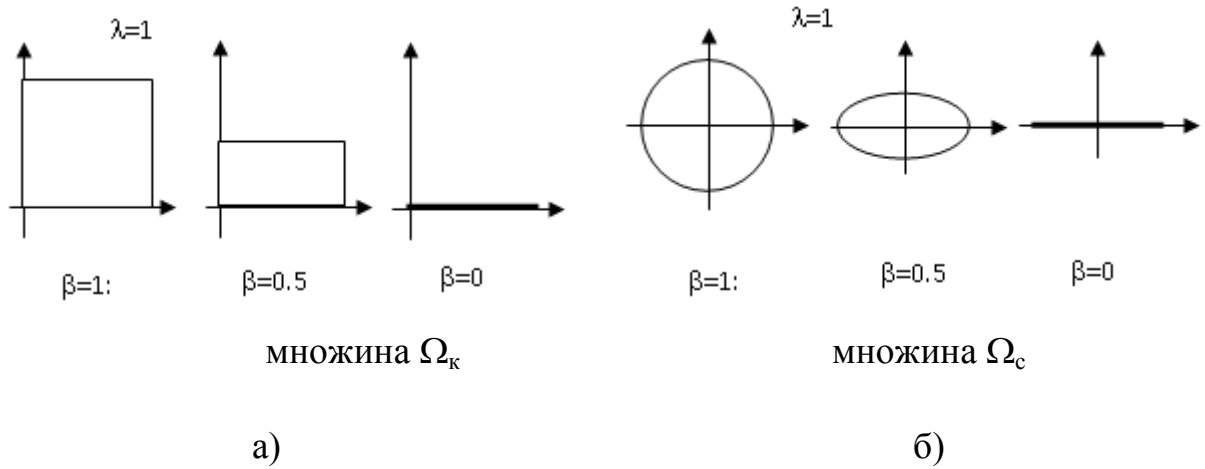


Рисунок 2.7 – Відображення $\mathfrak{Z}_{1,\beta}$

Відображення $\mathfrak{Z}_{0,0}$ переводить вихідну множину T_h в точку, тобто $\Psi_{0,0}=\mathfrak{Z}_{0,0}T_h$ початок власної системи координат даного об'єкту.

Позначимо $FrT=\{(x_{FrT}, y_{FrT})\}$ – множину граничних точок об'єкту T .

Твердження 2.1. Відображення $\mathfrak{Z}_{\lambda,\beta}$ еквівалентно відображенню $\mathfrak{Z}_{a,b}$ виду

$$\mathfrak{Z}_{a,b}: T \xrightarrow{\mathfrak{Z}_{a,b}} \Psi;$$

$$\Psi=\{z=(x_\Psi, y_\Psi) \in \Psi | x_{Fr\Psi}=\lambda x_{FrT}, y_{Fr\Psi}=\beta y_{FrT}, 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

Доказ. Відображення $\mathfrak{Z}_{a,b}$, визначене на безлічі граничних точок об'єкту T_h , формує межу об'єкта Ψ_h , тобто є мажорируючим для відображення $\mathfrak{Z}_{\lambda,\beta}$. Як і відображення $\mathfrak{Z}_{\lambda,\beta}$, $\mathfrak{Z}_{a,b}$ є безперервним, що, поряд з властивістю зв'язності точкової множини T_h , визначає справедливність цього твердження.

Результати застосування відображення $\mathfrak{Z}_{a,b}$ до вихідного об'єкту T_h при зміні обох метричних характеристик можна уявити як відповідні перерізи чотиривимірного об'єкта $\Omega_h^4(x, y, a, b) \subset \mathbb{R}^4$.

Перерізи $T_h^3 \subset \mathbb{R}^3$ вихідного об'єкта деякими гіперплощинами $b=b_\delta, a=a_\delta$ наведені на рис. 2.8. У просторі \mathbb{R}^3 об'єкт T_r^3 являє собою так званий клин, а множина T_c^3 – особливий вид конуса.

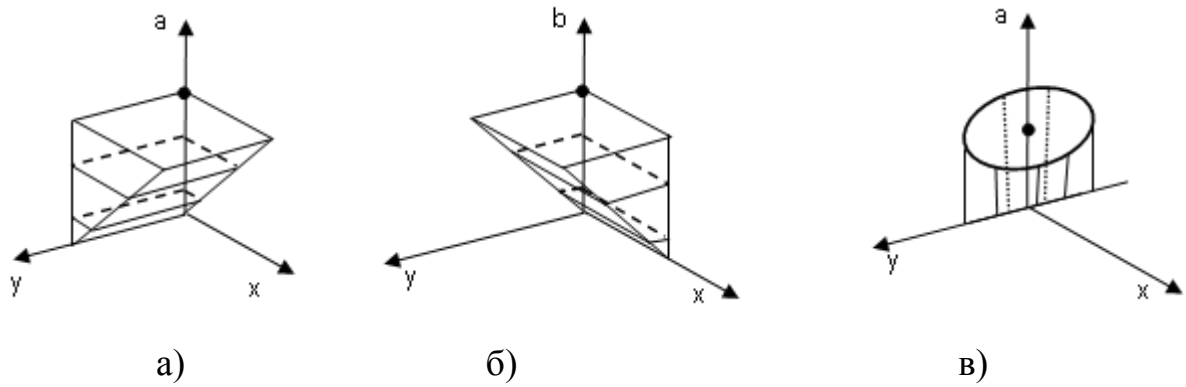


Рисунок 2.8 – Перерізи об'єкта $\Omega_h^4(x_h, y_h, a_h, b_h)$ в нормалізованому стані

а) T_r^3 при $b = b_\delta$, б) T_r^3 при $a = a_\delta$, в) T_c^3 при $b = b_\delta$

Нехай $v_h = (x_h, y_h, a_h, b_h)$.

Межа об'єкта $\Omega_r^4(v_r)$ є множина гіперграней $\Gamma_k(v_r)$, $k = \overline{1,8}$, які в сукупності складають $Fr \Omega_r^4(v)$. Гіперповерхні $F_k(v)$, що містять гіперграні $\Gamma_k(v)$ об'єкта $\Omega_r^4(v)$, задаються рівняннями $f_k(v) = 0$ виду

$$f_1(v_r) = -a_r + a_r^{\max}, f_2(v_r) = -x_r, f_3(v_r) = x_r - a_r, f_4(v_r) = -b_r + b_r^{\max},$$

$$f_5(v_r) = y_r, f_6(v_r) = y_r - b_r, f_7(v_r) := -a_r, f_8(v_r) := -b_r.$$

При цьому система нерівностей $f_k(v_r) \leq 0$, $k = \overline{1,8}$, визначає точкову множину.

Тоді ніде не щільну множину Ψ можна інтерпретувати як гіперребро об'єкта $\Omega_r^4(v_r)$, а множина $\Psi_{0,0}$ є його вершиною.

Межа об'єкта $\Omega_c^4(v_c)$ містить нелінійні різноманіття і задається множиною поверхонь, які визначаються рівняннями $f_k(v_c) = 0$, $k = \overline{1,6}$ виду

$$f_1(v_c) = -a_c + a_c^{\max}, f_2(v_c) = -x_c, f_3(v_c) = x_c - a_c, f_4(v_c) = -b_c + b_c^{\max},$$

$$f_5(v_c) = y_c, f_6(v_c) = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2.$$

Тоді функція $F_h: R^4 \rightarrow R^1$, що задає об'єкт $\Omega_h^4(x_h, y_h, a_h, b_h)$, така, що $F_h(v_h) = 0$ – рівняння $Fr T_h$, причому

$$F_h(v_h) = \begin{cases} > 0, & \text{если } v_h \notin T_h \\ \leq 0, & \text{если } v_h \in T_h \end{cases}$$

має вигляд: $F_h(v_h) = \max_{k=1,2,\dots,K} \{f_k\}$.

Твердження 2.2 Замкнута точкова множина $\Omega_h^4(v)$ є опуклою.

Опуклість множини $\Omega_h^4(v)$ впливає безпосередньо з безперервності відображення $\mathfrak{Z}_{a,b}$, результатом якого є опукла множина $\Psi = \text{Fr } \Omega_h^4(v)$.

Множину $\Omega_r^4(x, y, a, b)$ будемо називати політопом, а множину $\Omega_c^4(x, y, a, b)$ гіперконусом. З твердження 2.2 безпосередньо впливає, що точкові множини $\Omega_h^4(v)$ є однозв'язними.

Очевидно, при наявності набору гіперплощин (напівпросторів), що визначають 4-політоп $\Omega_r^4(v_r)$, завжди можна побудувати множину вершин даного 4-політопа.

Властивість 2.3. Побудова основних обмежень на параметри розглянутих точкових об'єктів $\Omega_h^4(v)$ має сенс в області $0 \leq a_1 \leq a_{1\max}$, $0 \leq b_1 \leq b_{1\max}$, і $0 \leq a_2 \leq a_{2\max}$, $0 \leq b_2 \leq b_{2\max}$ тобто в 8-призмі $P \subset \mathbb{R}^8$.

Справедливість цієї властивості впливає з постановки задачі.

Побудуємо Φ -функцію таких пар об'єктів:

Задача 1. Політоп $\Omega_{r_1}^4(v_1)$ – політоп $\Omega_{r_2}^4(v_2)$.

Задача 2. Гіперконус $\Omega_{c_1}^4(v_1)$ – гіперконус $\Omega_{c_2}^4(v_2)$.

Імплементация підходу [87] до задачі 1 дозволяє отримати такий вигляд $\Phi(v_1, v_2)$ -функції політопів $\Omega_{r_1}^4(v_1)$ і $\Omega_{r_2}^4(v_2)$

$$\Phi(v_1, v_2) = \max \{f_1(v_2-v_1), f_2(v_2-v_1), \dots, f_m(v_2-v_1)\}, \quad (2.27)$$

де $f_i(v_2-v_1) = 0$, $i=1,2,\dots,m$ – аналітичний опис гіперповерхонь, які задають 0-рівень $\Phi(v_1, v_2)$ -функції.

При цьому, якщо $v_1=0$, набір гіперграней $f_i(v_2)$, $i = 1, 2, \dots, m$, визначає межу суми Мінковського – об'єкта $\Omega_{r_1,2}(0)$ виду

$$\Omega_{r_1,2}(0) = \Omega_{r_1}(0) \oplus (-1)\Omega_{r_2}(0)$$

Перерізи $\Omega_{r_1,2}(0)$ показані на рис. 2.9.

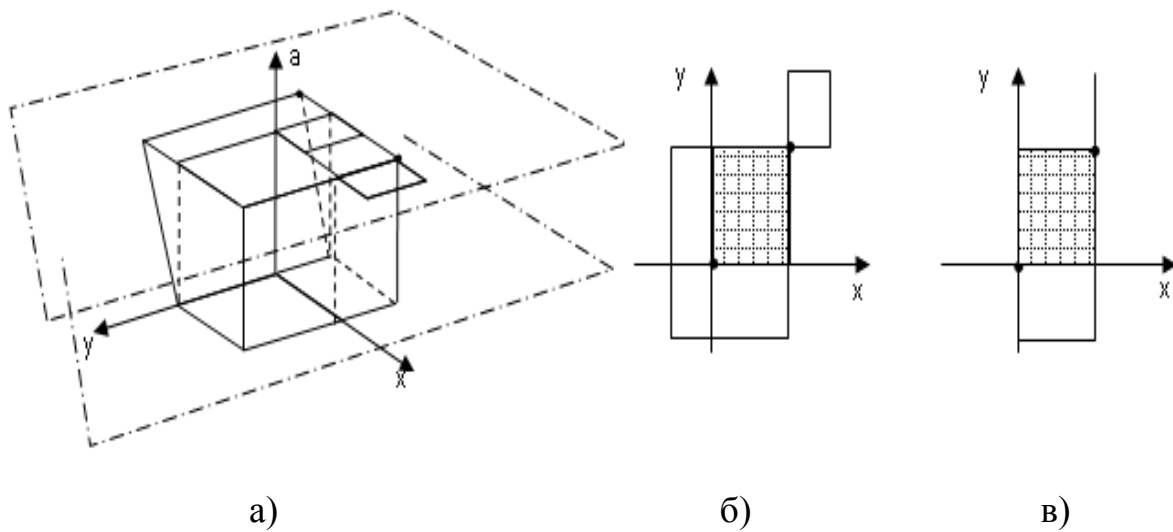


Рисунок 2.9 – Різні перерізи об'єкта $\Omega_{r_12}(0)$

а) $\Omega_{r_12}^3(0) \in \mathbb{R}^3$ при $b_2 = \text{const}$,

б) $\Omega_{r_12}^2(0) \in \mathbb{R}^2$ при $b_2 = b_{2\text{max}}$, $a_2 = a_{2\text{max}}$,

в) $\Omega_{r_12}^2(0) \in \mathbb{R}^2$ при $b_2 = b_{2\text{max}}$, $a_2 = 0$.

Для задачі 2 0-рівень Φ -функції пари $\Omega_{c_1}^4(v_1) - \Omega_{c_2}^4(v_2)$ містить як гіперповерхні так і нелінійне різноманіття $f_1 = 0$, де функція $f_1(x_1, y_1, a_1, b_1, x_2, y_2, a_2, b_2)$ має вигляд:

$$(b_1 + b_2)^2 (x_1 - x_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 (y_1 - y_2)^2 - (a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2)^2.$$

На рис. 2.10а наведено переріз 0-рівня $\Phi(0,0,0,0, x_2, y_2, a_2, b_2)$ -функції площиною $b_2 = \text{const}$.

Таким чином, побудова умов взаємного неперетинання об'єктів із змінними метричними характеристиками може бути зведена до задачі побудови поверхонь рівня Φ -функції об'єктів з фіксованими метричними характеристиками в просторі більшої розмірності.

При цьому всі властивості класичної Φ -функції зберігаються, тобто Φ -функція є визначеною і безперервною функцією в 8-призмі Π .

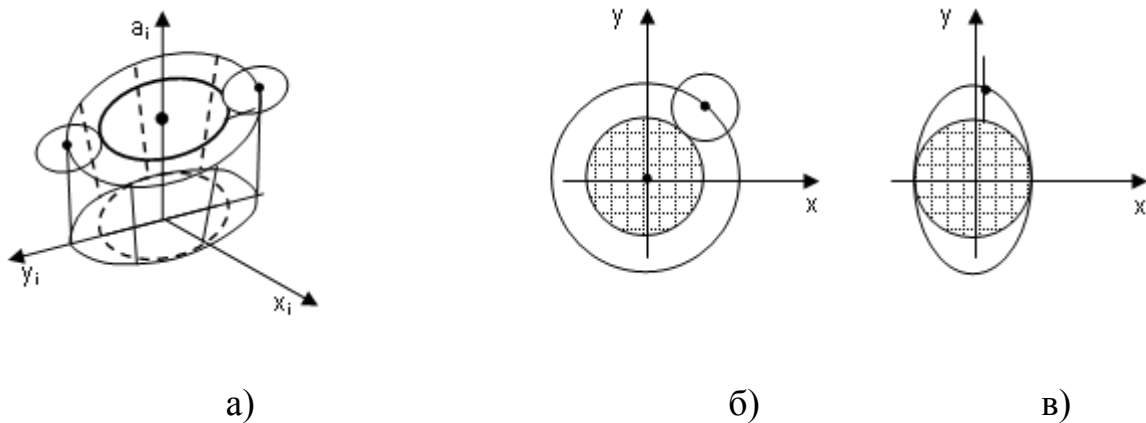


Рисунок 2.10 – Різні перерізи об'єкта $\Omega_{r_{12}}(0)$

а) $\Omega_{c_{12}}^3(0) \in \mathbb{R}^3$ при $b_2 = \text{const}$,

б) $\Omega_{c_{12}}^2(0) \in \mathbb{R}^2$ при $b_2 = b_{2 \max}$, $a_2 = a_{2 \max}$,

в) $\Omega_{c_{12}}^2(0) \in \mathbb{R}^2$ при $b = b_{2 \max}$, $a_2 = 0$.

2.3 Формалізація умов розміщення з урахуванням впливу параметрів розміщення на метричні характеристики об'єктів

Знову розглянемо наступні об'єкти:

- прямокутник Ω з довжиною Z і шириною W , заданий в загальній системі координат XOY ;
- об'єкт $\Omega^* = \text{cl}(\mathbb{R}^2/\Omega)$;
- прямокутник $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, з довжиною і шириною (a, b) .

Нехай в кожній точці $\omega(x, y)$ області Ω має місце залежність виду:

$$\left| M_x^Y \right| = kx \left| M_0^Y \right|, \quad (2.28)$$

де M_x^Y – одиничний відрізок по осі Y , $\left| M_0^Y \right|$ довжина одиничного відрізка на осі OY ($x = 0$), k – коефіцієнт пропорційності.

Тоді метрична характеристика b об'єкта Γ з параметрами розміщення $u = (x, y)$, є величиною, змінною за законом (рис.2.11)

$$b = b_0(1 + kx). \quad (2.29)$$

Така задача виникає при плануванні ресурсів проекту (див. Задача 6

розд. 1.1).

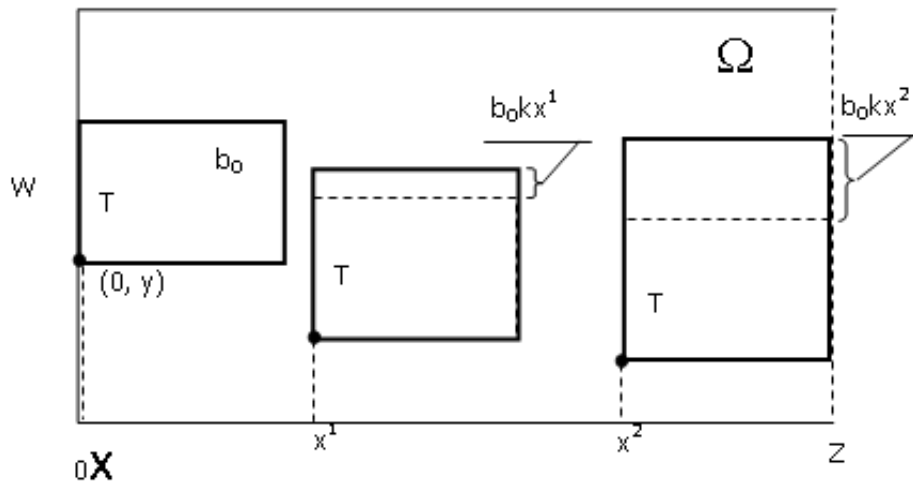


Рисунок 2.11 – Зміна метричної характеристики b в залежності від параметра розміщення x

Кожна робота T_i проекту $T = \{T_i\}$ представляється як прямокутник T_i (a_i, b_i) в просторі ресурсів: a_i – тривалість роботи, b_i – вартість роботи. При постановці задачі враховується концепція оцінки вартості грошей в часі – вартість грошей з плином часу змінюється з урахуванням норми прибутковості на грошовому ринку і ринку цінних паперів – залежить від моменту часу виконання роботи. У процесі порівняння вартості грошових коштів при їх вкладенні і поверненні прийнято використовувати два основних поняття: PV (Present Value) – справжня (сучасна) вартість грошей і FV (Future Value) – майбутня вартість грошей. Тоді коефіцієнт пропорційності k має сенс показника нарощення грошей $V(t)$: $FV_t = PV \cdot V(t)$, при цьому $V(t) > 1$: в даному контексті вісь OX – вісь часу.

$\Phi(x, y)$ -функція пари об'єктів (Ω^*, T) , що описує умову (1.2):

$$\Phi(x, y) = \min_{h=1,4} f_0^h(x, y),$$

задається системою лінійних нерівностей виду:

$$f_0^h(x, y) \geq 0, h = \overline{1,4}, \text{ де } f_0^1(x, y) = -x, \quad f_0^2(x, y) = z - x - a, \quad f_0^3(x, y) = -y, \\ f_0^4(x, y) = W - y - b(1 + kx).$$

Φ -функція об'єктів (T_1, T_2) , що визначає умову (1.3), має вигляд:

$$\Phi(u_1, u_2) = \max_{s=1,4} f_{12}^s(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

і задається набором нерівностей

$$F(u_1, u_2) := \langle f_{12}^s(u_1, u_2) \geq 0, s = \overline{1,4},$$

$$\begin{aligned} \text{де } f_{12}^1(u_1, u_2) &= x_2 - x_1 - a_1, \quad f_{12}^2(u_1, u_2, a_1, a_2) = y_2 - y_1 - b_1(1 + kx), \\ f_{12}^3(u_1, u_2) &= x_1 - x_2 - a_2, \quad f_{12}^4(u_1, u_2) = y_1 - y_2 - b_2(1 + ky). \end{aligned}$$

Зауваження 2.4. Реалізація функціональної залежності (2.29) метричних характеристик об'єкта розміщення від параметрів розміщення не виводить об'єкт з класу початкових просторових форм.

2.4 Побудова Ф-функції опуклих об'єктів у задачі розміщення в анізотропній області

У розділі 1.1 розглянута постановка Задачі 5 розміщення в анізотропній області. У роботах [57, 58] виділені основні геометричні обмеження задачі.

Однак, отриманий в [57, 58] аналітичний та алгоритмічний опис межі області допустимих рішень Задачі 5 в Декартовій системі координат відрізняється надмірною складністю. Цей факт є перешкодою на шляху побудови ефективного обчислювального методу вирішення задач практичної розмірності. Тому в даному розділі розглядається аналітичний опис геометричних обмежень на розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат.

Отже, розглянемо наступні об'єкти:

- неопуклий багатокутник $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, заданий в загальній полярній системі координат (рис. 2.12 а);
- об'єкт $\Omega^* = \text{cl}(\mathbb{R}^2/\Omega)$;
- опуклий багатокутник $T_1(u_1) = T_1(\rho_1, \varphi_1)$ (рис. 2.12 б) з полярними параметрами розміщення $u_1 = (\rho_1, \varphi_1)$, пов'язаними з полюсом O_1 об'єкта T_1 (початком власної полярної системи координат), причому мають місце співвідношення виду

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

де $v_1 = (x_1, y_1)$ – параметри трансляції O_1 , $O_1 \in \text{int } T_1$.

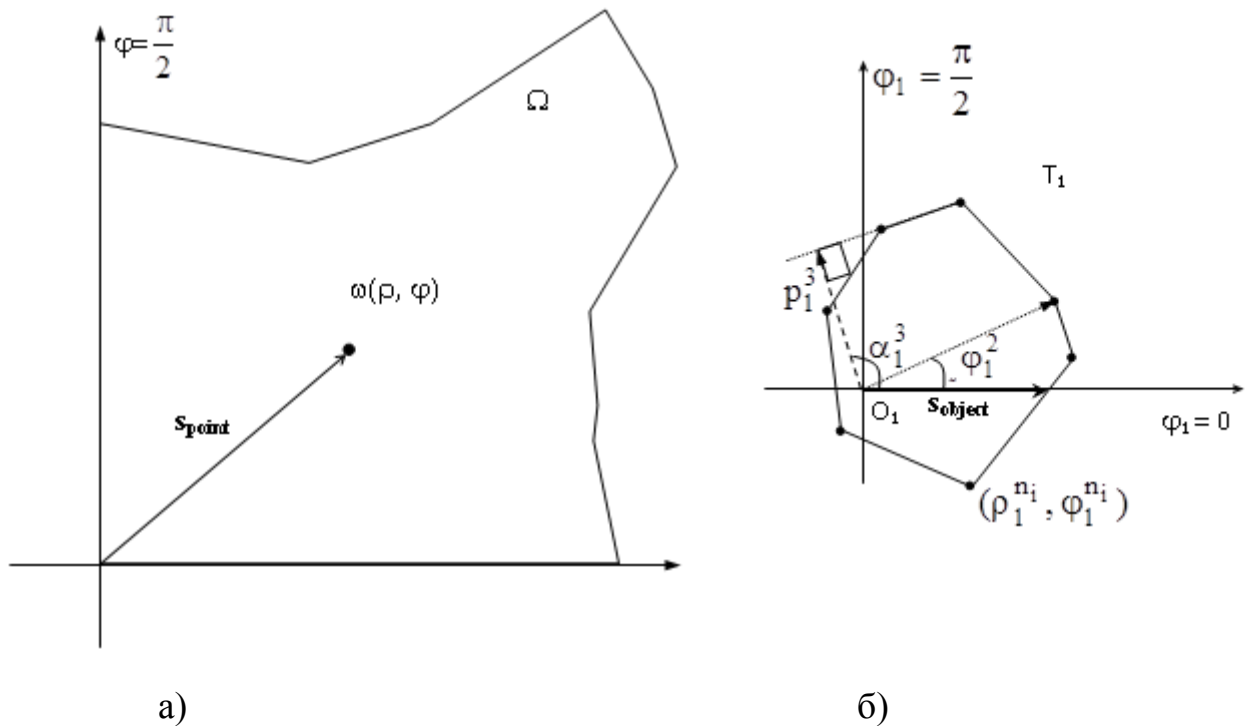


Рисунок 2.12 – Анізотропна область розміщення Ω (а) і об'єкт розміщення T_1 (б)

Об'єкт T_1 задається впорядкованим (обхід проти годинникової стрілки) набором $\{(\rho_1^n, \varphi_1^n)\}$, $n = \overline{1, n_1}$ координат його вершин в $\rho_1 O_1 \varphi_1$ (рис. 2.12б), де – ρ_1^n відстань n -ої вершини багатокутника T_1 від полюса O_1 , φ_1^n – кут між полярною віссю і променем, що з'єднує полюс O_1 і n -у вершину об'єкта T_1 .

Заданий також набір (ρ_1^k, α_1^k) , $k = \overline{1, n_1}$ відстаней ρ_1^k і α_1^k кутів між полярною віссю і нормаллю до прямої, що містить k -у сторону багатокутника.

Аналогічно, область Ω задається набором $\{(\rho^n, \varphi^n)\}$ координат його вершин $\{v_0^n\}$, $n = \overline{1, n_\Omega}$ і набором (ρ^k, α^k) , $k = \overline{1, n_\Omega}$.

Зауваження 2.5. Область Ω є анізотропною, тому в кожній точці $\omega(\rho, \varphi)$ області Ω напрямком s_{object} найменшою тягучістю T_1 повинен співпадати з напрямом анізотропії s_{point} області Ω : $s_{\text{object}} = s_{\text{point}}$.

Без втрати спільності припустимо, що напрямок вектора найменшої тягучісті s_{object} об'єкта T_1 (рис. 2.12б) збігається з позитивним напрямком осі $O_1\varphi_1$.

Зауваження 2.6. Так як $O_1 \in \text{int } T_1$, то $\rho_1 \neq 0, \varphi_1 \neq 0$.

Зауваження 2.7. Покладемо, що $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Тоді кожній парі значень відповідає одна і тільки одна точка області Ω .

Зауваження 2.8. Метричні характеристики області Ω і об'єкта T_1 вважаємо постійними.

2.4.1 Побудова умови торкання об'єкта T_1 області Ω

Розглянемо аналітичний опис умов торкання виду:

$$T_1 \subset \Omega, \quad \text{Fr } T_1 \cap \text{Fr } \Omega \neq \emptyset, \quad (2.30)$$

в полярній системі координат.

Для цього зробимо такі попередні зауваження. Рівняння прямої γ на площині в полярних координатах має вигляд:

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p, \quad (2.31)$$

де p – відстань від полюса до прямої, α – кут між полярною віссю і нормаллю до прямої γ , (ρ, φ) – поточні координати точки на γ (рис. 2.13).

Зауваження 2.9. Якщо простір R^2 , що містить пряму γ (2.31), ізотропний, то кут α – константа. Якщо має місце анізотропія, кут α стає змінною величиною (Зауваження 2.5).

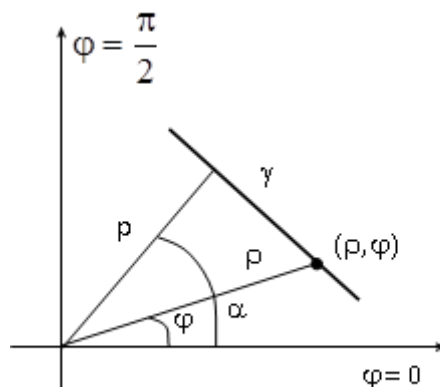


Рисунок 2.13 – Ілюстрація формули (2.31)

Розглянемо опис обмеження (2.30). В силу неопуклості області Ω можливі два типи торкання: «вершина об'єкта T_1 – сторона області Ω » (дотик 1-го типу) і «сторона об'єкта T_1 – вершина області Ω » (дотик 2-го типу).

Слід полюса (ρ_1, φ_1) об'єкта T_1 при торканні межі області Ω геометрично представляє нелінійну кусково-гладку поверхню $\Gamma(\rho_1, \varphi_1) \subset \mathbb{R}^2$.

Кожна гладка ділянка поверхні $\Gamma(\rho_1, \varphi_1) \subset \mathbb{R}^2$ задається рівнянням

$$f_{01}^{p(n,k)}(\rho_1, \varphi_1) = 0, \quad (2.32)$$

де поточний номер p є функція номерів k, n .

Далі будемо використовувати позначення p , причому $p = \overline{1, P}$, $P \leq n_1 + n_\Omega$.

Визначимо вид функції $f_{01}^p(\rho_1, \varphi_1)$ в залежності від типу торкання об'єкта і області.

Дотик 1-го типу: « n -а вершина (ρ_1^n, φ_1^n) об'єкта T_1 – k -а сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha^k) = p^k$ області Ω ».

Твердження 2.3. Аналітичний опис торкання 1-го типу: « n -а вершина (ρ_1^n, φ_1^n) об'єкта T_1 – k -а сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha^k) = p^k$ області Ω » задається рівнянням (2.32), функція $f_{01}^p(\rho_1, \varphi_1)$ якого має вигляд:

$$f_{01}^p(\rho_1, \varphi_1) =: \rho_1 \cos(\varphi_1 - \alpha^k) + \rho_1^n \cos(\varphi_1^n + \varphi_1 - \alpha^k) - p^k \quad (2.33)$$

Доказ. Нехай над об'єктом T_1 допустимі тільки афінні перетворення трансляції, тобто орієнтація власної системи координат $\rho_1 O_1 \varphi_1$ не змінюється (як наслідок – область Ω ізотропна). Тоді слід полюса O_1 об'єкта T_1 при торканні ним боку області Ω вершиною (ρ_1^n, φ_1^n) є прямою, рівняння якої має вигляд:

$$\rho_1 \cos(\varphi_1 - \alpha^k) = p^k - \rho_1^n \cos(\varphi_1^n - \alpha^k), \quad (2.34)$$

де величина $\rho_1^n \cos(\varphi_1^n - \alpha^k)$ є довжина проекції радіус-вектора на нормаль до k-ої сторони області Ω .

Для ізотропної області дана величина і вся права частина рівняння (2.34) є постійними (рис. 2.14). Пунктирною лінією на рис. 2.14 показана орієнтація об'єкта T при $\varphi_1 = 0$.

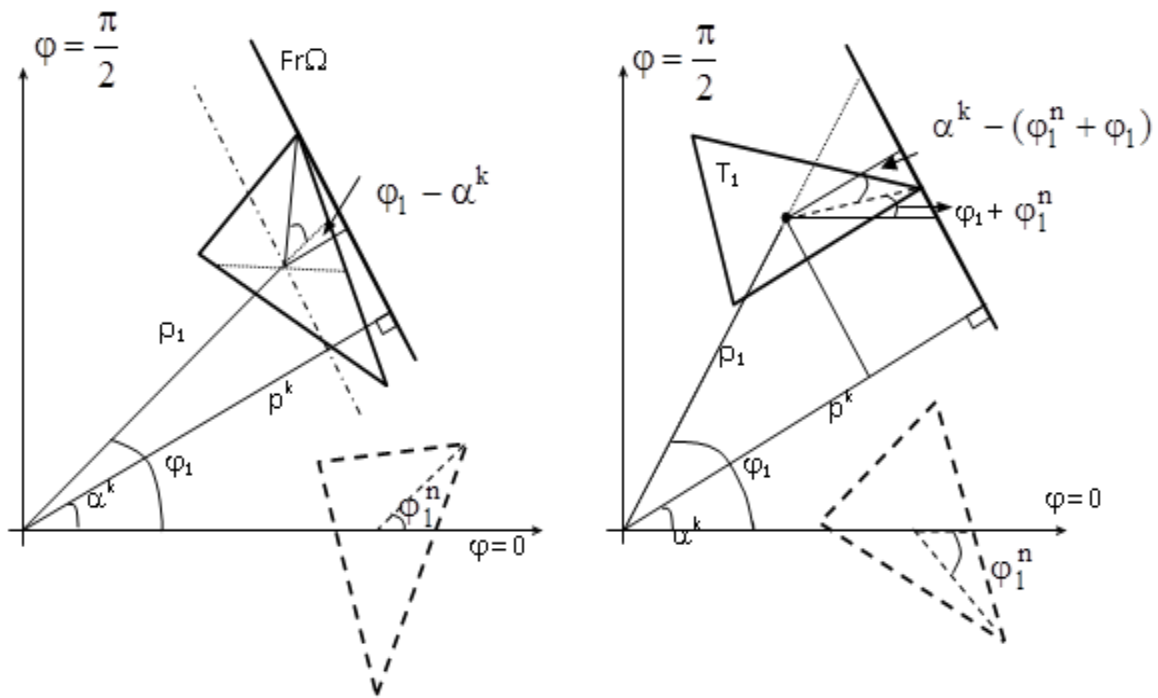


Рисунок 2.14 – Ілюстрація Твердження 2.3 для різних φ_1^n .

На рис. 2.15а і 2.15б показана реалізація торкання першого типу.

З урахуванням властивості анізотропії в рівнянні (2.34) величина $\rho_1^n \cos(\alpha_1^n - \alpha^k)$ стає змінною і (2.32) набуває вигляду (2.33), так як довжина проекції на нормаль до k-ої сторони області Ω є функція кута повороту φ_1 об'єкта T_1 .

Дотик 2-го типу: «n-а вершина області Ω — k-а сторона об'єкта T_1 ».

Твердження 2.4. Умова торкання 2-го типу: «n-а вершина (ρ^n, φ^n) області Ω – k-а сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_1^k) = \rho_1^k$ об'єкта T_1 » має вигляд:

$$\rho^n \cos(\varphi^n - \alpha_1^k - \varphi_1) = \rho_1 \cos \alpha_1^k + \rho_1^k \quad (2.35)$$

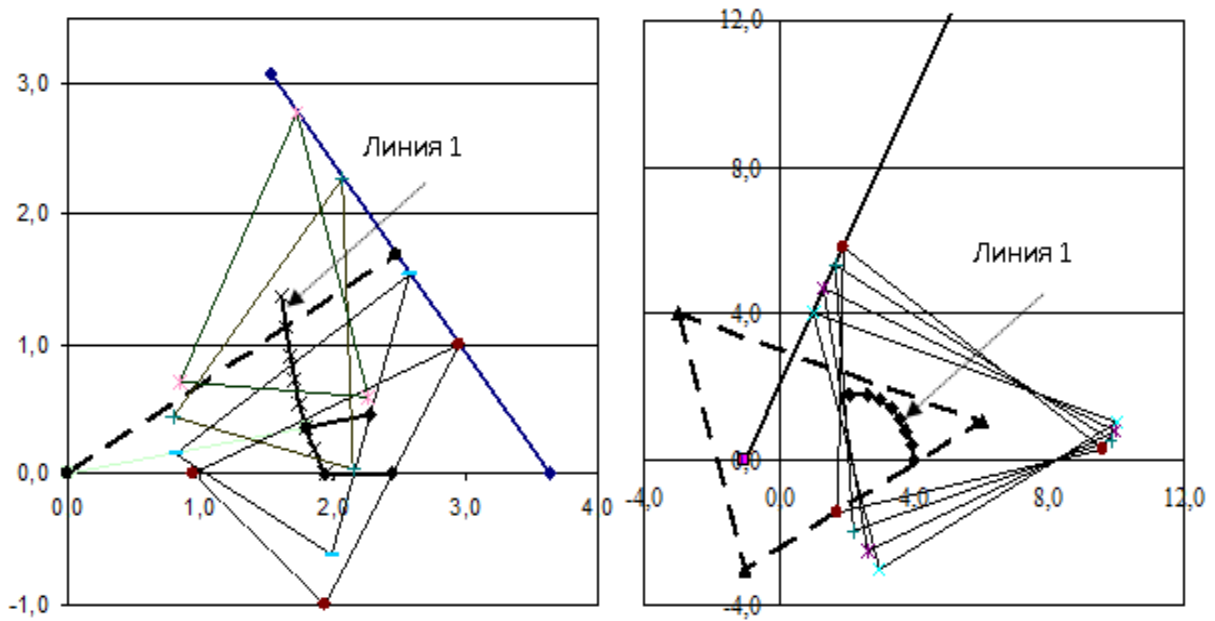


Рисунок 2.15 – Реалізація торкання першого типу – лінія 1

Доказ. При незмінній орієнтації системи $\rho_1 O_1 \varphi_1$ умова торкання (2.35) має вигляд:

$$\rho^n \cos(\varphi^n - \alpha_1^k) = \rho_1 \cos \alpha_1^k + p_1^k .$$

Ліва частина рівняння являє собою проекцію радіус-вектора ρ^n нерухомої вершини області Ω на нормаль до k -ої сторони об'єкта T_1 . При русі в області з урахуванням властивості анізотропії необхідно враховувати поворот нормалі на кут φ_1 (рис. 2.16), тому має місце рівність:

$$\rho^n \cos(\varphi^n - \alpha_1^k - \varphi_1) = \rho_1 \cos(\alpha_1^k + \varphi_1) + p_1^k$$

На рис 2.17 показана реалізація затвердження 2.4. Лінія 1 – шуканий слід полюса об'єкта T_1 при торканні вершини області Ω .

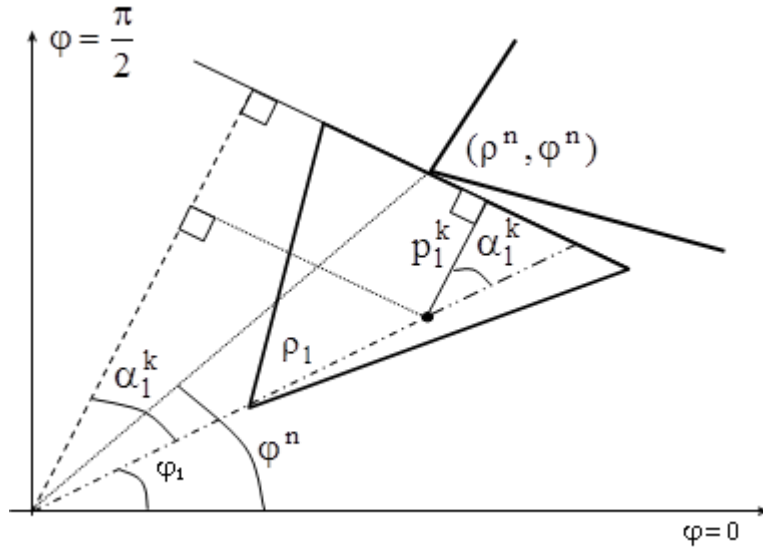


Рисунок 2.16 – Ілюстрація Твердження 2.4

Таким чином, функція $f_{01}^p(\rho_1, \varphi_1)$ в даному випадку приймає вид:

$$f_{01}^p(\rho_1, \varphi_1) = \rho^n \cos(\varphi^n - \alpha_1^k - \varphi_1) - \rho_1 \cos \alpha_1^k - p_1^k. \quad (2.36)$$

2.4.2 Формалізація умов торкання об'єктів T_1, T_2

Розглянемо аналітичний опис умов (1.12) торкання виду:

$$clT_1(u_1) \cap clT_2(u_2) \neq \emptyset, \quad int T_1(u_1) \cap int T_2(u_2) = \emptyset.$$

Умова торкання пари об'єктів (T_1, T_2) геометрично представляє нелінійну кусково-гладку гіперповерхню $\Gamma(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) \subset \mathbb{R}^4$.

Кожна гладка ділянка $\gamma_{12}^v(u_1, u_2)$ гіперповерхні задається рівнянням

$$f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = 0. \quad (2.37)$$

Загальна кількість \mathfrak{Q} , $v = \overline{1, \mathfrak{Q}}$ таких різноманіть $\gamma_{12}^v(u_1, u_2)$ задовольняє співвідношенню $\mathfrak{Q} \leq n_1 + n_2$.

Побудуємо рівняння (2.37) поверхні $\gamma_{12}^V(u_1, u_2)$ в залежності від типу торкання об'єктів.

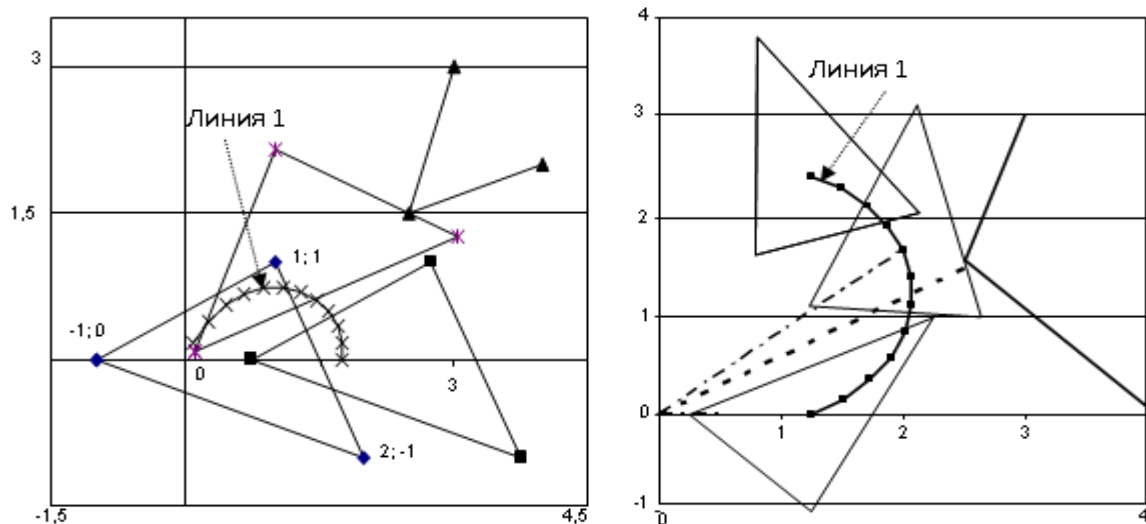


Рисунок 2.17– Реалізація торкання 2-го типу об'єкта T_1 області Ω

Дотик 1-го типу: «вершина (ρ_2^n, φ_2^n) об'єкта T_2 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_1^k) = \rho_1^k$ об'єкта T_1 ».

Затвердження 2.5. Умова торкання 1-го типу: «вершина (ρ_2^n, φ_2^n) об'єкта T_2 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_1^k) = \rho_1^k$ об'єкта T_1 » має вигляд:

$$\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_1^k) = \rho_1 \cos \alpha_1^k + \rho_1^k + \rho_2^n \cos(\varphi_2^n + \varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_1^k) \quad (2.38)$$

де $\alpha_1^k, \rho_1^k, \rho_2^n, \varphi_2^n$ – константи.

Доказ. Розглянемо деяку точку $(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) \in \Gamma$, що задає дотик об'єктів T_1 і T_2 . Припустимо, що параметри (ρ_1, φ_1) об'єкта T_1 фіксовані. На рис 2.18 представлений відповідний переріз $\Gamma^2 \subset \mathbb{R}^2$ поверхні Γ . У цьому випадку рівняння торкання без урахування анізотропії області розміщення має вигляд

$$\rho_2 \cos(\varphi_2 - (\alpha_1^k + \varphi_1)) = p, \quad (2.39)$$

де p – нормаль до прямої Γ^2 .

Пряма Γ^2 паралельна k -й стороні об'єкта T_1 і містить полюс об'єкта T_2 за умови їх торкання, таким чином $\vec{p} \parallel \vec{p}_1^k$.

Беручи до уваги властивість анізотропії області Ω , змінність координат n -ої вершини T_2 в загальній системі координат, уточнимо вид нормалі p (рис. 2.18):

$$p = p_1 + p_2 + p_3,$$

де $p_1 = \rho_1 \cos \alpha_1^k$, $p_2 = \rho_1^k$, $p_3 = \rho_2^n \cos(\varphi_2^n + \xi_2)$, при чому $\xi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_1^k$ – кут між нормаллю p і радіус-вектором ρ_2^n

Таким чином, $p_3(\varphi_2) = \rho_2^n \cos(\varphi_2^n + \varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_1^k)$.

У загальному випадку параметри (ρ_1, φ_1) об'єкта T_1 є змінними, тому права і ліва частини (2.39) стають функціями кутового параметра φ_1 . Тоді умова торкання 1-го типу представляється у вигляді (2.38).

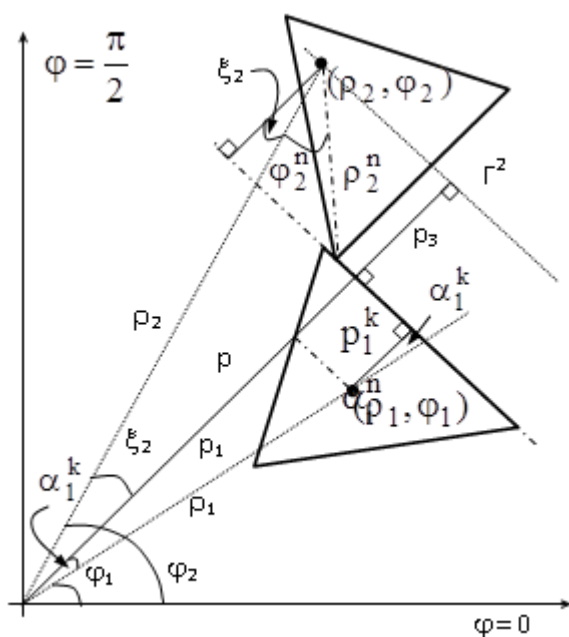


Рисунок 2.18 – Пряма Γ^2

Отже, функція $f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ (2.37) має вигляд:

$$f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_1^k) - \rho_1 \cos \alpha_1^k - \rho_1^k - \rho_2^n \cos(\varphi_2^n + \varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_1^k). \quad (2.40)$$

Дотик 2-го типу: «вершина (ρ_1^n, φ_1^n) об'єкта T_1 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_2^k) = p_2^k$ об'єкта T_2 » (рис. 2.19).

Затвердження 2.6. Умова торкання 2-го типу «вершина (ρ_1^n, φ_1^n) об'єкта T_1 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_2^k) = p_2^k$ об'єкта T_2 » має вигляд:

$$\rho_2 \cos \alpha_2^k = \rho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \alpha_2^k) + p_2^k + \rho_1^n \cos(\varphi_1^n + \varphi_1 - \varphi_2 - \alpha_2^k) \quad (2.41)$$

Доказ безпосередньо випливає з геометричних побудов, наведених на рис. 2.19.

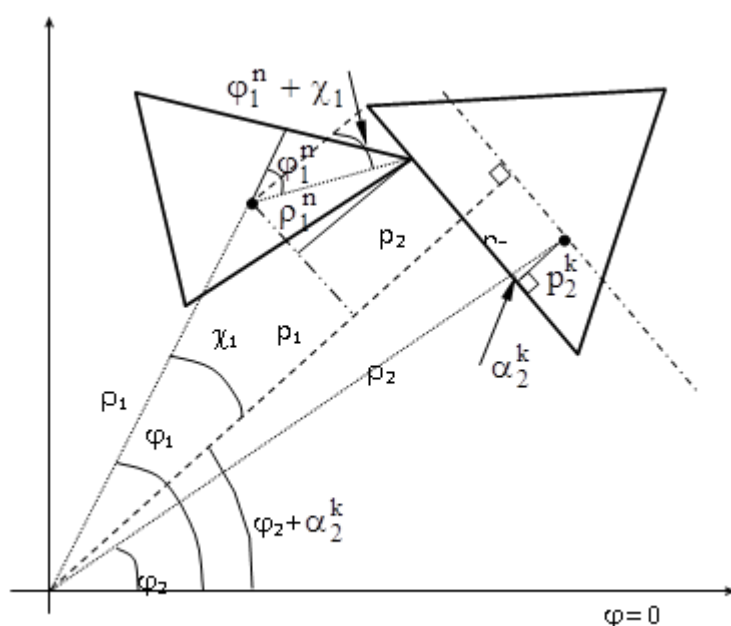


Рисунок 2.19 – Ілюстрація Твердження 2

Нехай для початку параметри (ρ_1, φ_1) об'єкта T_1 фіксовані. Тоді при незмінній орієнтації системи $\rho_2 O_2 \varphi_2$ умова торкання має вигляд:

$$\rho_2 \cos(\varphi_2 - \alpha_2^k) = p, \quad (2.42)$$

де напрямок p – нормаль до прямої Γ^2 , яка є слідом полюса об'єкта T_2 за умови торкання об'єктів і розташована паралельно стороні $\zeta \cos(\eta - \alpha_2^k) = p_2^k$ об'єкта T_2 .

Зміна кута φ_2 тягне відповідне перевизначення кута α_2^k як кута між полярною віссю загальної системи координат і напрямком p , який збігається з напрямком p_2^k . Таким чином, при кожному значенні кута повороту φ_2 кут $\alpha_2^k = \alpha_2^k + \varphi_2$. Параметри ρ_2, φ_2 задають положення полюса об'єкта T_2 , і ліва частина рівняння (2.42) приймає вид $\rho_2 \cos \alpha_2^k$.

Довжина нормалі p є сумою трьох складових:

$$p = p_1 + p_2 + p_3,$$

де, $p_1 = \rho_1 \cos \chi_1$, $\chi_1 = \varphi_1 - (\varphi_2 + \alpha_2^k)$ – кут між нормаллю p і радіус-вектором ρ_1 , $p_2 = \rho_1^n \cos(\chi_1 + \varphi_1^n)$, тобто, враховуючи χ_1 , $p_2 = \rho_1^n \cos(\varphi_1^n - \varphi_2 + \varphi_1 - \alpha_2^k)$, $p_3 = p_2^k$ – постійна величина.

Таким чином, нормаль p в загальному випадку є нелінійною функцією параметрів розміщення пари об'єктів T_1 і T_2 , що розглядаються.

Затвердження доведено.

Отже, функція $f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ (2.37) має вигляд:

$$f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = \rho_2 \cos \alpha_2^k - \rho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \alpha_2^k) - p_2^k - \rho_1^n \cos(\varphi_1^n + \varphi_1 - \varphi_2 - \alpha_2^k) \quad (2.43)$$

Приклад 2.2. Побудуємо систему рівнянь, що описує точку $(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) \in \Gamma^4$, зображену на рис 2.20, де римськими цифрами позначені точки дотику об'єктів і області. Об'єкти T_1, T_2 і область Ω задаються метричними параметрами, зазначеними в табл. 2.1, табл. 2.2 відповідно (в табл. 2.2 вказані тільки необхідні характеристики).

Точка I – дотик 1-го типу об'єкта T_1 і області Ω : «вершина (ρ_1^1, α_1^1) – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha^1) = p^1$ ». Координати 1-ої вершини об'єкта T_1 : (5, 1.34), рівняння сторони області Ω : $\rho \cos(\varphi - 2.68) = 0.894$.

Згідно (2.33), аналітичний опис торкання має вигляд:

$$\rho_1 \cos(\varphi_1 - 2.68) = 0.894 - 5 \cos(\varphi_1 - 1.34).$$

Таблиця 2.1 – Метричні параметри об'єктів розміщення

n,k	T ₁				T ₂			
	ρ_1^n	φ_1^n	p_1^k	α_1^k	ρ_2^n	φ_2^n	p_2^k	α_2^k
1	5,00	-1,34	1,79	2,54	6,40	2,46	2,68	0,13
2	3,16	-2,76	2,1	-1,21	6,00	-1,57	2,68	-1,06
3	6,08	-0,71	2,84	0,37	6,4	0,67	4,00	0,97

Таблиця 2.2 – Метричні параметри області розміщення Ω

Точка	Опис елемента	ρ^n, p^k	φ^n, α^k
I	$\rho \cos(\varphi - \alpha^1) = p^1$	0,89	2,68
III	(ρ^2, φ^2)	27,02	0,68
IV	(ρ^6, φ^6)	21,93	0,42

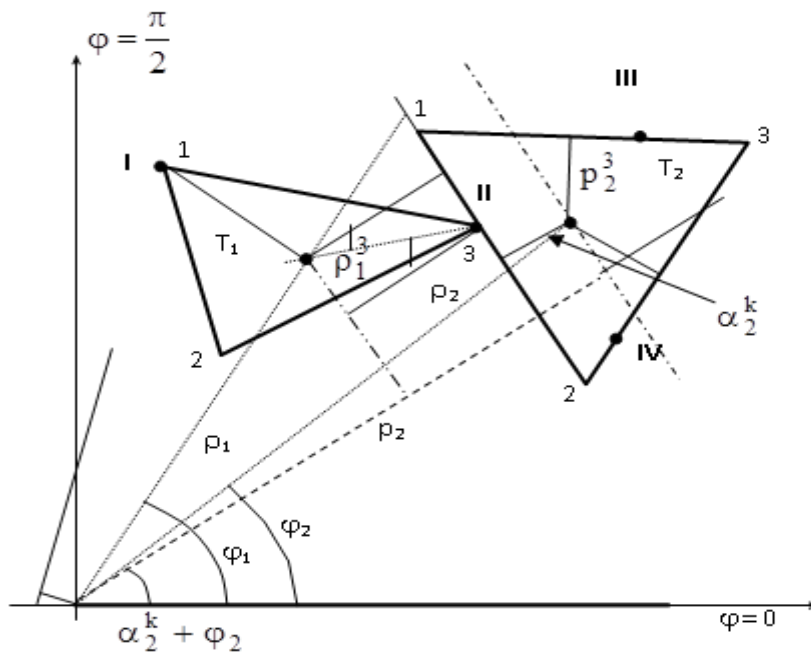


Рисунок 2.20 – Ілюстрація Прикладу 2.2

Точка II – умова торкання об'єктів 2-го типу: «вершина об'єкта $T_1(\rho_1^3, \varphi_1^3)$ – сторона об'єкта $T_2 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \alpha_2^1) = p_2^1$ ». Вершина об'єкта T_1

має координати $(\rho_1^3, \varphi_1^3) = (6.08; -0.711)$, рівняння сторони об'єкта T_2 : $\rho \cos(\varphi - 0.13) = 2.68$. По (2.41) аналітичний опис торкання має вигляд:

$$\rho_2 \cos(-0.136) = \rho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + 0.136) + 2.68 + 6.08 \cos(-0.574 + \varphi_1 - \varphi_2)$$

Точка III – дотик області 2-го типу «вершина (ρ^4, φ^4) області Ω – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_2^3) = \rho_2^3$ об'єкта T_2 . Вершина області має координати $(\rho^4, \varphi^4) = (27.02, 0.68)$, рівняння сторони об'єкта T_2 $\rho \cos(\varphi - 0.97) = 4$.

Відповідно до *твердження 2.4* (формула 2.35), аналітичний опис торкання має вигляд:

$$27.02 \cos(-0.29 - \varphi_2) = 0.56\rho_2 + 4.$$

Точка IV – дотик області другого типу «вершина (ρ^6, φ^6) області Ω – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_2^2) = \rho_2^2$ об'єкта T_2 .

Вершина області має координати $(\rho^6, \varphi^6) = (21.93, 0.42)$, рівняння сторони об'єкта T_2 . $\rho \cos(\varphi + 1.06) = 2.68$.

Відповідно до *твердження 2.4* (формула 2.35) аналітичний опис торкання має вигляд:

$$21.93 \cos(1.49 - \varphi_2) = 0.48\rho_2 + 2.68.$$

Таким чином, рішенням побудованої системи рівнянь

$$\begin{cases} \rho_1 \cos(\varphi_1 - 2.68) = 0.894 - 5 \cos(\varphi_1 - 1.34) \\ 0.99\rho_2 = \rho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + 0.136) + 6.08 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - 0.574) + 2.68 \\ 27.02 \cos(-0.29 - \varphi_2) = 0.56\rho_2 + 4 \\ 21.93 \cos(1.49 - \varphi_2) = 0.48\rho_2 + 2.68 \end{cases}$$

є вектор $(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = (15.62, 0.8761, 23.02, 0.6001)$.

2.4.3 Аналітичний опис умов взаємного неперетину об'єктів T_1, T_2

Побудова набору нерівностей, що описують умови взаємного

неперетину об'єктів T_1, T_2 , проведемо на основі поняття Φ -функції для φ -об'єктів, якими є множини T_1, T_2 і Ω (див. п. 1.2).

Зауваження 2.10. Традиційно Φ_{12} -функція вводиться в простір R^K з Декартової системи координат.

У 4-вимірному просторі параметрів розміщення $(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ 0-рівень функцій $f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ (2.40), (2.43) являє собою деяке гладке нелінійне різноманіття $\gamma_{12}^v, v = \overline{1, 3}$.

Зафіксуємо координати (ρ_1, φ_1) полюса об'єкта T_1 і розглянемо деяку вершину $v_1^n(\rho_1^n, \varphi_1^n), n \in \overline{1, n_1}$, (рис. 2.21a).

Визначимо величини Λ_{m-2}^{n-1} – значення параметра φ_2 , при якому об'єкти T_1, T_2 торкаються відповідними вершинами $(v_1^n, v_2^m), m \in \overline{1, n_2}$.

Задача I. Знайти Λ_{m-2}^{n-1} (рис. 2.21 а).

Рішення. Величина $\Lambda_{m-2}^{n-1} = \varphi_1 + \angle BOC$. Для визначення $\angle BOC$ необхідно розглянути $\triangle OAB$ і $\triangle COA$, $A = v_1^n$. В $\triangle OAB$ – відомі такі величини: $|AB| = \rho_2^m, \angle B = \varphi_2^m$. При цьому $|OB| = \rho_2$. В $\triangle OAC$ – відомі: сторона $|AC| = \rho_1^n, \angle OCA = \pi - \varphi_1^n$, крім того $|OC| = \rho_1$.

Визначимо величину $|OA| = \rho_{OA}^n$. За теоремою косинусів з $\triangle OAC$ знаходимо:

$$\rho_{OA}^n = \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_1^n)^2 - 2\rho_1\rho_1^n \cos(\pi - \varphi_1^n)} = \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_1^n)^2 + 2\rho_1\rho_1^n \cos\varphi_1^n},$$

$$\rho_1^n = \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_{OA}^n)^2 - 2\rho_{OA}^n\rho_1 \cos\angle AOC}.$$

Отже,

$$\cos\angle AOC = \frac{(\rho_1)^2 + (\rho_{OA}^n)^2 - (\rho_1^n)^2}{2\rho_{OA}^n\rho_1} =$$

$$\frac{(\rho_1)^2 + \{(\rho_1)^2 + (\rho_1^n)^2 - 2\rho_1\rho_1^n \cos\angle OCA\} - (\rho_1^n)^2}{2\rho_{OA}^n\rho_1} = \frac{\rho_1 - \rho_1^n \cos\angle OCA}{\rho_{OA}^n} =$$

$$\frac{\rho_1 - \rho_1^n \cos(\pi - \varphi_1^n)}{\rho_{OA}^n} = \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos\varphi_1^n}{\rho_{OA}^n}.$$

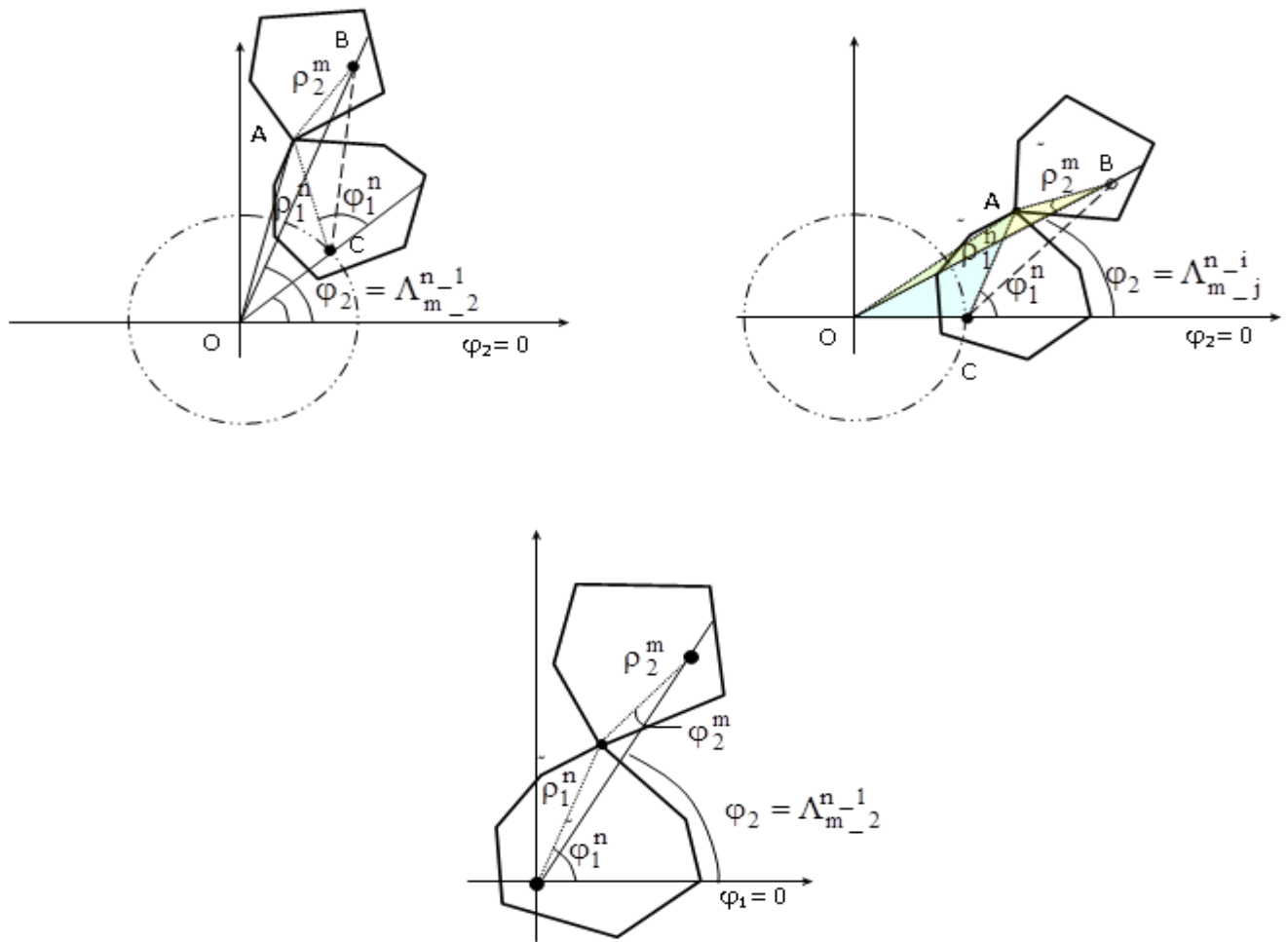


Рисунок 2.21 – Визначення величини Λ_{m-2}^{n-1}

Отже,

$$\angle AOC = \arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}^n} \quad (2.44)$$

З $\triangle OAB$ по теоремі синусів знайдемо кут $\angle AOB$

$$\angle AOB = \arcsin \left(\frac{\rho_2^m}{\rho_{OA}^n} \sin \angle ABO \right) = \arcsin \left(\frac{\rho_2^m}{\rho_{OA}^n} \sin \varphi_2^m \right) \quad (2.45)$$

З огляду на те, що $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$, отримаємо

$$\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = \arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}^n} - \arcsin \left(\frac{\rho_2^m}{\rho_{OA}^n} \sin \varphi_2^m \right). \quad (2.46)$$

Тоді кут Λ_{m-2}^{n-1} має вигляд

$$\Lambda_{m-2}^{n-1} = \varphi_1 + \arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}^n} - \arcsin \left(\frac{\rho_2^m}{\rho_{OA}^n} \sin \varphi_2^m \right). \quad (2.47)$$

При $\varphi_1 = 0, \rho_1 \neq 0$ (рис. 2.15 б) $\Lambda_{m-2}^{n-1} = \angle BOC$.

При $\varphi_1 = 0, \rho_1 = 0$ (рис. 2.15 в) $\rho_{OA} = \rho_1^n$ и $\angle AOC = \varphi_1^n$, отже,

$$\Lambda_{m-2}^{n-1} = \varphi_1^n - \arcsin \left(\frac{\rho_2^m}{\rho_1^n} \sin \varphi_2^m \right). \quad (2.48)$$

Зауваження 2.11. У загальному випадку функції \arcsin і \arccos є багатозначними, проте згідно з зауваженням 2.6 $\Lambda_{m-2}^{n-1} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

На підставі рішення Задачі I можна зробити ряд важливих висновків.

Твердження 2.7. Величина Λ_{m-2}^{n-1} є спадна функція параметра ρ_1 :

$$\Lambda_{m-2}^{n-1} = \Lambda_{m-2}^{n-1}(\rho_1).$$

Доказ. Зафіксуємо кут φ_1 . Згідно (2.47) необхідно розглянути величину $\arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}^n}$ як функцію ρ_1 . За визначенням, функція

$y = \arccos x$ є спадною, отже, при зростанні ρ_1 $\arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}^n}$ убуває,

що й треба було довести.

Позначимо через $[\Lambda_{m-2}^{n-1}, \Lambda_{m-2}^{(n+1)-1}]$ діапазон зміни параметра φ_2 , при якому має місце торкання 1-го типу (2.40) виду «вершина (ρ_2^m, φ_2^m) об'єкта T_2 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_1^n) = \rho_1^n$ об'єкта T_1 ».

Слідство 2.1. Величина діапазону $[\Lambda_{m-2}^{n-1}, \Lambda_{m-2}^{(n+1)-1}]$ зміни параметра залежить від параметра ρ_1 .

Доказ безпосередньо впливає з справедливості затвердження 2.7.

Твердження 2.8. Діапазон $[\Lambda_{m-2}^{n-1}, \Lambda_{m-2}^{(n+1)-1}]$ зміни параметра φ_2 , при якому має місце торкання 1-го типу виду (2.40), не залежить від величини параметра φ_1 .

Доказ. Зафіксуємо радіус-вектор ρ_1 . Тоді по (2.47)

$$\Lambda_{m-2}^{(n+1)-1} - \Lambda_{m-2}^{n-1} = \varphi_1 + \arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^{(n+1)} \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}^{n+1}} - \arcsin \left(\frac{\rho_2^m}{\rho_{OA}^{n+1}} \sin \varphi_2^m \right) - \\ - \varphi_1 + \arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}^n} - \arcsin \left(\frac{\rho_2^m}{\rho_{OA}^n} \sin \varphi_2^m \right),$$

де $\rho_{OA}^n = \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_1^n)^2 + 2\rho_1\rho_1^n \cos \varphi_1^n}$.

Після очевидних перетворень отримуємо, що різниця

$$\Lambda_{m-2}^{(n+1)-1} - \Lambda_{m-2}^{n-1}$$

не залежить від φ_1 , що й треба було довести.

Слідство 2.2. Номер n вершини об'єкта T_1 (T_2), відповідний при торканні 1-го типу (2-го типу) заданої k -ої сторони об'єкта T_2 (T_1), не залежить від кутових параметрів розміщення (φ_1, φ_2).

Позначимо $[\Lambda_{m-1}^{n-2}, \Lambda_{m-1}^{(n+1)-2}]$ діапазон зміни параметра φ_2 , при якому має місце торкання 2-го типу (2.43) виду «вершина (ρ_1^m, φ_1^m) об'єкта T_1 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_2^n) = \rho_2^n$ об'єкта T_2 » Для діапазону $[\Lambda_{m-1}^{n-2}, \Lambda_{m-1}^{(n+1)-2}]$ справедливі твердження, аналогічні твердженнями 2.7, 2.8 і властивості 2.1.

Наслідком обліку анізотропії області Ω є той факт, що не для всіх пар вершин (v_1^n, v_2^m) , $m \in \overline{1, n_2}$ $n \in \overline{1, n_1}$ можна визначити величину Λ_{m-2}^{n-1} .

Положення 1. Розглянемо формулу (2.47). Очевидно, аргумент функції \arccos (друга складова) завжди менше 1, тому функція $\arccos \frac{\rho_1 + \rho_1^n \cos \varphi_1^n}{\rho_{OA}}$ визначена. Що стосується третьої складової, то згідно

з правилами рішення косокутних трикутників, функція визначена, якщо $\rho_2^m \sin \varphi_2^m \leq \rho_{OA}^n$.

Положення 2. Якщо виконана умова Положення 1, то можливі наступні варіанти дотику (рис. 2.22) об'єктів T_1 і T_2 вершинами (v_1^n, v_2^m) .

Варіант 1 (рис. 2.22 а). Величина Λ_{m-2}^{n-1} визначена і об'єкти T_1, T_2 не перетинаються;

Варіант 2 (рис. 2.22 б). Величина Λ_{m-2}^{n-1} визначена і об'єкти T_1, T_2 перетинаються, причому $\rho_2 < \rho_1^n$;

Варіант 3 (рис. 2.16 в). Величина Λ_{m-2}^{n-1} визначена і об'єкти T_1, T_2 перетинаються, причому $\rho_2 > \rho_1^n$.

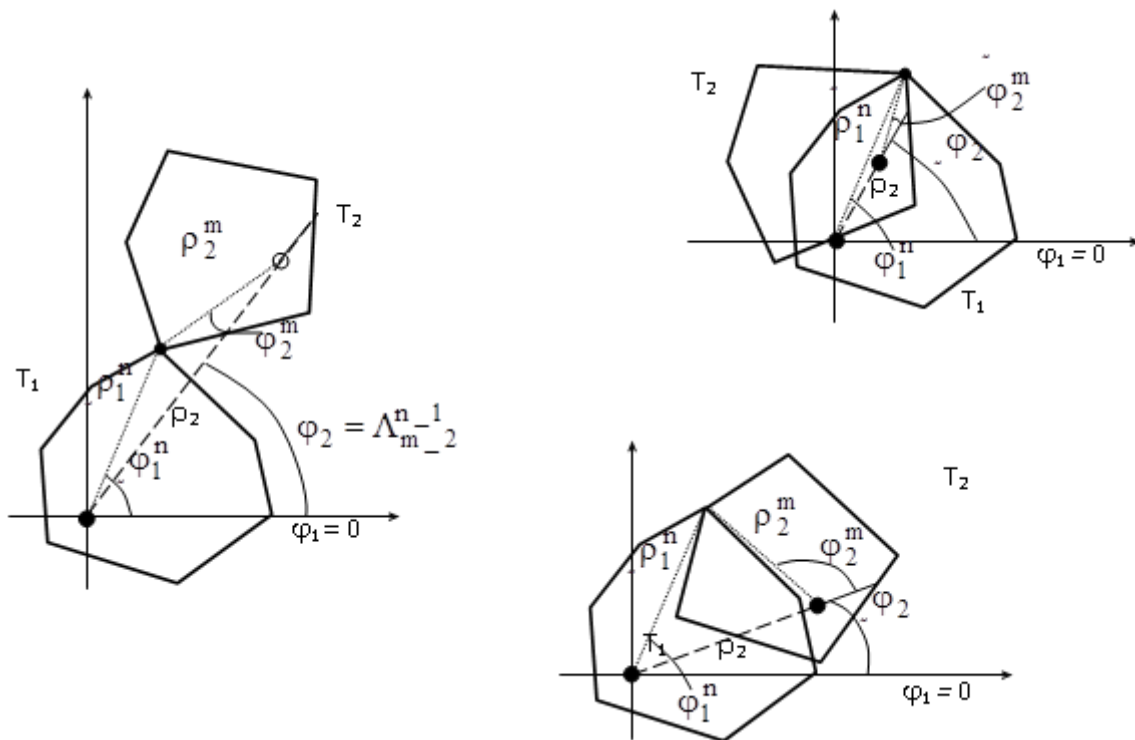


Рисунок 2.22 – Різні варіанти дотику вершин об'єктів T_1, T_2

Факт перетину об'єктів T_1 і T_2 в другому і третьому випадку означає визначення іншої пари вершин $(v_1^n, v_2^\mu), \mu \in \{1, \dots, n_2\}, \mu \neq m$.

Крім того, для визначення діапазону кутової зміни параметра φ_2 необхідно ввести в розгляд випадок торкання 3-го типу (див. п. 2.2): «n-а сторона (v_1^n, v_1^{n+1}) об'єкта T_1 – (m-1)-а сторона (v_2^{m-1}, v_2^m) об'єкта T_2 ».

Зауваження 2.12. Дотик 3-го типу «сторона (v_1^n, v_1^{n+1}) – сторона (v_2^m, v_2^{m+1}) » має місце при виконанні умови:

$$\varphi_1 + \alpha_1^n = -(\varphi_2 + \alpha_2^m). \quad (2.49)$$

Очевидно, умова (2.49) виконується при будь-яких значеннях параметра ρ_1 з області його визначення.

На рис 2.23 показані два випадки торкання об'єктів T_1 і T_2 . Перший випадок $\rho_1 = 0$, $\varphi_1=0$ – показаний суцільною товстою лінією, другий випадок, при якому $\rho_1 \neq 0$, $\varphi_1=0$, показаний штрих-пунктирною лінією.

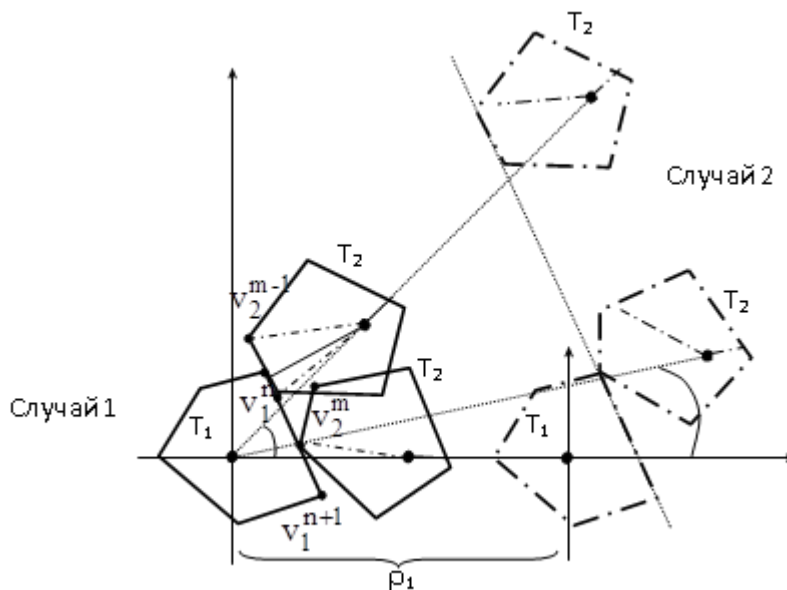


Рисунок 2.23 – Випадки торкання пари об'єктів T_1, T_2 в анізотропній області

Для першого випадку ($\rho_1 = 0$) відсутня можливість торкання вершин (v_1^n, v_2^m) при виконанні умови неперетинання об'єктів T_1, T_2 , цьому

заважає рання реалізація торкання 3-го типу «сторона (v_1^n, v_1^{n+1}) – сторона (v_2^{m-1}, v_2^m) ». Для другого випадку ($\rho_1 \neq 0$) така можливість має місце.

Зауваження 2.14. Позначимо через $[\underline{\varphi}^v, \overline{\varphi}^v]$ діапазон зміни параметрів, при якому має місце торкання 1-го типу (2.40) виду «вершина (ρ_2^m, φ_2^m) об'єкта T_2 – сторона $\rho \cos(\varphi - \alpha_1^n) = \rho_1^n$ об'єкта T_1 », такий, що $\underline{\varphi}^v = \Lambda_{m-2}^{n-1} - \varphi_1$, $\overline{\varphi}^v = \Lambda_{m-2}^{(n+1)-1} - \varphi_1$.

Аналогічно, при торканні 2-го типу (2.43) $\underline{\varphi}^v = \Lambda_{m-1}^{n-2}$, $\overline{\varphi}^v = \Lambda_{m-1}^{(n+1)-2}$.

Твердження 2.9. Нехай виконуються умови $f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = 0$, де функція $f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ має вигляд (2.40), (2.43). Тоді нерівність

$$f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) > 0$$

описує умову взаємного неперетину об'єктів T_1, T_2 .

Доказ. 0-рівень функцій задає дотик об'єктів у певному діапазоні зміни кутових параметрів і описує деяке нелінійне різноманіття. Вид функцій $f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ (2.40, 2.43) отримано при переході від Декартової системи координат до полярної.

Такий перехід не змінює відстаней між точками простору, отже, і просторової форми об'єктів і відстань між ними. У Декартовій системі координат властивість, що розглядається, має місце, так як відповідна орієнтація різноманіття γ_{12}^v забезпечується завданням нумерації вершин об'єктів T_1, T_2 (обхід вершин проти годинникової стрілки, як вказувалося раніше). Умови (2.40, 2.43) є еквівалентним перетворенням умов торкання двох об'єктів в декартовій системі координат, з чого випливає справедливості формулювання твердження.

При виконанні граничних умов $\varphi_2 = \underline{\varphi}^v$ або $\varphi_2 = \overline{\varphi}^v$ відбувається перемикання на суміжну пару 1-го типу або 2-го типу.

Зауваження 2.15. При переході від торкання однієї пари (1-го або 2-го типу) до іншої пари (1-го або 2-го типу) має місце торкання 3-го типу або дотик вершинами (v_1^n, v_2^m) . Дотик 3-го типу, при $\varphi_1 = \text{const}$, $\rho_1 = \text{const}$, має місце тільки в одній точці, при $\varphi_1 = \text{const}$, $\rho_1 \neq \text{const}$ це пряма, якщо $\varphi_1 \neq \text{const}$, $\rho_1 \neq \text{const}$, то має місце циліндрична поверхня.

На підставі вищевикладеного можна зробити наступне

Твердження 2.10. $\Phi_{12}(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ -функція пари об'єктів, що задовольняє умовам (1.16-1.18), має вигляд:

$$\Phi_{12}(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = \max_{v=1,9} F_v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2), \quad (2.50)$$

де

$$F_v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = \max \{f_{12}^v(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)\} K_v(\rho_1, \varphi_1, \varphi_2) + \Gamma_v(\rho_1, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$\Gamma_v(\rho_1, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \underline{\varrho}^v \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \overline{\varrho}^v \\ \varpi = 2 \max_{n=1, n_1, m=1, n_2} \{\rho_1^n, \rho_2^m\} & \end{cases},$$

$$K_v(\rho_1, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Gamma_v(\rho_1, \varphi_1, \varphi_2) = 0, \\ 0 & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Властивість 2.4. $\Phi_{12}(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$ -функція (2.50) є безперервною функцією.

Для побудови $\Phi_{01}(0,0, \rho_1, \varphi_1)$ -функції, яка описує умови розміщення об'єкта T_1 в області Ω , розглянемо об'єкт $\Omega^* = cl(\mathbb{R}^2/\Omega)$, який може бути представлений як

$$\Omega^* = \bigcup_{j=1}^J \Omega_j^*,$$

де Ω_j^* – опукла багатокутна множина. Таке подання може бути отримано кількома способами.

Тоді $\Phi^j(0,0, \rho_1, \varphi_1)$ -функція об'єктів Ω_j^* і T_1 може бути представлена у вигляді:

$$\Phi(0,0, \rho_1, \varphi_1) = \min \{ \Phi^1(0,0, \rho_1, \varphi_1), \Phi^2(0,0, \rho_1, \varphi_1), \dots, \Phi^J(0,0, \rho_1, \varphi_1) \}$$

де $\Phi^j(0,0, \rho_1, \varphi_1)$ – Φ -функція опуклих об'єктів Ω_j^* і T_1 .

0-рівень $\Phi^j(0,0, \rho_1, \varphi_1)$ -функції задається набором рівнянь $f_{01}^p(\rho_1, \varphi_1) = 0$, з функціями виду (2.33), (2.36).

2.5 Побудова Φ -функції об'єктів, котрі належать до множини базових, із змінними метричними характеристиками

Розглянемо ідеологію побудови Φ -функції складових φ -об'єктів, що за своєю просторовою формою не відносяться до множини 2D primary objects та мають змінні метричні характеристики і просторову форму.

Нехай дано такі об'єкти:

- прямокутник Ω , метричні характеристики якого – довжина Z і ширина W – вважаються постійними;
- об'єкт $\Omega^* = \text{cl}(R^2/\Omega)$;
- об'єкт $T \subset R^2$ з кусково-постійною межею, заданий координатами вершин $v^i = (x^i, y^i)$, $i = \overline{1, I}$, у власній системі координат.

У найпростішому випадку T – прямокутник $T(a, b)$, $axb = V$.

Положення об'єкта T в області Ω характеризується вектором параметрів розміщення $u = (x, y)$.

Покладемо $V = \text{const}$. Нехай можливо таке представлення:

$$T = T_1 \cup T_2, \text{int } T_1 \cap \text{int } T_2 = \emptyset, \quad (2.52)$$

де $V = V_1 + V_2$, $V_1 = a_1 x b_1$, $V_2 = a_2 x b_2$, a_i, b_i, V_i – var.

При $a_1 \neq a_2$ ($b_1 \neq b_2$) об'єкт T є неопуклим (рис. 2.24).

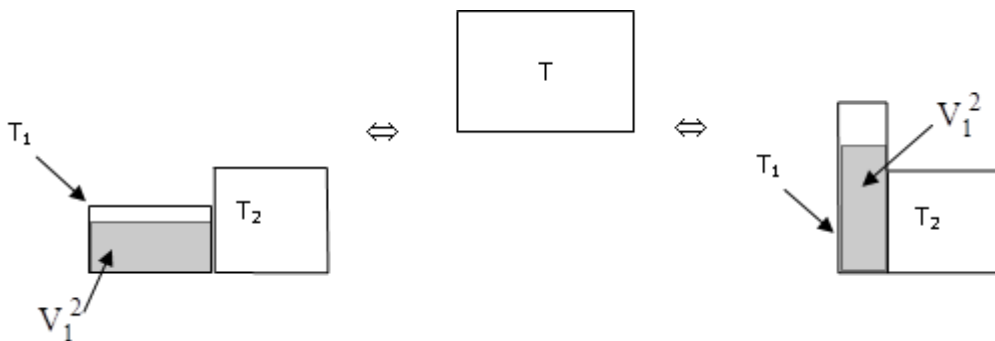


Рисунок 2.24 – Представлення об'єкта T з урахуванням можливості його розбиття (2.52)

Нехай справедливі наступні гіпотези:

Гіпотеза 1. Є деяка величина $0 < V_1^2 \leq V_1$, $V_1^2 = \text{const}$, причому так, що $V > V_1$. Ця умова означає, що об'єкти T_1 і T_2 завжди мають непорожню внутрішність (є всюди щільними).

Гіпотеза 2. Параметри розміщення (x_1, y_1) (x_2, y_2) об'єктів T_1 і T_2 задовольняють співвідношенню:

$$x_2 = x_1 + a_1, y_1 = y_2.$$

При такій постановці параметри $\mu_h = (x_h, y_h, a_{h_1}, a_{h_2}, b_{h_1}, b_{h_2})$ об'єкта T_h є ендогенними.

Умова розміщення об'єкта T в області розміщення Ω (1.2) в даному випадку така:

$$T_i \subset \Omega, \text{ или } \text{int } T_i \cap \text{int } \Omega^* = \emptyset, \quad i=1,2. \quad (2.53)$$

Аналітичний опис обмежень (2.53) здійснюється за допомогою апарату Φ -функцій.

$\Phi_{01}(0, \mu)$ -функція, що задає обмеження (2.53), задовольняє умові:

$$\Phi_{01}(0, \mu) \geq 0,$$

при цьому

$$\Phi_{01}(0, \mu) = \min \{ f_1(\mu_1), f_2(\mu_1), f_3(\mu_1), f_4(\mu_1), f_5(\mu_1) \}, \quad (2.54)$$

де $f_1(\mu_1) = W - y_1 - b_{1_1}$, $f_2(\mu_1) = W - y_1 - b_{1_2}$, $f_3(\mu_1) = Z - x_1 - a_{1_1} - a_{1_2}$, $f_4(\mu_1) = y_1$, $f_5(\mu_1) = x_1$.

Тоді умова (2.53) описується системою $F_0(\mu) \geq 0$ лінійних нерівностей

$$F_0(\mu) := \{ f_h(\mu_1) \}, \quad h = \overline{1,5}. \quad (2.55)$$

$\Phi_{12}(\mu_1, \mu_2)$ -функція, що задає умову (1.3) попарного взаємного неперетинання об'єктів $T_1(\mu_1)$ и $T_2(\mu_2)$, має вигляд:

$$\Phi_{12}(\mu_1, \mu_2) \geq 0,$$

$$\Phi_{12}(\mu_1, \mu_2) = \max \left\{ \max_{k=6,11} f_k(\mu_1, \mu_2), \min \{ f_{12}^1(\mu_1, \mu_2), f_{12}^2(\mu_1, \mu_2) \} \right\},$$

$$\min \{ f_{13}^1(\mu_1, \mu_2), f_{13}^2(\mu_1, \mu_2) \}, \quad (2.56)$$

де

$$\begin{aligned} f_6(\mu_1, \mu_2) &= (x_1 + a_{1_1}) - (x_2 + a_{2_1} + a_{2_2}), \quad f_7(\mu_1, \mu_2) = x_2 - (x_1 + a_{1_1}), \\ f_8(\mu_1, \mu_2) &= x_1 - (x_2 + a_{2_1}), \quad f_9(\mu_1, \mu_2) = (x_2 + a_{2_1}) - (x_1 + a_{1_1} + a_{1_2}), \\ f_{10}(\mu_1, \mu_2) &= x_1 - (x_2 + a_{2_1} + a_{2_2}), \quad f_{11}(\mu_1, \mu_2) = x_2 - (x_1 + a_{1_1} + a_{1_2}), \\ f_{12}^1(\mu_1, \mu_2) &= y_2 - (y_1 + b_{1_1}), \quad f_{12}^2(\mu_1, \mu_2) = y_2 - (y_1 + b_{1_2}), \\ f_{13}^1(\mu_1, \mu_2) &= y_1 - (y_2 + b_{2_1}), \quad f_{13}^2(\mu_1, \mu_2) = y_1 - (y_2 + b_{2_2}). \end{aligned}$$

$\Phi_{12}(\mu_1, \mu_2)$ -функція представляється набором лінійних нерівностей

$$F_{12}(\mu_1, \mu_2) \geq 0 := \begin{cases} f_k(\mu_1, \mu_2) \geq 0, & k = 6, \dots, 11, \\ \left\{ \begin{array}{l} f_{12}^h(\mu_1, \mu_2) \geq 0, \\ f_{13}^h(\mu_1, \mu_2) \geq 0, \end{array} \right. & h = 1, 2. \end{cases} \quad (2.57)$$

На рис. 2.25 показані різні проекції 0-рівня $\Phi_{12}(\mu_1, \mu_2)$ -функції на площину X_1OY_1 . При цьому ланки ламаних позначені іменами відповідних функцій обмежень, складових 0-рівень $\Phi_{12}(\mu_1, \mu_2)$ -функції.

Розглянемо важливий окремий випадок. Нехай $V_{1_1} = V_1^*$. Тоді об'єм $V_{1_1} = \text{const}$, і мають місце такі обмеження:

$$a_{1_1} b_{1_1} = V_1^*, \quad a_{1_2} b_{1_2} = V_1 - V_1^*.$$

Отже, $b_{h_1} = \frac{V_h^*}{a_{h_1}}$, $b_{h_2} = \frac{V_h - V_h^*}{a_{h_2}}$, і функції f_{12}^h , f_{13}^h , $h=1,2$, $x = 1,2$

набувають вигляду:

$$f_{12}^1(\mu_1, \mu_2) = y_2 - (y_1 + \frac{V_1^*}{a_{1_1}}), \quad f_{12}^2(\mu_1, \mu_2) = y_2 - (y_1 + \frac{V_1 - V_1^*}{a_{1_2}}), \quad (2.58)$$

$$f_{13}^1(\mu_1, \mu_2) = y_1 - (y_2 + \frac{V_2^*}{a_{2_1}}), \quad f_{13}^2(\mu_1, \mu_2) = y_1 - (y_2 + \frac{V_2 - V_2^*}{a_{2_2}}). \quad (2.59)$$

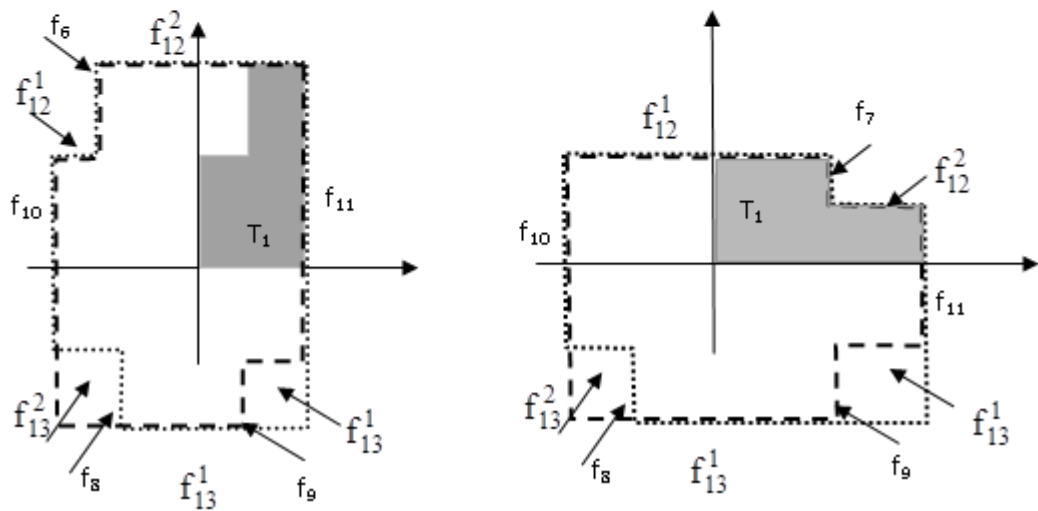
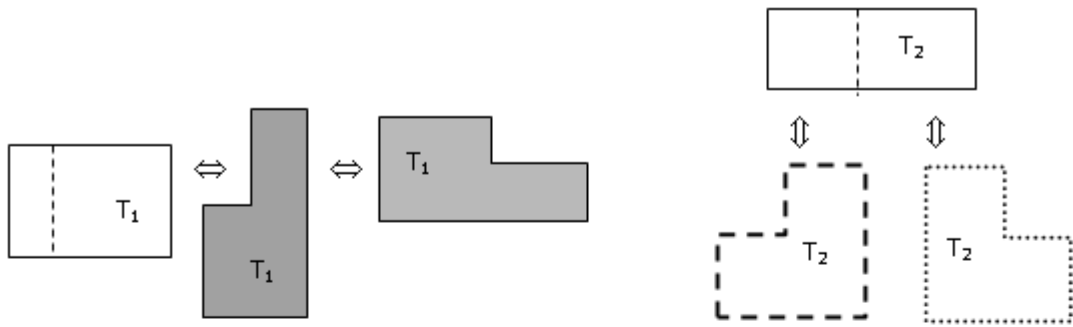


Рисунок 2.25 – 0-рівень Φ -функції за умови:

- а) різні форми об'єкта T_1 при збереженні його об'єму V_1 ,
- б) різні форми об'єкта T_2 при збереженні його об'єму V_2 ,
- в) різні перерізи 0-рівня Φ -функції

В даному випадку реалізується ситуація функціональної залежності метричних характеристик об'єктів розміщення.

Властивість 2.5. Функції виду (2.58), (2.59) є опуклими.

Властивість 2.6. Функції (2.58), (2.59), а також функції

$$W - (y_i + \frac{V_i^*}{a_{i-1}}), \quad W - (y_i + \frac{V_i - V_i^*}{a_{i-2}}), \quad i=1,2,$$

є сепарабельними

Висновки по главі 2

1 Запропоновано засоби моделювання геометричних обмежень на параметри розміщення геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою за допомогою апарату Φ -функцій.

2 Побудована Φ -функція об'єктів, для яких в процесі розміщення можлива зміна топологічної розмірності.

3 Формалізовано умови розміщення базових геометричних об'єктів з урахуванням впливу параметрів розміщення на метричні характеристики розглянутих об'єктів.

4 Виділено додаткові властивості Φ -функції, на базі чого здійснено побудову Φ -функції опуклих об'єктів у задачі розміщення в анізотропній області. Визначено діапазони зміни кутових параметрів.

5 Побудована Φ -функція геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою, які не належать множині базових об'єктів.

ГЛАВА 3
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ
ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ
КОНЦЕНТРАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗАБРУДНЮЮЧИХ ВИКИДІВ З
УРАХУВАННЯМ РЕЛЬЄФУ ОБЛАСТІ РОЗМІЩЕННЯ

У главі проведено побудову і аналіз оптимізаційної математичної моделі розміщення пожежонебезпечних об'єктів, які в разі пожежі є джерелами забруднюючих аерозольних викидів, з урахуванням рельєфу області розміщення. Ця задача зводиться до оптимізаційної задачі розміщення багатокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою, в якості яких виступають багатокутні зони забруднення.

Досліджено систему обмежень задачі. Проведена формалізація фізичних обмежень на основі параметризації концентраційного поля забруднюючих викидів і аналітичний опис геометричних обмежень. Побудована Ф-функція відносин об'єктів розміщення з урахуванням впливу результуючого концентраційного поля.

На основі аналізу особливостей оптимізаційної задачі розроблений метод пошуку локального мінімуму у вигляді комбінації методів мінімізації за групами змінних і градієнтного методу.

Проведено чисельне дослідження задач оптимізації розміщення пожежонебезпечних об'єктів в заданих областях з урахуванням рельєфу місцевості. Розв'язана задача раціонального розміщення двох резервуарних парків для зберігання бензинів і товарного мазуту Гнідинцівського газопереробного заводу (сmt Варва Чернігівської області) на етапі його реконструкції.

3.1 Математична модель розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням рельєфу області

Як показано в роботі [120], задача оптимізації розміщення кінцевого набору $S = \{S_i\}$, $i = \overline{1, N}$, пожежонебезпечних об'єктів, що є джерелами забруднюючих аерозольних викидів, в заданій області Ω зводиться до задачі розміщення відповідних зон забруднення T_i .

Оскільки практичний інтерес з точки зору впливу на людину представляє розподіл наземної концентрації забруднюючих викидів, то далі будемо вважати, що область $\Omega \subset R^2$.

В роботі розглядається пожежа на заключній стадії її розвитку (інтенсивність викидів $M = \text{const}$), отже, можна прийняти, що розподіл наземної концентрації забруднюючих викидів не залежить від часу.

Якщо виключити з розгляду пожежі, що займають дуже великі площі (лісові, степові і т.п.), то розміри пожежі малі в порівнянні з відстанями, на яких досліджується створюване нею концентраційне поле. Тому пожежонебезпечний об'єкт S_i можна вважати точковим джерелом викидів. До пожежонебезпечних об'єктів такого типу можна віднести розглянуті в даній роботі резервуари з рідкими вуглеводнями.

Кількісною характеристикою забруднення області Ω продуктами горіння є їх концентрація в точках (x, y) області:

$$c = C(x, y, u, G, Q),$$

де u – вектор параметрів розміщення $(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)$ пожежонебезпечних об'єктів S_i , $i = \overline{1, N}$; $G = \{G_i\}$ – множина параметрів пожеж на об'єктах S_i ; $G_i = \{g_i^k\}$, $k = \overline{1, K}$, $Q = \{q_h\}$ – множина геокліматичних умов в області Ω , $h = \overline{1, h}$.

При цьому зона забруднення T_i через невизначеність часу виникнення пожежі представляється як багатокутник, побудований на розі приземного вітру, характерної для конкретної території. Роза приземного вітру визначає також найбільш ймовірний напрямок вітру і його швидкість (рис. 1.6).

Під приземним вітром надалі будемо розуміти вітер на рівні одного метра над поверхнею рельєфу.

У наземному розподілі концентрації $C(x, y, u_i, G_i, Q)$ забруднюючих домішок, яка створюється об'єктом S_i , спостерігається максимум (рис. 1.5). Тому в якості межі Γ_i отриманого багатокутника T_i прийнята лінія, в кожній точці якої досягається максимальна концентрація забруднюючої домішки в заданому напрямку λ :

$$C(x, y, (x_i, y_i), G_i, Q)|_{(x, y) \in \Gamma} = \max C(x, y, (x_i, y_i), G_i, Q)|_{\lambda}.$$

Така побудова області забруднення T_i гарантує, що поза неї концентрація домішки буде менше, ніж на межі Γ_i .

Зауваження 3.1. При незмінних параметрах джерела забруднюючої домішки (інтенсивності викиду домішки M і початкової висоти підйому

домішки Н) характер концентраційного поля визначається величиною і напрямком швидкості приземного вітру в точці розміщення джерела.

Відзначимо, що в математичній моделі, що розглядалася в [120], розміщення пожежонебезпечних об'єктів (Задача 4) розміри, форма і орієнтація зони T_i залишалися незмінними при зміні положення об'єкта S_i в області розміщення Ω . Це пов'язано з постійністю рози вітрів в межах області розміщення, яке обумовлено не урахуванням рельєфу області. Цій моделі відповідає оптимізаційна задача нерегулярного розміщення орієнтованих геометричних об'єктів (фіксованих восьмикутних зон забруднення) в обмеженій багатозв'язній області $\Omega \in \mathbb{R}^2$ з урахуванням заданої системи обмежень.

Недоліком зазначеної моделі, що звужує діапазон її практичного застосування, є відсутність врахування рельєфу області Ω , який викликає деформацію поля швидкостей приземного вітру і, відповідно, залежність розмірів і форми зони забруднення від положення пожежонебезпечного об'єкта в області.

3.1.1 Моделювання зони забруднення земної поверхні аерозольними викидами пожежі

Побудуємо модель зони забруднення підстильної поверхні викидами пожежі з урахуванням рельєфу області розміщення.

Нехай в загальній системі координат $OXYZ$ задана область розміщення Ω^* з функцією рельєфу $z = \mathfrak{R}(x, y)$. Проекцію області Ω^* на горизонтальну площину XOY позначимо Ω .

В області Ω^* визначено векторне поле швидкостей приземного вітру $\vec{v}_{g1}(x, y, z)$, яке однозначно задається рельєфом $\mathfrak{R}(x, y)$.

В області Ω визначена функція $\xi = \xi(x, y)|_{(x, y) \in \Omega}$, значення якої в будь-якій точці $(x, y) \in \Omega$ чисельно дорівнює довжині проекції на площину XOY вектора приземної швидкості вітру $v_{g1}(x, y, z)$ в точці $(x, y, z) \in \Omega^*$:

$$\forall (x, y) \in \Omega \exists \xi(x, y) = \left| \text{Pr}_{XOY} v_{g1}(x, y, z) \right|.$$

В області Ω^* розміщується пожежонебезпечний об'єкт S_i (джерело викидів). Можливий пожежа на об'єкті S_i породжує зону забруднення T_i^* , проекція якої на площину XOY є опукла багатокутна область T_i (рис. 3.1).

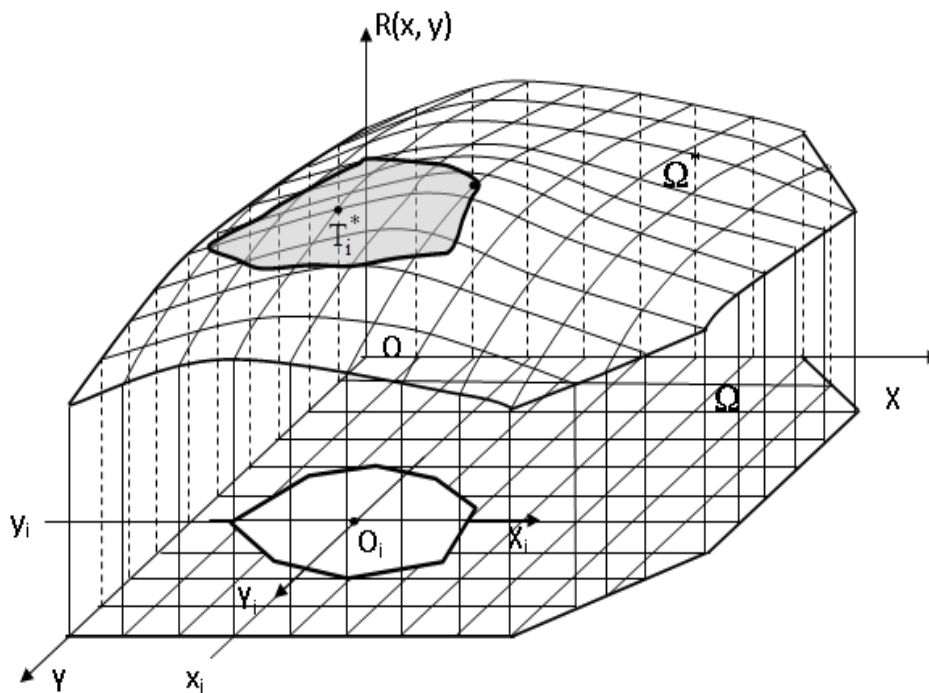


Рисунок 3.1 – Розміщення об'єкта T в області Ω

Завдання в точках області $\Omega \in \mathbb{R}^2$ функції $\xi = \xi(x, y)|_{(x, y) \in \Omega}$ дозволяє звести вихідну задачу розміщення об'єкта в $\Omega^* \in \mathbb{R}^3$ до задачі розміщення його проекції T_i в області $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Тому в подальшому під розміщенням пожежонебезпечного об'єкта S_i в області $\Omega^* \in \mathbb{R}^3$ з рельєфом будемо розуміти розміщення проекції його зони забруднення T_i в області $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

З об'єктом T_i пов'язана рухома система координат $X_i O_i Y_i$, початок якої (полюс O_i об'єкта T_i) суміщений з джерелом S_i . Положення полюса O_i об'єкта T_i в загальній системі координат XOY характеризується параметрами розміщення (x_i, y_i) (рис. 3.2). Об'єкт T_i задається набором $r_i = \{r_i^k\}$ відстаней від його полюса до вершин $v_i^k (x_i^k, y_i^k)$:

$$r_i^k = \sqrt{(x_i - x_i^k)^2 + (y_i - y_i^k)^2}, \quad k = \overline{1, 8}. \quad (3.1)$$

Відстані r_i^k змінюються в залежності від значення функції ξ в точці $(x_i, y_i) \in \Omega$ положення полюса об'єкта T_i :

$$r_i^k = r_i^k(\xi(x_i, y_i)), \quad k = \overline{1, 8} \quad (3.2)$$

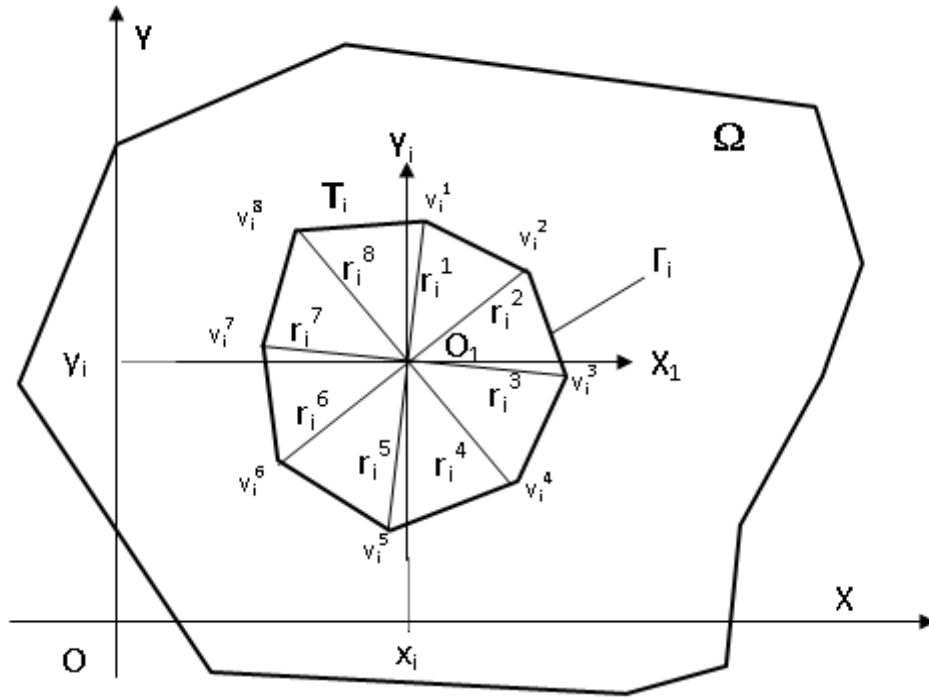


Рисунок 3.2 – Метричні характеристики об'єкта T_i

Таким чином, зона забруднення T_i є багатокутник із змінними метричними характеристиками і формою.

При визначенні r_i^k необхідно врахувати наступні вимоги:

- за межами зони T_i концентрація забруднюючої домішки повинна бути менше, ніж на межі Γ_i :

$$c(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma_i} > c(x, y)|_{(x,y) \in \Omega \setminus T_i}; \quad (3.3)$$

- концентрація домішки на межі Γ_i області T_i не повинна перевищувати її гранично допустиму концентрацію (ГДК)

$$c(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma_i} \leq \text{ПДК}. \quad (3.4)$$

Умови (3.3) – (3.4) виконуються, якщо в якості r_i^k вибираються відстані X_M^k $k=1,8$ від джерела S_i , на яких спостерігається максимум приземної концентрації C_M домішки в даному напрямку, а величина концентрації C_M не перевищує ГДК (рис. 3.3).

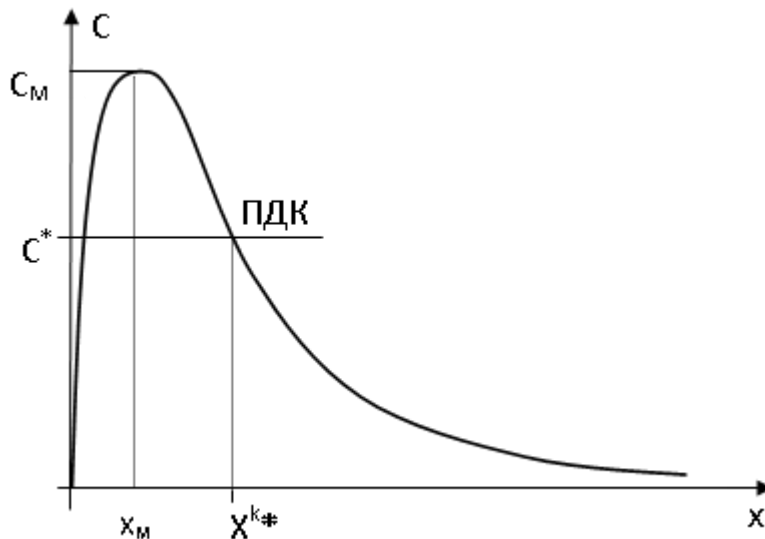


Рисунок 3.3 – Вибір метричних характеристик зони забруднення

Якщо $C_M \geq \text{ПДК}$, то в якості r_i^k в напрямку λ^k вибирається відстань $X^{k*} > X_M^k$, для якої виконується умова

$$C^* = C(X^{k*}) \leq \text{ПДК}.$$

При наявності в області розміщення Ω^* r_i^k рельєфу $\mathfrak{R}(x, y)$ величина r_i^k представляє довжину проекції на площину XOY кривої $z = \mathfrak{R}(x, y)$ в напрямі λ^k , за умови, що довжина кривої дорівнює X_M^k (або X^{k*}).

При побудові моделі зони забруднення (об'єкта T_i) прийняті наступні допущення:

Допущення 3.1. Рельєф в межах області Ω є слабо пересіченим (горбистим).

Це характерно для областей промислової забудови в рівнинних районах України.

Допущення 3.2. В межах зони забруднення (об'єкт T_i) приземна швидкість вітру не змінюється ні за величиною, ні у напрямку.

В умовах слабо пересіченого рельєфу при характерному розмірі зони забруднення аерозольними викидами пожежі $r \cong 100$ метрів зміна вектора швидкості вітру в зоні T_i не перевищує декількох відсотків. Характеристики вітру відповідають його характеристикам в точці розміщення об'єкта: $v^\lambda(x, y)|_{x, y \in T_i} = v^\lambda(x_i, y_i)$, де v^λ – швидкість вітру в напрямку λ .

Допущення 3.3. Рух повітряних мас над областю Ω відбувається паралельно її поверхні.

Допущення 3.4. Рух повітряних мас над областю Ω носить стаціонарний ламінарний характер.

Допущення 3.3, 3.4 справедливі для областей зі слабо розвинутим рельєфом, що підтверджується даними спостережень.

Зауваження 3.2. Врахування зазначених припущень дозволяє використовувати для визначення концентраційного поля забруднюючої домішки (аерозольні викиди пожежі) в області Ω^* математичний апарат теорії атмосферної дифузії, що моделює поширення домішок рівнянням турбулентної дифузії з постійними коефіцієнтами. Зокрема, для області зі слабо розвинутим рельєфом є справедливими математична модель (1.19) - (1.21) і формули для розрахунку концентрації легкої (1.22) і важкої (1.23) забруднюючих домішок, отримані при її розв'язанні.

Для визначення геометричних параметрів зони забруднення при наявності в області розміщення рельєфу, що викликає зміну вектора швидкості приземного вітру, використовується модель рельєфу у вигляді функції $R(x, y) \cong \mathfrak{R}(x, y)|_{(x, y) \in \Omega^*}$ і модель визначення швидкості приземного вітру в будь-якій точці області з урахуванням її рельєфу.

3.1.2 Визначення метричних характеристик зони забруднення викидами пожежі з урахуванням рельєфу місцевості

Модифікація математичної моделі [120] з урахуванням рельєфу місцевості дозволяє розглядати задачу оптимального розміщення пожежонебезпечних об'єктів як задачу нерегулярного розміщення геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками і просторовою формою в обмеженій багатозв'язній області при заданій системі обмежень.

Отже, для визначення змінюваних метричних характеристик зони забруднення T_i викидами пожежі з урахуванням рельєфу місцевості необхідно виконати:

1. Побудову функції рельєфу в області розміщення.
2. Побудову векторного поля швидкості приземного вітру.

Розглянемо ці питання більш докладно.

3.1.2.1 Моделювання рельєфа області розміщення

Вихідними даними про рельєф місцевості виступають цифрові

векторизовані карти горизонталей (ліній рівня висоти). Задача відновлення функції $\mathfrak{R}(x, y)$ поверхні рельєфу, в загальному випадку, не допускає точного рішення, що передбачає апроксимацію шуканої поверхні рельєфу поверхнею $R(x, y)$.

Кожна з ліній рівня $\mathfrak{R}(x, y) = \text{const}$ може складатися з декількох не пов'язаних між собою поліліній з висотними відмітками. Тоді векторизована електронна карта рельєфу являє собою упорядкований масив A :

$$A = \begin{bmatrix} z_1, \begin{bmatrix} [(x_{11}^1; y_{11}^1), (x_{12}^1; y_{12}^1)], \dots [(x_{1N_1^1-1}^1; y_{1N_1^1-1}^1), (x_{1N_1^1}^1; y_{1N_1^1}^1)] \\ \dots \\ [(x_{11}^{J_1}; y_{11}^{J_1}), (x_{12}^{J_1}; y_{12}^{J_1})], \dots [(x_{1N_1^{J_1}-1}^{J_1}; y_{1N_1^{J_1}-1}^{J_1}), (x_{1N_1^{J_1}}^{J_1}; y_{1N_1^{J_1}}^{J_1})] \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \\ z_I, \begin{bmatrix} [(x_{I1}^1; y_{I1}^1), (x_{I2}^1; y_{I2}^1)], \dots [(x_{IN_I^1-1}^1; y_{IN_I^1-1}^1), (x_{IN_I^1}^1; y_{IN_I^1}^1)] \\ \dots \\ [(x_{I1}^{J_1}; y_{I1}^{J_1}), (x_{I2}^{J_1}; y_{I2}^{J_1})], \dots [(x_{IN_I^{J_1}-1}^{J_1}; y_{IN_I^{J_1}-1}^{J_1}), (x_{IN_I^{J_1}}^{J_1}; y_{IN_I^{J_1}}^{J_1})] \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

де (x_{in}^j, y_{in}^j) – координати n -ої вершини j -ої полілінії i -ої лінії рівня; z_i – апліката (висотна відмітка) кожної i -ої лінії рівня; $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J_i}$, $n = \overline{1, N_i^j}$; I – загальна кількість ліній рівня; J_i – кількість поліліній в i -ої лінії рівня; N_i^j – кількість точок в i -ої полілінії j -ої лінії рівня.

Масив (3.5) не містить інформації про аплікати точок, що лежать між ізолініями. Тому на основі інформації про лінії рівня необхідно отримати рівняння поверхні $R(x, y)$. В роботі [122] приведена наступна процедура отримання опису поверхні рельєфу у вигляді всюди гладкої функції двох змінних.

Нехай область має просторову форму «прямокутник» з метричними характеристиками (a, b) : $a = X_{\max} - X_{\min}$, $b = Y_{\max} - Y_{\min}$, де $X_{\min} = \min \{x_{in}^j\}$; $X_{\max} = \max \{x_{in}^j\}$; $Y_{\min} = \min \{y_{in}^j\}$; $Y_{\max} = \max \{y_{in}^j\}$, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J_i}$, $n = \overline{1, N_i^j}$. Нехай далі Ω розбивається регулярною решіткою $\{x = x_s; y = y_t\}$,

$s = \overline{0, S}$; $t = \overline{0, T}$. Параметри решітки $\Delta x = x_{s+1} - x_s$ и $\Delta y = y_{t+1} - y_t$ і є екзогенними.

Знаходяться точки перетину ланок поліліній з лініями решітки. Наскрізна нумерація точок перетину задається індексами $k = \overline{1, K_s}$ і $p = \overline{1, P_t}$ для кожного з перерізів $x = x_s$ і $y = y_t$ відповідно. Таким чином, дана процедура полягає у визначенні точок перетину "тривимірних" ліній рівня з площинами $X = x, s = \overline{0, S}$ і $Y = y, t = \overline{0, T}$.

Змінюється порядок нумерації точок перетину k і p по зростанню значень $^k_s y_m$ для кожного s -ого перерізу і значенням $^p_t x_m$ для кожного t -ого перерізу і упорядковуються індекси k і p . Тоді масиви $B_s = [({}_s x, {}^k_s y, {}^k_s z)], k = \overline{1, K_s}, s = \overline{0, S}$; $C_t = [({}^p_t x, {}_t y, {}^p_t z)], p = \overline{1, P_t}, t = \overline{0, T}$ несуть всю інформацію про тривимірні координати точок перетину ліній рівня із утворюючими решітки. Для перерізів $X = x$ проводиться процедура інтерполяції на отриманих $K_s + 2$ вузлах, що лежать на перерізі x_s , за допомогою $K_s + 1$ - кускових кубічних сплайнів, кожен з яких заданий на інтервалі $[{}^k_s y; {}^{k+1}_s y]$ $s = \overline{0, S}$. В результаті для кожного s -ого перерізу отримана гладко зшита кускова функція виду:

$$D_s(y) = \begin{cases} {}^0 D_s(y), 0 \leq y < {}^1_s y; \\ {}^1 D_s(y), {}^1_s y \leq y < {}^2_s y; \\ \dots \\ {}^{K_s-1} D_s(y), {}^{K_s-1}_s y \leq y < {}^{K_s}_s y; \\ {}^{K_s} D_s(y), {}^{K_s}_s y \leq y < Y_{\max}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Графіки ліній (3.6) являють собою інтерполяції на нерегулярних вузлах перетинів рельєфу площинами.

Для перетинів аналогічно отримують сплайн-інтерполяції виду

$$E_t(x) = \begin{cases} {}^0 E_t(x), 0 \leq x < {}^1_t x; \\ {}^1 E_t(x), {}^1_t x \leq x < {}^2_t x; \\ \dots \\ {}^{P_t-1} E_t(x), {}^{P_t-1}_t x \leq x < {}^{P_t}_t x; \\ {}^{P_t} E_t(x), {}^{P_t}_t x \leq x < X_{\max}. \end{cases}$$

На підставі функцій, що апроксимують відповідні перерізи рельєфу уздовж кожної зі сторін комірки, проводять двовимірну сплайн-інтерполяцію безпосередньо самої поверхні рельєфу $R_{st}(x, y)$ всередині кожної з комірок. За допомогою методу Кунса будується бікубічний поліном виду:

$$R_{st}(x, y) = \sum_{u=1}^4 \sum_{v=1}^4 a_{uv}^{st} (x - x_s)^{v-1} (y - y_t)^{u-1},$$

який однозначно апроксимує поверхню рельєфу всередині кожної з комірок і забезпечує, на відміну від лінійної інтерполяції, гладке зшивання з сусідніми поліномами уздовж ліній $F_s(y)$ і $G_t(x)$, $s = \overline{1, S-1}$; $t = \overline{1, T}$.

Тоді функція приймає вид:

$$R(x, y) = \sum_{s=1}^{S-1} \sum_{t=1}^{T-1} R_{st}(x, y) (\eta(x - x_s) - \eta(x - x_{s+1})) (\eta(y - y_t) - \eta(y - y_{t+1})), \quad (3.7)$$

де $\eta(x)$ і $\eta(y)$ – довизначена в 0 функція Хевісайда.

3.1.2.2 Моделювання швидкості приземного вітру з урахуванням рельєфу

Нехай відомі швидкість і напрямок однорідного метеорологічного вітру, тобто заданий вектор $\vec{v}_m(v_{mx}, v_{my})$, і рівняння поверхні рельєфу $R(x, y)$. Необхідно знайти неоднорідне векторне поле вітру на висоті h_w над поверхнею рельєфу (зазвичай на рівні 1 м), тобто визначити величини проекцій вектора швидкості вітру:

$$\vec{v}_w(v_{wx}(x, y, R(x, y) + h_w); v_{wy}(x, y, R(x, y) + h_w); v_{wz}(x, y, R(x, y) + h_w))$$

Перебіг повітряних мас носить потенційний характер. У цьому випадку існує функція $V(x, y, z)$ (потенціал швидкості вітру, $\text{grad } V = \vec{v}_w$), для якої справедливо рівняння Лапласа

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Дане рівняння, спільно з граничними умовами, визначає векторне поле швидкостей стаціонарного ламінарного вітру.

Для потоку нев'язкого середовища гранична умова на поверхні рельєфу визначається непротіканням через цю поверхню, тобто нормальна до поверхні складова швидкості дорівнює нулю. Дана умова еквівалентна рівнянню

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial R(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Аналітичний розв'язок рівняння Лапласа можливо лише в окремих випадках (наприклад, при $R(x, y) = \text{const}$). Тому для довільної поверхні рельєфу можливо лише чисельне рішення.

Поверхня рельєфу, задана на прямокутній області Ω з габаритами $[0; X]$, поміщається в паралелепіпед Ω_H з висотою H_g так, щоб

$$0 \leq \min R(x, y); \max R(x, y) < H_g.$$

Осі OX і OY направляються по сторонах світу, а вісь OZ – вертикально вгору. Отриманий обсяг над областю Ω розбивається регулярною тривимірною решіткою з кроками по осях рівними $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. При цьому для горбистого рельєфу прийнятно $\Delta x = \Delta y = (10 \div 200)$ м, $\Delta z = (2 \div 20)$ м.

Чисельне рішення рівняння Лапласа дозволяє знайти значення компонент швидкості вітру в кінцевій множині вузлів. Для знаходження континуального поля швидкості вітру на заданій висоті h_w в кожній точці області Ω необхідно здійснити інтерполяцію отриманих точкових значень, наприклад, бікубічну інтерполяцію за методом Кунса. Остаточне векторне поле швидкості приземного вітру має вигляд:

$$\vec{v}(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y), v_z(x, y)) = \vec{v}_{g1}(x, y). \quad (3.8)$$

Зауваження 3.3. Вертикальну складову швидкості приземного вітру в (3.8) можна не враховувати, тобто $v_z(x, y) = 0$ (Припущення 3.3).

Відрізок $A_1A_2 = r_1^k$ на рис. 3.4 являє собою проекцію на

горизонтальну площину відрізка $A_1^*A_2^*$ кривої, отриманої в результаті перетину поверхні рельєфу вертикальною площиною P , що проходить через точку (x_i, y_i) в напрямку λ .

3.1.2.3 Визначення метричних характеристик зони забруднення земної поверхні аерозольними викидами пожежі з урахуванням рельєфу місцевості

При наявності в області розміщення Ω^* рельєфу $R(x,y)$ значення r_i^k є величина проєкції на площину XOY відрізка кривої $z = R(x, y)$ довжиною X_M (або X^*) в напрямку λ . Визначимо $r_i^k, k = \overline{1,8}$, за допомогою Допущення 3.2, 3.3 і Зауваження 3.3.

Зафіксуємо значення індексу k і розглянемо величину r_i^k (рис. 3.4).

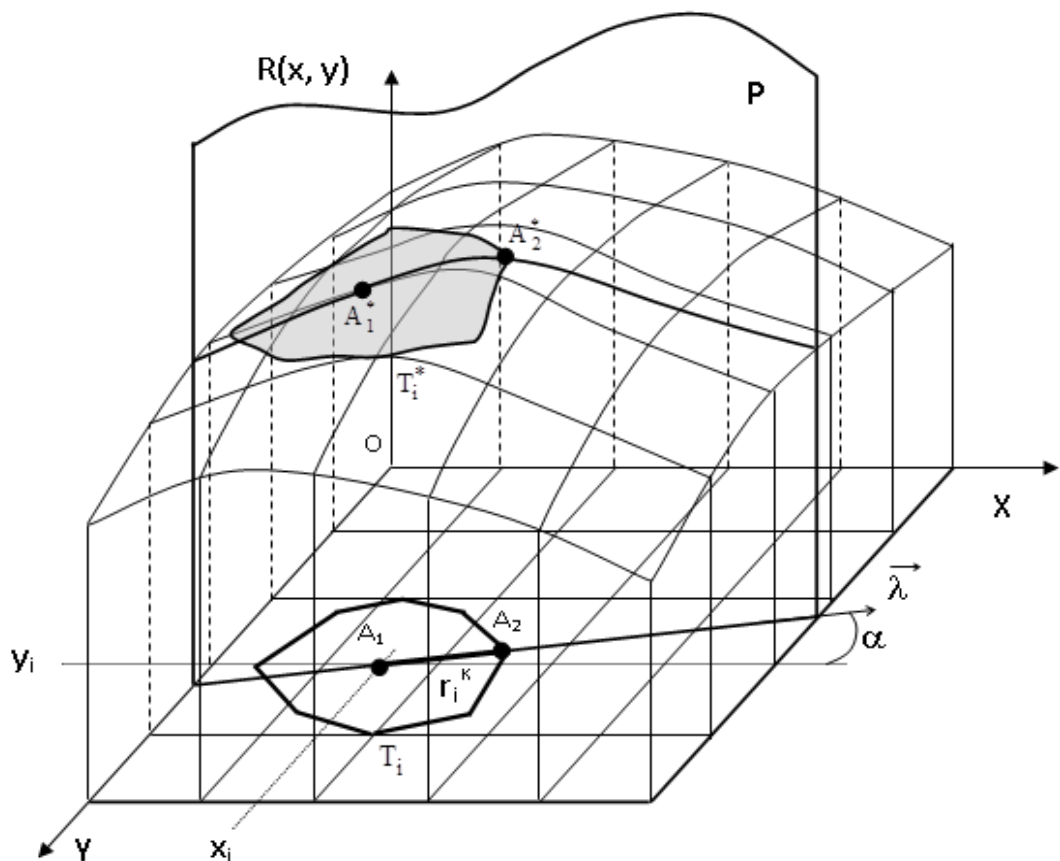


Рисунок 3.4 – Визначення величини r_i^k

Відрізок $A_1A_2 = r_i^k$ на рис. 3.4 являє собою проєкцію на горизонтальну площину відрізка $A_1^*A_2^*$ кривої, отриманої в результаті

перетину поверхні рельєфу вертикальною площиною P , що проходить через точку $A_1^*(x_i, y_i)$ в напрямку λ .

Довжина L^* кривої $A_1^*A_2^*$ дорівнює X_M (або X^*). Для визначеності будемо вважати, що $L^* = X_M$.

Рівняння прямої, що проходить через точку $A_1(x_i, y_i)$ в напрямку λ має вигляд:

$$f_1(x) = y_i + k(x - x_i),$$

де кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y(x_i, y_i)}{v_x(x_i, y_i)}$, α – кут між позитивним напрямом осі Ox і прямою A_1A_2 .

Функцію рельєфу $R(x, y)$ на прямій, що проходить через точку $A_1(x_i, y_i)$ в напрямку λ , можна представити як

$$R(x, y)|_\lambda = R[x, f_1(x)] = R_1(x).$$

У цьому випадку довжина L^* кривої $A_1^*A_2^*$ визначається за формулою:

$$L^* = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [R_1'(x)]^2} dx, \quad (3.9)$$

де невідома верхня межа інтегрування x_2 визначається з умови

$$L^* = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [R_1'(x)]^2} dx = X_M. \quad (3.10)$$

Інтеграл (3.9) обчислюється будь-яким чисельним методом, тому рівняння (3.10) для визначення x_2 замінюється таким

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [R_1'(x)]^2} dx - X_M \leq \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – екзогенна мала величина, що задає точність рішення.

Ордината y_2 точки A_2 визначається за формулою:

$$y_2 = \frac{v_y(x_i, y_i)}{v_x(x_i, y_i)} x_2 + y_1 - \frac{v_y(x_i, y_i)}{v_x(x_i, y_i)} x_1.$$

Довжина відрізка $A_1A_2 = r_i^k$ знаходиться як

$$r_i^k = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Наведені міркування справедливі для всіх значень індексу $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$, відповідних 8-ми напрямкам обуреного приземного вітру, узгодженим з розою вітрів даної області.

Параметри обуреного приземного вітру визначені за схемою п.3.1.2.2. Так як швидкість і напрям обуреного приземного вітру є функція координат поточної точки області, в яку поміщається полюс T_i , отже, зміна положення об'єкту S_i (і пов'язаної з ним зони T_i) викличе зміну метричних характеристик і форми T_i .

3.1.3 Математична модель оптимізаційної задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням рельєфу місцевості

Нехай є замкнута обмежена багатокутна, в загальному випадку багатозв'язна область $S_0 \subset \mathbb{R}^2$, задана координатами її вершин v_ψ , $\psi = \overline{1, \Psi}$.

В області S_0 , виділяється область розміщення Ω

$$\Omega = S_0 / \bigcup_{c=1}^C \Omega_c,$$

де $\Omega_c(a_c, b_c)$ – множина опуклих областей заборони, (a_c, b_c) – фіксовані параметри розміщення, $c = \overline{1, C}$ (рис. 3.5).

Кожна точка $(x, y) \in \Omega$ характеризується параметром $\xi = \xi(x, y)$.

Нехай також є скінчений набір пожежонебезпечних об'єктів S_i , можливі пожежі на яких породжують в області Ω зони забруднення T_i , $i = \overline{1, N}$, що мають просторову форму «опуклий восьмикутник».

Об'єкт T_i задається набором $r = \{r_i^k\}$ відстаней від полюса об'єкта до його вершин $v_i^k(x_i^k, y_i^k)$ $k = \overline{1, 8}$, виду (3.1). Вектори \vec{r}_i^k орієнтовані по розі вітрів.

Довжини векторів \vec{r}_i^k є функції параметра $\xi(x_i, y_i)$ (формула 3.2). Отже, метричні характеристики і просторова форма об'єктів T_i є змінними.

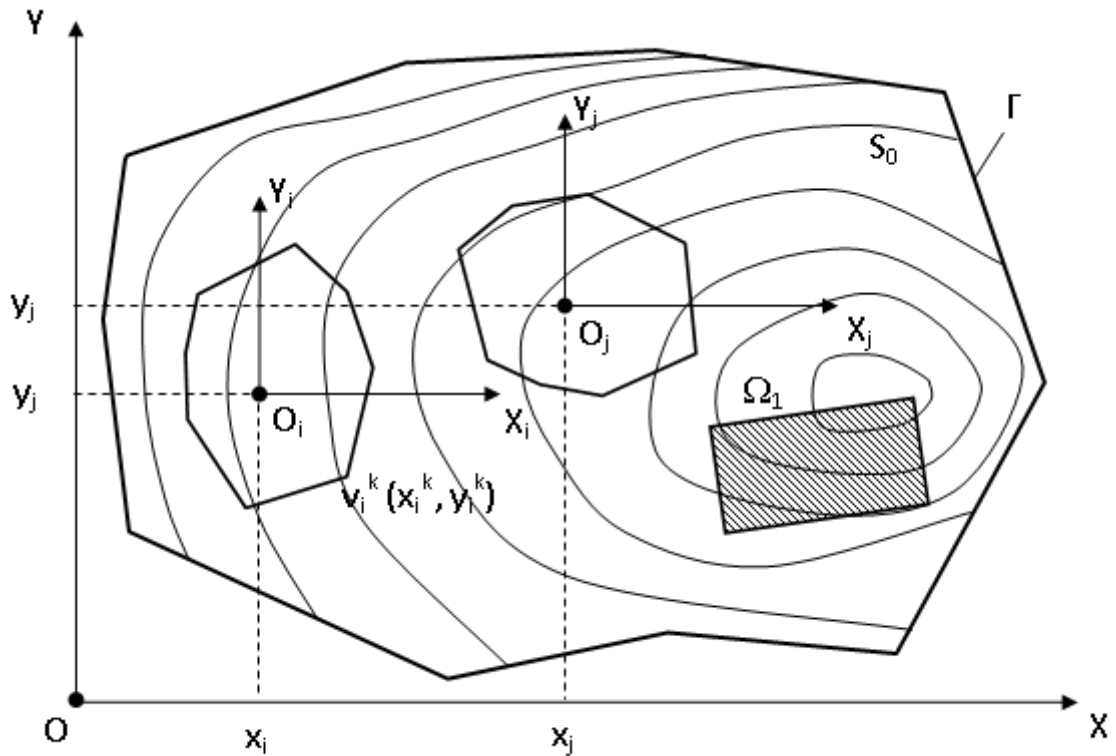


Рисунок 3.5 – Область S_0 з розміщеними об'єктами, зоною заборони Ω_1 і ізолініями рельєфу $\mathfrak{R}(x, y)$

Тоді оптимізаційна задача розміщення N пожежонебезпечних об'єктів в області Ω з урахуванням її рельєфу формулюється в такий спосіб:

визначити таке місце розташування пожежонебезпечних об'єктів S_i , $i = \overline{1, N}$, в області Ω , щоб максимальна сумарна концентрація аерозольних викидів можливих пожеж в кінцевій множині точок контролю $P = \{p_\zeta\} = \{x_\zeta^p, y_\zeta^p\}$ $\zeta = \overline{1, \bar{\lambda}}$, була мінімальною, тобто знайти

$$\min_{(x_i, y_i) \in D} \max_{(x_\zeta^p, y_\zeta^p) \in P} \sum_{i=1}^N C(x_\zeta^p, y_\zeta^p, x_i, y_i, G_i, Q). \quad (3.11)$$

Результатом рішення задачі (3.11) є вектор $u = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N)$ параметрів розміщення пожежонебезпечних об'єктів.

Дане задача допускає різні трактування щодо виду функції мети, однак загальним для цього класу задач є те, що область допустимих рішень D формується системою обмежень, яка включає геометричні обмеження на параметри розміщення об'єктів T_i і фізичні обмеження на характеристики результуючого поля приземних концентрацій аерозольних викидів пожежі в області Ω .

Крім того, система обмежень може містити додаткові (технологічні) умови.

Геометричні обмеження на розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області Ω включають в себе умови виду (1.2), (1.3) приналежності об'єктів області та умови їх попарного взаємного неперетину, а також умови взаємного розміщення об'єктів T_i і нерухомих областей заборони Ω_c ($c = \overline{1, C}$) – екологічно значущих зон, розміщення в яких об'єктів S_i не допускається:

$$\Phi_{i0}(x_i, y_i, m_0) \geq 0, \quad (3.12)$$

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0, \quad (3.13)$$

$$\Phi_{ic}(x_i, y_i, x_c, y_c) \geq 0, \quad c = \overline{1, C}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j, \quad (3.14)$$

де $\Phi_{i0}(x_i, y_i, m_0)$ – Φ -функція об'єкта T_i і області $\overline{\Omega} = c1(R^2 \setminus \Omega)$, m_0 – метричні характеристики області Ω ; $\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j)$ – Φ -функція об'єктів T_i і T_j ; $\Phi_{ic}(x_i, y_i, x_c, y_c)$ – Φ -функція об'єкта T_i і нерухомою області заборони Ω_c .

Зауваження 3.4. Для деяких практичних задач умова (3.12) замінюється умовою приналежності об'єктів S_i області розміщення Ω : $(x_i, y_i) \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}$.

Фізичні обмеження в загальному випадку представляються у вигляді системи нерівностей

$$D_\delta c(x, y, u, G, Q)|_\Omega <(>) c_\delta,$$

де D_δ – заданий оператор; $c(x, y, u, G, Q)$ – результуюче концентраційне поле в області Ω ; c_δ – задана функція, $\delta = \overline{1, \Delta}$.

У задачі (3.11) фізичним обмеженням на характер поля приземних концентрацій аерозольних викидів пожеж є умова:

$$C(x, y, u, G, Q)|_{(x,y) \in P} + C_\phi \leq \text{ПДК}, \quad (3.15)$$

Де C – функція концентрації забруднюючих викидів, що досягається викидами з N джерел; C_{ϕ} – фонова концентрація.

Зауважимо, що концентрація забруднюючих викидів в заданій точці від N джерел з урахуванням фону є суперпозиція

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N + C_{\phi},$$

де C_1, C_2, \dots, C_N – концентрації забруднюючих домішок, що викидаються відповідно 1-м, 2-м, ..., N -м джерелами.

Технологічні обмеження, що накладаються на розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області Ω , представляються, як правило, набором максимальних (мінімальних) допустимих відстаней $L_{i\mu}^*$ між розміщеними об'єктами і транспортною мережею, інженерними комунікаціями, іншими об'єктами та ін. .:

$$L_{i\mu} \geq (\leq) L_{i\mu}^*, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \mu = 1, 2, \dots, M. \quad (3.16)$$

Відзначимо основні властивості оптимізаційної задачі (3.11), що впливають з її математичної постановки:

Властивість 3.1. Простір параметрів, в якому визначається екстремум функції мети завдання (5.11), має розмірність $2N$, де N – число розміщуваних пожежонебезпечних об'єктів $D \subset R^{2N}$;

Властивість 3.2. Число обмежень N , що описують область D допустимих рішень задачі (5.11), квадратично залежить від числа розміщуваних пожежонебезпечних об'єктів:

$$N = O\{1,5 \Psi N + 8N(N - 1) + 8N \cdot C \cdot \ell + \Delta\},$$

де $\ell = \max_{c=1, C} \varpi_c$, ϖ_c – число вершин зони заборони $\Omega_c(a_c, b_c)$, Δ , – кількість

обмежень на результуюче концентраційне поле;

Властивість 3.3. Для формалізації обмежень (3.15) на розподіл поля концентрації забруднюючої домішки необхідно представити рішення крайової задачі математичної фізики як функцію від параметрів u , G і Q .

Визначимо явний вид обмежень оптимізаційної задачі (3.11).

3.2 Формалізація системи обмежень оптимізаційної задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів з урахуванням рельєфу області

Формалізація геометричних обмежень (3.12) – (3.14) задачі виконується на основі апарату Φ -функцій з урахуванням особливостей впливу фізичного поля, аналітичний опис фізичних обмежень (3.15) базується на результатах параметризації концентраційного поля в Ω .

3.2.1 Параметризація концентраційного поля аерозольних викидів пожежі

Параметризація концентраційного поля аерозольних викидів пожежі в залежності від його фізичних і метричних характеристик, параметрів розміщення в області, кліматичних умов в області (напрямку і швидкості вітру) була проведена в роботах [41, 120, 123]. Основними параметрами є: приземна швидкість вітру v_{g1} в районі пожежі, інтенсивність M викиду пожежею продуктів горіння і висота H початкового підйому продуктів горіння.

Величини M і H виражаються через фізичні параметри пожежі та кліматичні характеристики в області Ω :

- залежність інтенсивності M викиду пожежі від його характеристик, умов горіння і властивостей горючої речовини має вигляд:

$$M = \lambda_g v_L \rho_{ГВ} S_{ГОР} \quad (3.17)$$

де λ_g – коефіцієнт, що характеризує вихід аерозольних продуктів при горінні ($\lambda < 1$); v_L – лінійна швидкість горіння; $\rho_{ГВ}$ – щільність горючої речовини, $S_{ГОР}$ – площа пожежі;

- висота H початкового підйому продуктів горіння є сума трьох складових: $H = h_1 + h_2 + h_3$, де h_1 – висота області горіння над поверхнею землі; h_2 – висота полум'я; h_3 – висота конвективного факела пожежі. Значення h_1 вважається відомим (наприклад, це висота палаючого резервуара з нафтопродуктами).

При визначенні h_2 використовується величина порогового значення швидкості вітру v_0 , яка визначається за формулою

$$v_0 = 1.9(S_{\text{ГОР}}\Delta Q_C \chi v_L \rho_{\text{ГВ}})^{1/5} \left(\frac{2c_p T_0 \rho_0}{\pi \varphi_{\Gamma} \Delta Q_C} \right)^{1/3},$$

Тоді висота полум'я h_2 при $v_{g1} \leq v_0$ визначається наступним чином

$$h_2 = 28.06 \frac{(S_{\text{ГОР}} v_L \rho_{\text{ГВ}} \chi)^{2/5}}{(\Delta Q_C)^{1/5}} r^{3/5} - 1.02D, \quad (3.18)$$

де D – характерний розмір області горіння (наприклад, діаметр палаючого резервуара з нафтопродуктами); ΔQ_C – питома теплота згоряння горючої речовини; r – стехіометрична концентрація парів горючої речовини в повітрі; χ – коефіцієнт, що враховує неповноту згоряння горючої речовини, $\chi \leq 1$.

Зауваження 3.5. При швидкості приземного вітру $v_{g1} \leq v_0$ величина h_2 не залежить від v_{g1} .

При $v_{g1} > v_0$, висота h_2 знаходиться за формулою:

$$h_2 = \left[28.06 \frac{(S_{\text{ГОР}} v_L \rho_{\text{ГВ}} \chi)^{2/5}}{(\Delta Q_C)^{1/5}} r^{3/5} - 1.02D \right] \times$$

$$\times \left(\frac{v_{g1}}{1.9(S_{\text{ГОР}}\Delta Q_C \chi v_L \rho_{\text{ГВ}})^{1/5}} \right)^{-1/2} \left(\frac{2c_p T_0 \rho_0}{\pi \varphi_{\Gamma} \Delta Q_C} \right)^{1/6}. \quad (3.19)$$

де c_p – питома теплоємність повітря; ρ_0 і T_0 – відповідно щільність і температура навколишнього повітря.

Вираз для висоти конвективного факелу пожежі h_3 має вигляд

$$h_3 = \frac{1.9(S_{\text{ГОР}}\Delta Q_C \chi v_L \rho_{\text{ГВ}})^{1/5} D}{v_{g1}} \left(b_1 + \frac{2.29 b_2 D h_2^{-1}}{v_{g1}^2 (S_{\text{ГОР}}\Delta Q_C \chi v_L \rho_{\text{ГВ}})^{-2/5}} \right), \quad (3.20)$$

де b_1 і b_2 – постійні коефіцієнти, що залежать від швидкості вітру і від стану атмосфери в районі пожежі [41].

Таким чином, отриманий явний вид залежностей величин M і H від параметрів пожежі та приземного вітру:

$$M = M(G, v_{gl}), \quad H = H(G, v_{gl}).$$

В роботі [120] приземна швидкість вітру і метричні характеристики об'єктів вважалися постійними в межах області розміщення: $v_{gl} = \text{const}$, $r_i^k = \text{const}$. При побудові моделі розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області з урахуванням її рельєфу для визначення величини v_{gl} в кожній точці області розраховувалося поле швидкостей приземного вітру над рельєфом. В цьому випадку

$$v_{gl} = v_{gl}(x_i, y_i, \mathfrak{R}(x, y)),$$

а метричні характеристики об'єктів, що розміщуються

$$r_i^k = r_i^k(x_i, y_i, v_{gl}(x_i, y_i, \mathfrak{R}(x, y)), M(G, v_{gl}), H(G, v_{gl})).$$

3.2.2 Побудова Φ -функції об'єктів з урахуванням концентраційного поля забруднюючої домішки

Доповнимо аналітичне представлення Φ -функції двох об'єктів урахуванням фізичних обмежень (3.15) на величину результуючого поля концентрації забруднюючої домішки (викидів пожеж).

Нехай є пара джерел S_i , і S_j з восьмикутними зонами забруднення відповідно T_i , і T_j . Розглянемо окремо випадки, коли об'єкти T_i , і T_j є опуклими і неопуклими.

Об'єкти T_i і T_j опуклі

Φ -функція опуклих багатокутних об'єктів $T_i(x_i, y_i)$ и $T_j(x_j, y_j)$, без урахування їх фізичної природи, запишеться у вигляді [84]:

$$\Phi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \max(f_1(x_i, y_i, x_j, y_j), f_2(x_i, y_i, x_j, y_j), \dots, f_{g(i,j)}(x_i, y_i, x_j, y_j)), \quad (3.21)$$

де $g(i, j)$ – число орієнтованих граней 0-рівня Φ -функції; $f_1(x_i, y_i, x_j, y_j)$ – функції обмежень виду $f_1(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0$.

Процес побудови функціональної залежності виду $f_1(x_i, y_i, x_j, y_j)$ для 1-го або 2-го типу торкання аналогічний алгоритму, описаного в п. 2.2.

Тоді умова неперетину об'єктів T_i , і T_j має вигляд

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0$$

і аналітично виражається набором нерівностей

$$\langle f_l(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0, \quad \overline{l=1, g(i, j)} \rangle.$$

Якщо об'єкти T_i , і T_j є моделями зон забруднення, присутність фізичного поля вносить особливості в опис $\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j)$ – функції.

Розглянемо випадок взаємного розташування об'єктів T_i , і T_j (рис. 3.6а) і результуюче концентраційне поле в області (рис. 3.6б).

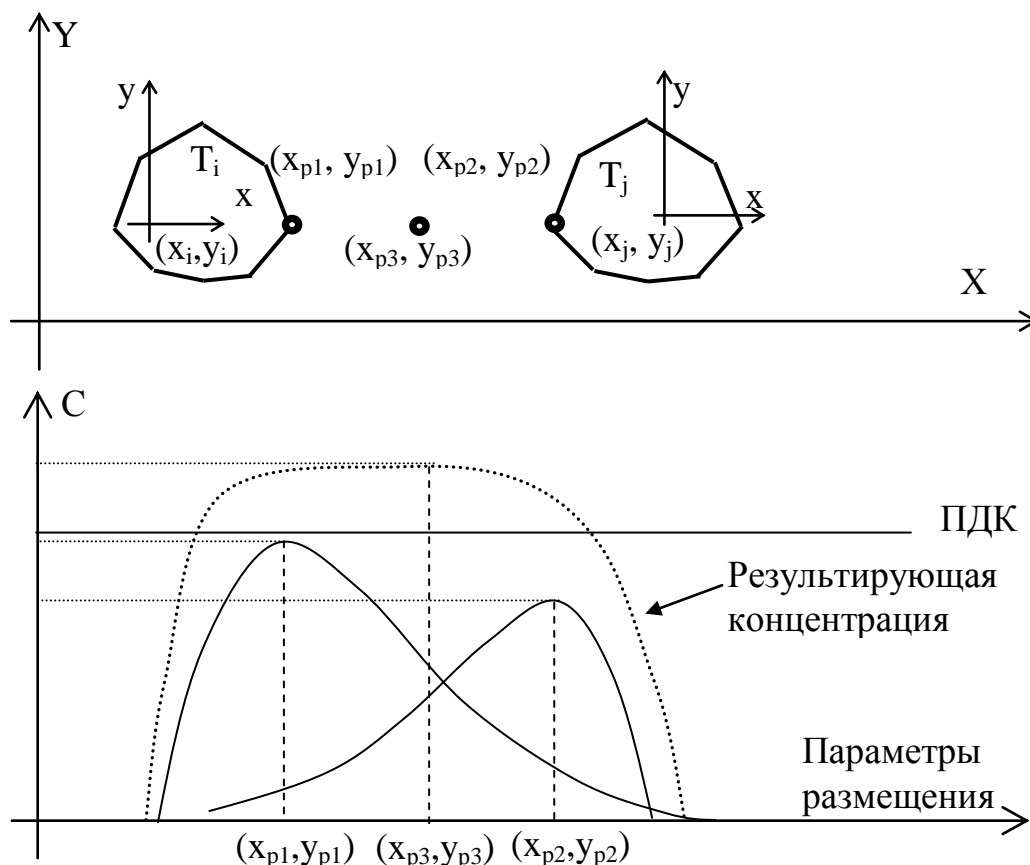


Рисунок 3.6 – Результирує концентраційне поле двох джерел

а) розміщення зон забруднення T_i , і T_j і точок контролю концентраційного поля (x_{pk}, y_{pk}) , $k=1, 2, 3$; б) розподіл концентрації забруднюючої домішки

Умова (3.13) взаємного неперетинання об'єктів T_i , і T_j при цьому виконується, а обмеження (5.15) на величину результуючого поля концентрації забруднюючої домішки в точці p_3 – порушується:

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0, \quad (C_{Mi} + C_{Mj})|_{p_3} > \text{ПДК}.$$

Зауваження 3.6. Вигляд фізичного обмеження (3.15) при розміщенні зон забруднення T_i і T_j від можливих пожеж на об'єктах S_i і S_j , викликає необхідність введення мінімально-допустимих відстаней d_{ij} між ними.

Область перетину D_{ij} об'єктів T_i і T_j (на рис. 3.7 заштрихована) задається умовою:

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) < 0.$$

Розглянемо властивості області D_{ij} , що впливають з постановки оптимізаційної задачі (3.11).

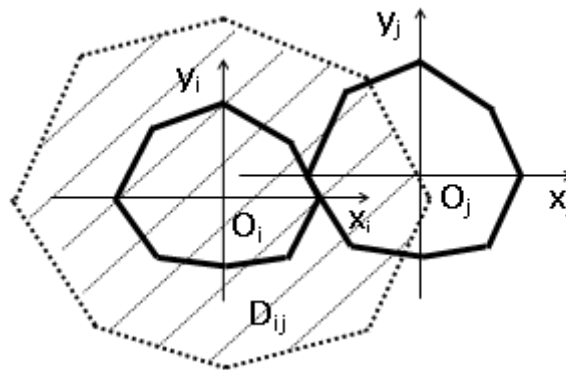


Рисунок 3.7 – Проекція області D_{ij} на простір R^2

Властивість 3.4. При розміщенні об'єкта T_j у внутрішніх точках області D_{ij} об'єкти T_i і T_j або перетинаються

$$\text{int}T_i \cap \text{int}T_j \neq \emptyset,$$

або має місце нерівність

$$C(x, y, u, G, Q)|_{(x,y) \in P_\zeta} + C_\phi > \text{ПДК}, \quad \zeta = \overline{1, \lambda}.$$

Властивість 3.5. На межі області D_{ij} має місце рівність

$$C(x, y, u, G, Q)|_{(x,y) \in P_\zeta} + C_\phi = \text{ПДК}, \quad \zeta = \overline{1, \lambda},$$

або виконується

$$\text{cl}T_i(u_i) \cap \text{cl}T_j(u_j) \neq \emptyset \text{ и } \text{int}T_i \cap \text{int}T_j = \emptyset,$$

за умови, що

$$C(x, y, u, G, Q)|_{(x,y) \in P_\zeta} + C_\Phi \leq \text{ПДК}.$$

Такі об'єкти назвемо щільно розташованими.

Властивість 3.6. Поза області D_{ij} об'єкти T_i і T_j не мають спільних точок

$$T_i \cap T_j = \emptyset$$

і виконується умова

$$C(x, y, u, G, Q)|_{(x,y) \in P_\zeta} + C_\Phi \leq \text{ПДК}, \quad \zeta = \overline{1, \lambda}.$$

Розглянемо окремо випадки легкої і важкої домішки.

Випадок легкої домішки. Рішення крайової задачі (1.19) – (1.21), що дає значення наземної концентрації ($z = 0$) домішки від точкового джерела S_i з інтенсивністю викиду M і початковою висотою підйому домішки H , за умови, що початок власної системи $Ox_i Y_i$ координат об'єкту S_i збігається з початком нерухомої системи OXY , має вигляд (1.22).

Тоді, якщо параметри розміщення (x_i, y_i) об'єкта S_i (відповідно T_i) не є нульовими (об'єкт S_i є рухомим), значення концентрації в довільній точці (x, y) області розміщення Ω обчислюється за формулою:

$$c_{Лі}(x, y, x_i, y_i, G_i, Q) = \frac{M}{2(1+n)\sqrt{\pi k_0(x-x_i)} k_1(x-x_i)} \exp\left(-\frac{v_{gl} H^{1+n}}{(1+n)^2 k_1(x-x_i)} - \frac{(y-y_i)^2}{4k_0(x-x_i)}\right).$$

При взаємодії пари об'єктів в точках області відбувається сумація концентрацій забруднюючих домішок від кожного з них. Тоді загальне значення концентрації (наприклад, в точці (x_{p3}, y_{p3}) на рис. 3.6) становить

$$C_{Ліj} = c_{Лі}(x_{p3}, y_{p3}, x_i, y_i, G_i, Q) + c_{Лj}(x_{p3}, y_{p3}, x_j, y_j, G_j, Q) + C_\Phi. \quad (3.22)$$

Необхідно, щоб

$$f_{g(i,j)+1} := -C_{Ліj} + \text{ПДК} \geq 0.$$

Тоді Φ -функція об'єктів T_i і T_j з урахуванням поля концентрацій запишеться у вигляді:

$$\Phi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \max(f_1(x_i, y_i, x_j, y_j), f_2(x_i, y_i, x_j, y_j), \dots, f_{g(i,j)+1}(x_i, y_i, x_j, y_j)). \quad (3.23)$$

Випадок важкої домішки. Розв'язок крайової задачі (1.19) – (1.21) для випадку важкої домішки, що осідає, (швидкість осідання w) при аналогічних умовах має вигляд (1.23).

Тоді, якщо параметри розміщення (x_i, y_i) полюса об'єкта S_i (відповідно полюса його зони забруднення T_i) не є нульовими (об'єкт S_i є рухомим), значення концентрації в довільній точці (x, y) області розміщення Ω обчислюється за формулою:

$$c_{T_i}(x, y, x_i, y_i, 0) = \frac{MH^{n+\omega(1+n)} v_{g1}^{1.5+\omega}}{2(1+n)\Gamma(1+\omega)\sqrt{\pi k_0(x-x_i)} (k_1(x-x_i))^{1+\omega}} \times \exp\left(-\frac{v_{g1}H^{1+n}}{(1+n)^2 k_1(x-x_i)} - \frac{(y-y_i)^2}{4k_0(x-x_i)}\right).$$

При взаємодії пари об'єктів в точках області відбувається підсумовування концентрацій забруднюючих домішок від кожного з них. Тоді загальне значення концентрації в точці (x_{p3}, y_{p3}) становить

$$C_{T_{ij}} = c_{T_i}(x_{p3}, y_{p3}, x_i, y_i, G_i, Q) + c_{T_j}(x_{p3}, y_{p3}, x_j, y_j, G_j, Q) + C_{\Phi}. \quad (3.24)$$

Необхідно, щоб

$$f_{g(i,j)+1} := -C_{T_{ij}} + \text{ПДК} \geq 0.$$

Тоді Φ -функція об'єктів T_i і T_j запишеться у вигляді:

$$\Phi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \max(f_1(x_i, y_i, x_j, y_j), f_2(x_i, y_i, x_j, y_j), \dots, f_{g(i,j)+1}(x_i, y_i, x_j, y_j)). \quad (3.25)$$

Зауваження 3.7. При наявності в області інших джерел забруднюючих домішок S_f с параметрами розміщення (x_f, y_f) , $f = \overline{1, F}$, є необхідною оцінка їх вкладу в загальне значення концентрації $C_{L_{ij}}$ або $C_{T_{ij}}$. Тоді формули (3.22) і (3.24) для довільної точки $(x, y) \in \Omega$ набудуть вигляду:

$$C_{Лij} = c_{Лi}(x, y, x_i, y_i, G_i, Q) + c_{Лj}(x, y, x_j, y_j, G_j, Q) + C_{\Phi} + \sum_{f=1}^F c_{Лf}(x, y, x_f, y_f, G_f, Q)$$

$$C_{Tij} = c_{Ti}(x, y, x_i, y_i, G_i, Q) + c_{Tj}(x, y, x_j, y_j, G_j, Q) + C_{\Phi} + \sum_{f=1}^F c_{Tf}(x, y, x_f, y_f, G_f, Q)$$

Зауваження 3.8. Побудова Φ -функції двох опуклих об'єктів T_i і T_j відповідно за формулами (3.23), (3.25), при якому область D_{ij} має властивості 3.4 – 3.6, гарантує виконання обмеження (3.15) на величину результуючого концентраційного поля одночасно з виконанням геометричних обмежень (3.13).

Об'єкти T_i і T_j неопуклі

Якщо множини T_i і T_j неопуклі, їх можна представити у вигляді об'єднання опуклих підмножин виду

$$T_i = \bigcup_{k=1}^{K_i} T_i^k, \quad T_j = \bigcup_{k=1}^{K_j} T_j^k. \quad (3.26)$$

Знову розглянемо методику побудови Φ -функції об'єктів T_i і T_j відволікаючись від їх фізичної природи.

За побудовою параметри розміщення (x_i, y_i) , і (x_j, y_j) , об'єктів T_i і T_j є одночасно параметрами розміщення всієї множини $\bigcup_{k=1}^{K_i} T_i^k$ і $\bigcup_{k=1}^{K_j} T_j^k$ відповідно. Тоді аналітичний вираз Φ -функції об'єктів T_i і T_j має вигляд

$$\Phi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \min \{ \Phi_{ij}^{11}(x_i, y_i, x_j, y_j), \Phi_{ij}^{12}(x_i, y_i, x_j, y_j), \dots, \Phi_{ij}^{K_i K_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) \}, \quad (3.27)$$

де $\Phi_{ij}^{kk}(x_i, y_i, x_j, y_j)$ – Φ -функція опуклих об'єктів виду (3.26).

У загальному випадку об'єкти T_i і T_j є неопуклі восьмикутники (рис. 3.8), кількість неопуклих Ne_{v_i} вершин яких лежить в межах $1 \leq Ne_{v_i} \leq 4$. Без обмеження спільності припустимо, що, що $Ne_{v_i} = 1$ (рис. 3.8б). Тоді формула (3.27) набуває вигляду

$$\Phi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \max \{ \Phi_{ij}^{11}(x_i, y_i, x_j, y_j), \Phi_{ij}^{12}(x_i, y_i, x_j, y_j), \Phi_{ij}^{21}(x_i, y_i, x_j, y_j), \Phi_{ij}^{22}(x_i, y_i, x_j, y_j) \}.$$

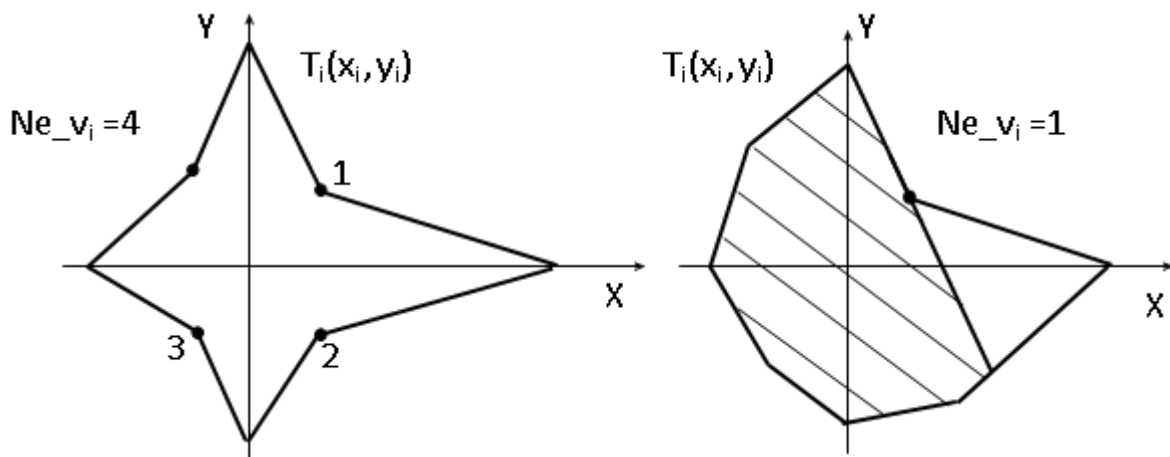


Рисунок 3.8 – Зони забруднення викидами пожежі, що моделюються неопуклими восьмикутниками

Відзначимо, що при побудові Φ -функції неопуклих об'єктів з'являються додаткові вершини і сторони, однак на остаточний результат (3.27) вони не впливають.

Випадок легкої домішки. Множина опуклих об'єктів $\bigcup_{k=1}^{K_i} T_i^k$, що становлять об'єкт T_i , має одні й ті ж параметри: M – інтенсивність викиду, H – висоту джерела, (x_i, y_i) – параметри розміщення джерела. Тому функція $f_{g(i,j)+1} := -C_{Лij} + ПДК$ має один і той же вид для всіх пар об'єктів (T_i^k, T_j^k) , $i=1,2,\dots,K_i, j=1,2,\dots,K_j$.

Тоді Φ -функція неопуклих об'єктів T_i і T_j з урахуванням обмеження на значення поля концентрацій запишеться у вигляді:

$$\Phi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \max \{ f_{g(i,j)+1}, \min [\Phi_{ij}^{11}(x_i, y_i, x_j, y_j), \Phi_{ij}^{12}(x_i, y_i, x_j, y_j), \dots, \Phi_{ij}^{K_i K_j}(x_i, y_i, x_j, y_j)] \}. \quad (3.28)$$

Випадок важкої домішки. Як і в разі легкої домішки, параметри розміщення та фізичні характеристики множини опуклих об'єктів $\bigcup_{k=1}^{K_i} T_i^k$, що становлять об'єкт T_i , однакові.

Тоді, з урахуванням функції $f_{g(i,j)+1} := -C_{T_{ij}} + \text{ПДК } \Phi$ -функція набуде вигляду:

$$\Phi(x_i, y_i, x_j, y_j) = \max \{ f_{g(i,j)+1}, \min [\Phi_{ij}^{11}(x_i, y_i, x_j, y_j), \dots, \Phi_{ij}^{K_i K_j}(x_i, y_i, x_j, y_j)] \}. \quad (3.29)$$

Зауваження 3.9. Побудова Φ -функції двох неопуклих об'єктів T_i і T_j , яка здійснюється за правилом, запропонованим в даній главі, дозволяє врахувати фізичне обмеження (3.15) в геометричній умові взаємного неперетину об'єктів (3.13).

3.3 Метод розв'язання оптимізаційної задачі розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області з урахуванням її рельєфу

Через складність оптимізаційної задачі (3.11) – (3.16) не доводиться розраховувати на можливість отримання точного розв'язку. Тому пропонується метод пошуку раціональних рішень і їх перебір, в результаті якого визначається наближене значення локального екстремуму функції мети.

Пропонований метод розв'язання оптимізаційної задачі (3.11) – (3.16) складається з наступних основних етапів:

- визначення початкового варіанту розміщення пожежонебезпечних об'єктів S_i , $i = \overline{1, N}$ в області Ω . Дана задача формулюється і вирішується як задача пошуку допустимого розміщення багатокутних об'єктів T_i із змінними метричними характеристиками;
- пошук вектора u^* , відповідного локальному мінімуму функції мети

$$F(u) = \max_{(x_\zeta^p, y_\zeta^p) \in P} \sum_{i=1}^N C(x_\zeta^p, y_\zeta^p, x_i, y_i, G, Q);$$

- перебір локальних мінімумів функції мети. При цьому виділяється рекордне значення функції мети і визначається відповідний йому вектор u^{**} параметрів розміщення об'єктів.

3.3.1 Визначення початкового варіанту розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області Ω

Це задача виду:

знайти допустимий вектор $u^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_i^0, y_i^0, \dots, x_N^0, y_N^0) \in D_0$ параметрів розміщення об'єктів T_i , $i = \overline{1, N}$, в області Ω , для якого область D_0 допустимих значень формується обмеженнями (3.12) – (3.16).

Для розв'язання даної задачі пропонується евристичний підхід, заснований на методі послідовно-одиначного розміщення плоских орієнтованих геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками.

Суть методу послідовно-одиначного розміщення полягає в тому, що на кожній ітерації змінними вважаються параметри розміщення лише одного об'єкта. Всі раніше розміщені об'єкти вважаються нерухомими.

Таким чином, в даному випадку на кожному кроці процесу послідовно-одиначного розміщення розв'язується задача виду:

знайти: $u_i^0 \in D_{0_i} \subset R^2$,

де область допустимих рішень D_{0_i} задається \aleph_i обмеженнями

$$\aleph_i = O\{1,5\Psi + 16(N - 1) + 8 \cdot C \cdot \lambda + \Delta\}.$$

Відзначимо, що задача визначення початкового варіанту розміщення пожежонебезпечних об'єктів в області Ω не є оптимізаційною.

Ітераційний процес пошуку початкового розміщення об'єктів $\{T_i\}$ в області Ω складається з наступної послідовності кроків:

1. Визначення послідовності розміщення джерел викидів. Джерела S_i , $i = \overline{1, N}$, (пожежонебезпечні об'єкти) ранжуються за величиною площі зони забруднення T_i , визначеної для умов плоскої горизонтальної рівнини і параметрів вітру, відповідного розі вітрів незбуреного метеорологічного вітру.

Іншими словами, на цьому етапі не враховується вплив рельєфу області розміщення. Першим розміщується джерело, що має найбільшу площу зони забруднення. При постійній швидкості вітру, як впливає з виразів (1.24) і (1.25), це джерело з максимальною висотою початкового підйому викидів.

2. Побудова допустимої області розміщення об'єкта T_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Оскільки в області Ω присутні зони заборони, то область на кожному кроці рішення є багатозв'язною. Система обмежень буде включати в себе умови (3.12) – (3.16).

При $i = 1$ (розміщення першого об'єкта) в області Ω відсутні інші розміщувані об'єкти, тому система обмежень буде включати в себе лише умови (3.12), (3.14) – (3.16).

3 Визначення параметрів розміщення об'єкта T_i в області Ω_i .

4 Повторення ітерацій 2 - 3 для решти об'єктів.

Зауваження 3.10. Застосування методу послідовно-одиначного розміщення позбавляє від необхідності одночасної перевірки виконання всіх умов попарного взаємного неперетину об'єктів.

3.3.2 Визначення локального мінімуму функції мети основної задачі

Вектор u^0 початкового розміщення об'єктів T_i є початковою точкою алгоритму розв'язання оптимізаційної задачі (3.11) з обмеженнями (3.12) – (3.16):

знайти

$$\min_{(x_i, y_i) \in D} \max_{(x_\zeta^p, y_\zeta^p) \in P} \sum_{i=1}^N C(x_\zeta^p, y_\zeta^p, x_i, y_i, G_i, Q),$$

де D :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{i0}(x_i, y_i, m_0) \geq 0, \\ \Phi_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0, \\ \Phi_{ic}(x_i, y_i, x_c, y_c) \geq 0, \\ C(x, y, u, G, Q)|_{(x, y) \in P} + C_\phi \leq \text{ПДК}, \\ L_{i\mu} \geq (\leq) L_{i\mu}^*, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \mu = 1, 2, \dots, M. \end{array} \right.$$

Для розв'язання задачі використовується схема методу мінімізації за групами змінних [124], що представляють собою координати полюса об'єкта T_i , $i = \overline{1, N}$, який має розміщуватися на поточній ітерації.

Введемо позначення:

p – номер ітерації, кожна ітерація складається з N кроків, де N – число розміщуваних об'єктів;

$u_i^p = (x_i^p, y_i^p)$ – параметри розміщення об'єкта T_i , на p -й ітерації;

$u^p = (u_1^p, u_2^p, \dots, u_N^p)$ – вектор координат полюсів об'єктів на p -й ітерації.

Загальна схема алгоритму наближення до локального екстремуму складається з наступних етапів.

1 За деяким правилом визначається об'єкт T_i , що має на p -й ітерації параметри розміщення $u_i^p = (x_i^p, y_i^p)$.

2 Виділяються обмеження, що формують в околиці полюса об'єкта T_i область D_i^p допустимих параметрів його розміщення на p -й ітерації.

3 Визначаються нові параметри розміщення об'єкта T_k , такі, що

$$(u_1^p, u_2^p, \dots, u_k^{p+1}, \dots, u_N^p) \in D_k^p \quad \text{и} \\ F(u_1^p, u_2^p, \dots, u_i^{p+1}, \dots, u_N^p) \leq F(u_1^p, u_2^p, \dots, u_i^p, \dots, u_N^p).$$

4 Якщо $u_i^{p+1} = u_i^p$, то $i = i + 1$. При $i \leq N$ здійснюється повернення до кроку 1.

5 Якщо $u^{p+1} \neq u^p$, то переходять до $(p + 1)$ -ої ітерації. В іншому разі параметри розміщення об'єктів, отримані на p -ої ітерації, вважаються розв'язком задачі.

Зауваження 3.11. Зсув об'єкта T_i (крок 3) виконується в напрямку антиградієнта функції $F(u)$ за параметрами розміщення T_i . В цьому випадку конкретні алгоритми, що реалізують наведену загальну схему, можуть відрізнятися правилом визначення рухомого об'єкту T_i (крок 1) і вибором величини кроку його зсуву (крок 3).

Розглянемо докладніше роботу алгоритму на p -й ітерації.

Вона починається з обчислення модулів градієнта цільової функції

$$F(u) = \max_{(x_\zeta^p, y_\zeta^p) \in P} \sum_{k=1}^N C(x_\zeta^p, y_\zeta^p, x_i^p, y_i^p, G, Q) \quad \text{за параметрами } u:$$

$$M_i^p = |\text{grad}F(u)| = \left[\left(\frac{\partial F(u)}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial F(u)}{\partial y_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

З причини відсутності аналітичного виразу для функції $F(u)$ її частинні похідні по параметрах розміщення об'єктів визначаються чисельно:

$$\frac{\partial F(u)}{\partial x_i} = \frac{F(x_1, y_1, \dots, x_i + \delta, y_i, \dots, x_N, y_N) - F(u)}{\delta},$$

$$\frac{\partial F(u)}{\partial y_i} = \frac{F(x_1, y_1, \dots, x_i, y_i + \delta, \dots, x_N, y_N) - F(u)}{\delta},$$

де δ – досить мала константа.

Зауваження 3.12. Результуюча концентрація забруднюючої домішки від N джерел в області Ω визначається напрямком і швидкістю приземного вітру в точках розміщення джерел. Ці величини, що залежать від виду функції рельєфу $R(x, y)$, знаходяться чисельно в вузлах сітки, прийнятна величина кроку якої в умовах горбистого рельєфу становить 10... 200 м. Тому для практичних розрахунків можна прийняти $\delta = 10$ м.

Після визначення множини $M^p = (M_1^p, M_2^p, \dots, M_N^p)$ на p -й ітерації здійснюється їх впорядкування по зростанню. Відповідно до цього порядку відбувається зміна розміщення об'єктів з набору об'єктів T .

Припустимо, найбільше значення з множини M^p має M_1^p , якому відповідає об'єкт T_i . В цьому випадку першим змінюється місце розміщення об'єкта T_i .

У напрямку антиградієнта цільової функції $F(u)$ за параметрами $u_i^p = (x_i^p, y_i^p)$ розміщення об'єкта T_i робиться крок, який не виводить за межі D_i^p області допустимих параметрів його розміщення на p -й ітерації. Для цього визначається величина $\alpha_i^p \geq 0$ така, що

$$(z_1^p, z_2^p, \dots, z_i^p - \alpha_i^p g_i^p, \dots, z_N^p) \in D_i^p,$$

де $g_k^p = \text{grad}F(u)$ за параметрами розміщення об'єкта T_i на p -й ітерації.

Координати нового положення полюса об'єкта T_i знаходяться із співвідношень

$$u_i^{p+1} = u_i^p - \alpha_i^p g_i^p,$$

або в проекціях на координатні осі:

$$x_i^{p+1} = x_i^p - \alpha_i^p g_{ix}^p,$$

$$y_i^{p+1} = y_i^p - \alpha_i^p g_{iy}^p,$$

де g_{ix}^p и g_{iy}^p – проекції вектора градієнта g_i^p на координатні осі.

Величина кроку α_i^p може визначатися різними способами, однак для зручності комп'ютерної реалізації запропонованого алгоритму величину вибираємо постійною.

Після визначення нового положення об'єкта T_i закінчується перший крок. В цілому p -а ітерація містить N кроків, на кожному з яких змінюється положення одного об'єкта. Об'єкти, досліджені на попередніх p кроках, з розгляду на $p + 1$ кроці виключаються.

Зазначений алгоритм дозволяє отримати раціональне розміщення об'єктів. Це пояснюється тим, що об'єкти розміщуються послідовно. Однак вибір такого методу розв'язання, що є модифікацією методу Гаусса-Зейделя [124], обумовлений особливостями даної задачі і дозволяє отримати досить хороше наближення до локального мінімуму за прийнятний час.

При цьому мінімізація в просторі розмірності $2N$ замінюється N -кратною мінімізацією в двовимірному просторі параметрів розміщення об'єктів T_i , $i = \overline{1, N}$. Це дозволило скоротити кількість громіздких обчислень, пов'язаних з необхідністю перевірки виконання системи обмежень і зменшити число обмежень на кожному кроці оптимізації.

3.3.3 Виділення рекордного значення функції мети

Значення локального мінімуму функції мети задачі (3.11) залежить від вектора початкового розміщення об'єктів u^0 . Тому в процесі пошуку розв'язку необхідно здійснити перебір початкових точок і відповідних їм локальних мінімумів, в процесі якого знаходиться оптимальне значення функції мети і вектор u^{**} координат полюсів пожежонебезпечних об'єктів S_i (і проекцій їх зон забруднення T_i), $i = \overline{1, N}$, який відповідає мінімуму максимальної концентрації викидів пожеж в точках контролю області розміщення Ω .

Кількість локальних мінімумів, що перебираються, може визначатися різними шляхами, наприклад, особою, яка приймає рішення, виходячи з умов і обмежень конкретної задачі, виконання певних вимог тощо.

3.4 Практична реалізація методу оптимального розміщення пожежонебезпечних об'єктів у заданій області з урахуванням її рельєфу

Задача оптимізації розміщення множини пожежонебезпечних об'єктів при побудові генерального плану промислового підприємства або плану його реконструкції з мінімізацією негативного впливу небезпечних чинників можливої пожежі на навколишнє середовище показана на прикладі реконструкції Гнідинцівського газопереробного заводу (с.м.т. Варва Чернігівської області).

3.4.1 Фізико-географічна та кліматична характеристика району проектованої діяльності та підприємства, що реконструюється, (Гнідинцівський газопереробний завод, с.м.т. Варва Чернігівської області)

Рельєф місцевості в районі с.м.т. Варва слабо пересічений (горбистий). Клімат помірно-континентальний. Середня температура повітря в 13 годин самого жаркого місяця + 25.8⁰С, середня температура січня -4.9⁰С. Середня максимальна швидкість вітру 5.4 м/с. Середня місячна і річна швидкості вітру дані в табл. 3.1, напрямок вітру, його повторюваність за порами року – в табл. 3.2.

Таблиця 3.1 – Середня місячна і річна швидкості метеорологічного вітру в районі с.м.т. Варва Чернігівської області

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Рік
Швидкість, м/с	4.2	4.4	4.6	4.2	4.0	3.3	3.2	3.1	3.0	3.4	4.4	4.3	3.8

Таблиця 3.2 – Напрямок метеорологічного вітру і його повторюваність в районі с.м.т. Варва Чернігівської області

Пора року	Параметри вітру	С	С-В	В	Ю-В	Ю	Ю-З	З	С-З
Зима	Повторюваність напрямків вітру %	13	17	14	12	13	13	10	8

	Середня швидкість вітру, м/с	4.1	4.8	5.4	5	3.8	3.6	3.5	4
Літо	Повторюваність напрямків вітру %	22	19	8	5	9	10	10	17
	Середня швидкість вітру, м/с	3.6	3.5	3.5	3.3	2.7	2.8	3	3.8
Рік	Повторюваність напрямків вітру %	15	17	15	11	12	11	9	10
	Середня швидкість вітру, м/с	3.9	4.2	4.4	4.2	3.3	3.2	3.3	3.9

Переважаючими напрямками вітрів протягом року є північне, східне і північно-східне.

Гнідинцівський газопереробний завод (ГПЗ) спеціалізується на переробці і розподілі широкої фракції легких вуглеводнів (ШФЛВ) і газів Артюхівського, Талалаївського та Леляківського родовищ з отриманням технічного бутану, пропан-бутанової фракції, стабільного газового бензину і важкої фракції – мазуту.

Загальна площа підприємства становить близько 100 га, максимальні розміри в плані – 1400 м x 1000 м.

При проведенні реконструкції Гнідинцівського ГПЗ було прийнято рішення про будівництво на території підприємства двох додаткових резервуарних парків для зберігання товарного бензину і товарного мазуту. Склад кожного з парків – 3 наземних вертикальних сталевих резервуари ємністю по 400м³ кожен (РВС-400).

Характеристики пожежонебезпечних об'єктів, що розміщуються.

Об'єкти, що розміщуються – резервуарні парки із трьома РВС-400 в кожному. Кількість об'єктів, що розміщуються – 2.

Розміри РВС-400: висота 7.5 м, діаметр 8.5 м. Горючі речовини, які можуть брати участь у можливій пожежі на об'єктах – бензини марок А-76, А-92, А-95 і мазут.

Особливості пожежі, яка може виникнути на об'єкті.

Найбільш ймовірна аварія, яка призводить до виникнення пожежі – руйнування трубопроводу при заливі бензину (мазуту) в резервуар або зливів з резервуара в залізничну цистерну. Аварія супроводжується горінням горючої речовини в одному з трьох резервуарів. Розлив горючої речовини і її горіння в обвалуванні не відбувається.

Характеристики продуктів горіння

Аерозольні продукти горіння бензину і мазуту відносяться до легких. Їх можна вважати монодисперсними, тому що 97.5% частинок, що утворилися, мають розміри в межах від 0.2 мкм до 1.0 мкм. В основному, це дрібнодисперсна сажа.

3.4.2 Підготовка вихідних даних

Побудова моделі рельєфу в області розміщення.

Інформація про рельєф області розміщення була взята з топографічної карти району розташування підприємства, що реконструюється, з масштабом 1: 5000 (рис. 3.9).

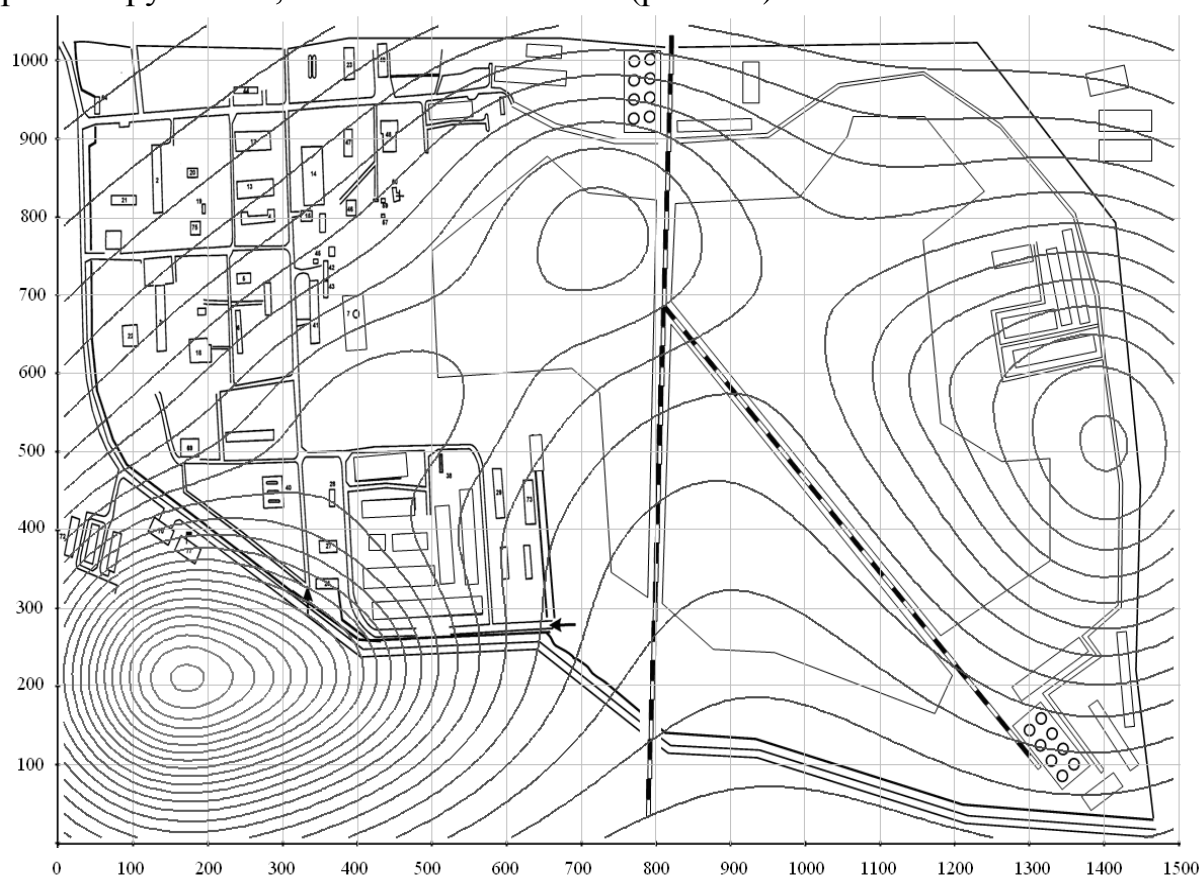


Рисунок 3.9 – Топографія території Гнідинцівського ГПЗ (відстань між горизонталями – 1 м)

Методом, описаним в п. 3.1.2.1 з використанням пакету Maple 11 отримана модель рельєфу області розміщення у вигляді всюди гладкої функції $z = R(x,y)$. Графік функції представлений на рис. 3.10.

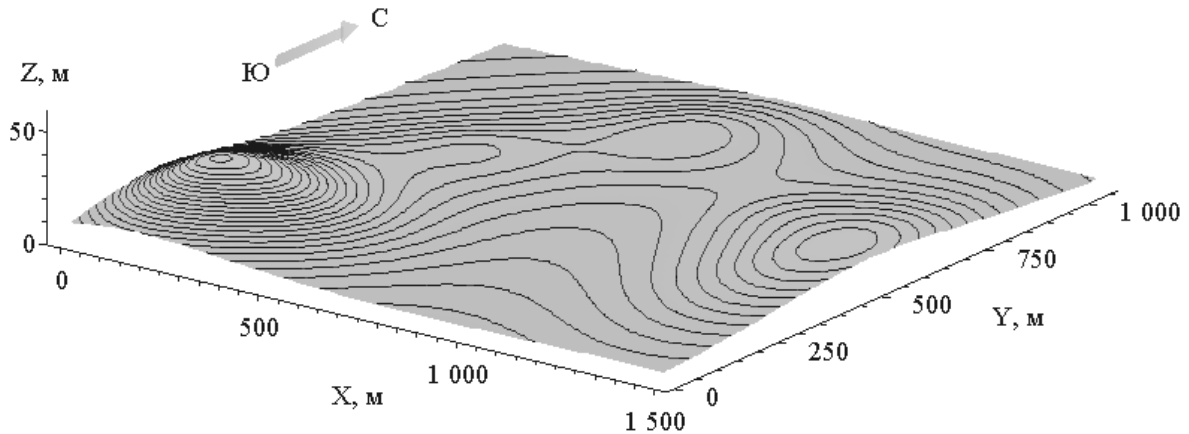


Рисунок 3.10 – Графік поверхні рельєфу території Гнідинцівського ГПЗ

Побудова векторного поля швидкості приземного вітру в області розміщення з урахуванням рельєфу

Векторне поле швидкості приземного вітру в будь-якій точці області розміщення для знайденої функції рельєфу $z = R(x,y)$ визначалося методом, викладеним в п. 3.1.2.2, з використанням пакета Maple 11.

Векторне поле збуреного приземного вітру, відповідного північно-східному незбуреному метеорологічному вітру $v = 4.2 \text{ м с}^{-1}$, показано на рис. 3.11.

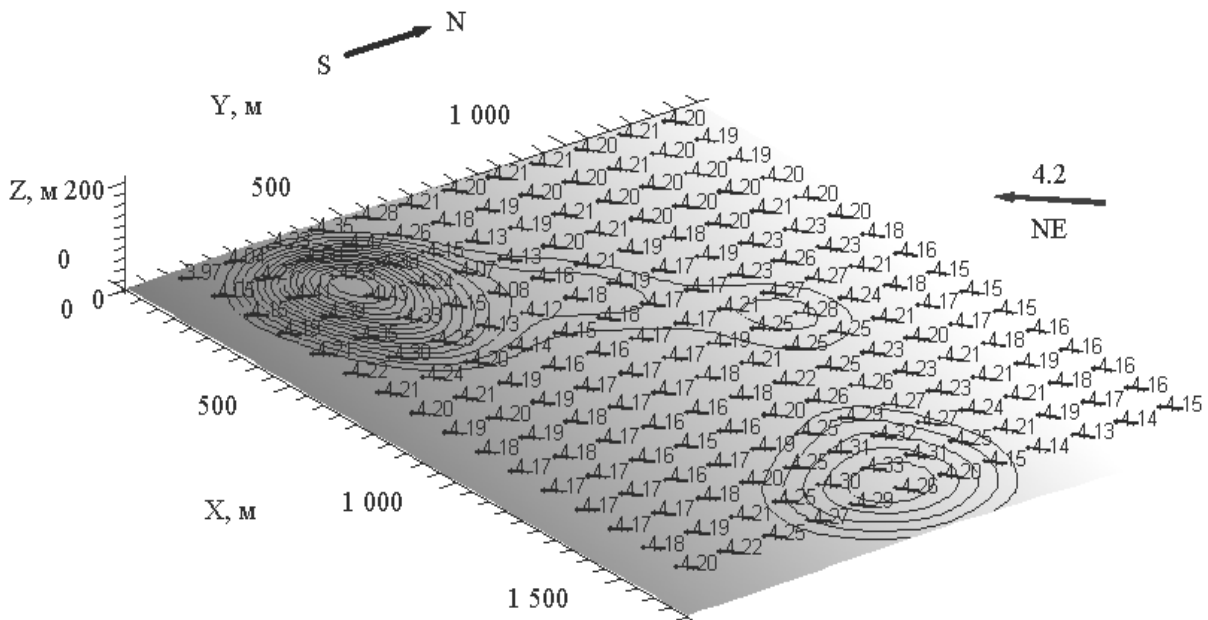


Рисунок 3.11 – Векторне поле збуреного приземного вітру над рельєфом, відповідного північно-східному незбуреному метеорологічному вітру $v = 4.2 \text{ м с}^{-1}$

Побудова області можливого забруднення (об'єкта розміщення).

На основі інформації про швидкість і напрям збуреного приземного вітру над рельєфом в заданій точці області розміщення за методикою п. 3.1.2.3 визначаються метричні характеристики r_i^k ($k=1, \dots, 8$) зон забруднення T_i ($i = 1, 2$) уздовж восьми напрямків, відповідних напрямкам збуреного приземного вітру, для усіх розташованих пожежонебезпечних об'єктів.

3.4.3 Задача оптимізації розміщення пожежонебезпечних об'єктів

Оптимізаційна задача розміщення на території підприємства (Гнідинцівський ГПЗ) двох пожежонебезпечних об'єктів (резервуарні парки зберігання бензинів і мазуту) формулюється так:

визначити можливе місце розташування пожежонебезпечних об'єктів S_i ($i = 1, 2$) в області Ω , щоб максимальна сумарна концентрація аерозольних викидів можливих пожеж в кінцевій множині точок контролю P була мінімальною.

Тоді сформульована оптимізаційна задача має вигляд: знайти

$$\min_{Z \in D} \max_{(x_j^p, y_j^p) \in P} \sum_{i=1}^2 C(x_j^p, y_j^p, Z, G, Q). \quad (3.30)$$

Область допустимих рішень D формується геометричними обмеженнями (3.12), (3.13), (3.14) і технологічними обмеженнями (3.16). Побудова Φ -функції об'єктів розміщення згідно з формулою (3.23) дозволяє при розв'язанні задачі (3.30) не враховувати фізичні обмеження (3.15) на характеристики концентраційного поля аерозольних викидів.

Технологічні обмеження:

- резервуарні парки повинні розміщуватися не далі 200 м від однієї з під'їзних залізничних колій:

$$L_1 \leq 200 \text{ м}; \quad (3.31)$$

- резервуарні парки повинні розміщуватися не ближче 100 м від будівель і споруд на території підприємства:

$$L_2 \geq 100 \text{ м}. \quad (3.32).$$

Область розміщення Ω (територія підприємства) апроксимувалась багатокутником, який задавався координатами вершин, впорядкованими за годинниковою стрілкою (табл. 3.3).

Значення концентрації аерозольних викидів можливих пожеж на об'єктах S_1 і S_2 визначалися в 20 контрольних точках (табл. 3.4).

Допустима область Ω_1 розміщення об'єктів S_1 і S_2 формується обмеженнями (1.2), (1.3), (3.15). Вона є багатозв'язною множиною, що складається з трьох компонент зв'язності $\Omega_1^1, \Omega_1^2, \Omega_1^3$ з кусково-лінійними

межами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$: $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_1^i$.

Таблиця 3.3 – Координати вершин границі Γ області розміщення Ω

Номер вершини	1	2	3	4	5	6
x, м	1500	1140	980	820	630	340
y, м	0	0	130	130	230	230
Номер вершини	7	8	9	10	11	12
x, м	80	20	15	15	20	20
y, м	410	510	690	840	845	895
Номер вершини	13	14	15	16	17	18
x, м	5	25	50	310	450	680
y, м	940	945	935	935	1000	1000
Номер вершини	19	20	21	22	23	
x, м	800	1150	1420	1480	1480	
y, м	980	980	790	430	230	

Таблиця 3.4 – Координати точок контролю концентрації аерозольних викидів

P_j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	780	840	1170	1180	1200	1235	1215	550	550	556
y	870	890	700	620	575	180	125	320	385	470
P_j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	510	430	350	320	320	375	365	440	550	700
y	435	450	440	620	760	780	850	885	935	870

Кожна з меж Γ_i компонент зв'язності задавалася координатами вершин, впорядкованими за годинниковою стрілкою, в загальній системі координат, пов'язаної з областю Ω (табл. 3.5).

Зауваження 3.13. В силу приналежності компонент зв'язності, Ω_1^i , $i=1, 2, 3$ області Ω , умова (1.2), що визначає приналежність об'єктів S_k , $k=1, 2$, області розміщення має вигляд: $((x_k, y_k) \in \Omega_1^i$, де (x_k, y_k) – параметри розміщення об'єкта S_k .

Таблиця 3.5 – Координати вершин меж Γ_i компонент зв'язності Ω_1^i

Номер вершини	Ω_1^1		Ω_1^2		Ω_1^3	
	x, м	y, м	x, м	y, м	x, м	y, м
1	580	835	1070	880	1087	125
2	630	785	1150	787	875	200
3	710	780	1065	725	775	210
4	700	275	1087	500	725	262
5	663	300	1170	450	737	620
6	637	537	1237	455	1112	162
7	650	567	1235	325		
8	425	550	1087	225		
9	420	712	737	650		
10			740	775		
11			909	780		
12			970	860		
13			975	880		

В силу незв'язності області Ω_1 побудова набору можливих варіантів розміщення проводилася по кожній компоненті зв'язності (Табл. 3.6). Для цього була проведена декомпозиція основної оптимізаційної задачі (3.30) на дев'ять під задач з побудовою 9 точок початкового розміщення об'єктів S_1 і S_2 в компонентах зв'язності області Ω_1 з виділенням рекордного значення цільової функції. Параметри розміщення об'єктів, що відповідні рекордному значенню функції мети задачі, зведені в табл. 3.7.

Таблиця 3.6 – Варіанти розміщення об'єктів S_1 і S_2 в компонентах зв'язності області Ω_1

Об'єкти	Номер варіанта								
	1-1	2-2	3-3	1-2	1-3	2-1	2-3	3-1	3-2
Об'єкт S_1	Ω_1^1	Ω_1^2	Ω_1^3	Ω_1^1	Ω_1^1	Ω_1^2	Ω_1^2	Ω_1^3	Ω_1^3
Об'єкт S_2	Ω_1^1	Ω_1^2	Ω_1^3	Ω_1^2	Ω_1^3	Ω_1^1	Ω_1^3	Ω_1^1	Ω_1^2

Таблиця 3.7 – Варіанти розв'язання оптимізаційної задачі (3.30)

Номер варіанта	Параметри розміщення об'єкта S_1		Параметри розміщення об'єкта S_2		$\max C(x_j^p, y_j^p) \Big _{x_j^p, y_j^p \in P}$
	x_1	y_1	x_2	y_2	
1-1	820	640	700	735	1.12
2-2	925	640	1100	400	1.29
3-3	1000	255	1015	450	1.08
1-2	750	690	985	560	1.86
1-3	755	655	975	495	1.92
2-1	1065	435	820	650	1.54
2-3	930	620	940	275	1.36
3-1	1000	445	820	630	1.14
3-2	975	280	950	600	1.11

Остаточний варіант можливого розміщення об'єктів S_1 і S_2 на території підприємства відповідає варіанту 3-3 (Рис. 3.12). Концентрація аерозольних викидів можливих пожеж на об'єктах S_1 і S_2 визначалися в 20 контрольних точках, зазначених на рис. 5.13 квадратними маркерами.

3.5. Висновки по главі 3

1 Проведено побудову і аналіз математичної моделі розміщення пожежонебезпечних об'єктів, які є в разі пожежі джерелами забруднюючих аерозольних викидів, з урахуванням рельєфу області розміщення. Виділено додаткові властивості області допустимих рішень і функції мети, що дозволили звести вихідну задачу до оптимізаційної задачі розміщення

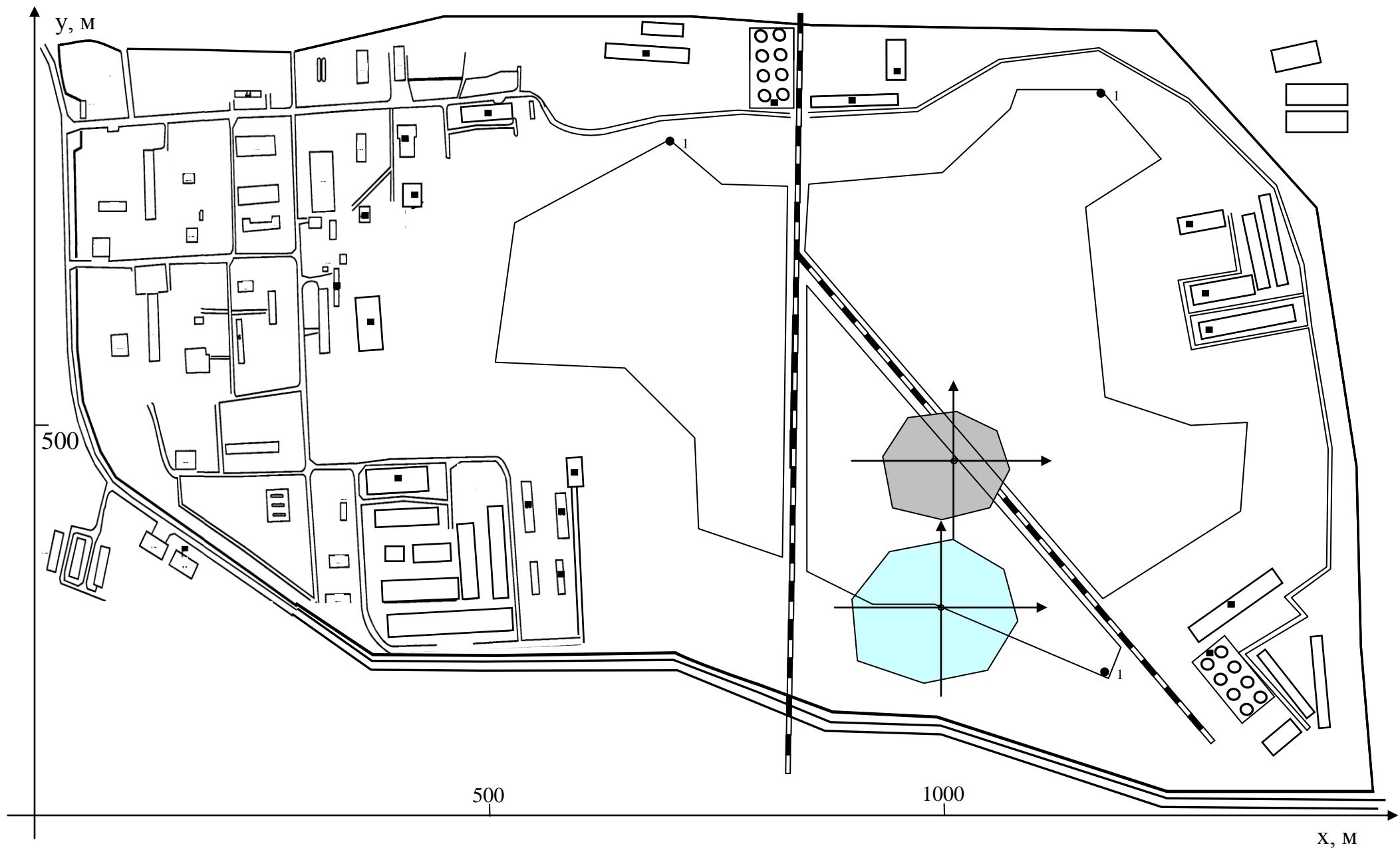


Рис. 3.12 – Розміщення об'єктів для варіанта 3-3

багатокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторовою формою.

2 Побудовано математичну модель об'єктів розміщення, в якості яких виступають багатокутні зони забруднення. Показано, що їх метричні характеристики і просторова форма визначаються параметрами приземного вітру в місці розміщення джерел викидів.

3 Визначено метричні характеристики і форму розміщуваних об'єктів в залежності від параметрів можливої пожежі і приземної швидкості вітру в точках розміщення, яка визначається рельєфом місцевості.

4 Досліджено систему обмежень, що формує область допустимих рішень задачі. Проведена формалізація фізичних обмежень на основі параметризації концентраційного поля забруднюючих викидів можливої пожежі і аналітичний опис геометричних обмежень. Побудована Ф-функція розміщуваних об'єктів з урахуванням впливу результуючого концентраційного поля.

5 На основі аналізу особливостей математичної моделі оптимізаційної задачі розроблений метод пошуку локального мінімуму у вигляді комбінації методів мінімізації за групами змінних і градієнтного методу.

6 Проведено чисельне дослідження задач оптимізації розміщення пожежонебезпечних об'єктів в заданих областях з урахуванням рельєфу місцевості та впливу на навколишнє середовище небезпечних факторів можливої пожежі. Розв'язана задача раціонального розміщення двох резервуарних парків для зберігання бензинів і товарного мазуту Гнідинцівського газопереробного заводу (с.м.т. Варва Чернігівської області) на етапі його реконструкції.

ГЛАВА 4

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ ПРОЕКТУ ЯК ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Проведено дослідження математичної моделі багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як оптимізаційної задачі розміщення кінцевого набору геометричних об'єктів.

Виконано чисельні дослідження розробленої математичної моделі і методу розв'язання оптимізаційної задачі розміщення на прикладі оптимізації плану робіт з реконструкції водопровідних мереж в м. Харкові, при розробці проекту комплексної системи автоматичного протипожежного захисту складського терміналу ДП «ІСТ Вишневе» (м Вишневе Київської області).

Розглядається постановка і розв'язання задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів проекту (Задача 5, п. 1.1, формула 1.6) стосовно такої практичної області діяльності людини як будівництво.

4.1 Аналіз методик побудови критеріїв ефективності інвестиційно-будівельного проекту

У будівництві поняття проекту знаходиться в постійному розвитку, що відображає зміну структури і властивостей зовнішнього середовища. Історично першою організаційною формою ведення будівельних робіт, яка з'явилася в період планової економіки, є проект організації будівництва (ПОС). Згідно [113] проект організації будівництва – це документація, в якій укрупнено вирішуються питання раціональної організації будівництва всього комплексу об'єктів даного будівельного майданчика.

ПОС включає: календарний план будівництва з розподілом капітальних вкладень і обсягів будівельно-монтажних робіт; будівельний генеральний план; пояснювальну записку з характеристикою будівництва, основні техніко-економічні показники: собівартість будівельно-монтажних робіт, вартість основних виробничих фондів і оборотних коштів, тривалість будівництва і трудомісткість робіт, порівняльна економічна ефективність варіантів проведення робіт.

В умовах ринку, на відміну від централізованого планування, будівництво набуває новий економічний зміст, пов'язаний з вільною динамікою фінансових ресурсів.

Інвестиційно-будівельний проект (ІСП) – нова організаційна форма управління проектом будівництва, при якій управління здійснюється на всіх фазах їх життєвого циклу: від передінвестиційної фази до передачі об'єкта в експлуатацію включаючи: розробку концепції, сучасні організаційні структури, передінвестиційну підготовку, організацію управління (в тому числі контроль і управління змінами), розробку проектної документації, терміни, витрати, ресурси, персонал, комунікації (в тому числі програмне забезпечення), ризики, безпеку, логістику, проведення робіт. В Україні такі проекти характеризуються новими видами ресурсів (для яких ще не розроблені норми і правила експлуатації), тривалими термінами виконання та значними капіталовкладеннями вже на ранніх етапах (проектні роботи, купівля або оренда земельної ділянки).

Змінюються також цілі проекту. Якщо в рамках ПОС критерієм ефективності був рівень відповідності плановим показникам (тимчасовим, вартісним), то метою ІСП є створення цінності для замовника (інвестора) шляхом управління проектом з урахуванням обмежень вартості і часу, а також підвищення величини економічного ефекту від реалізації проекту.

Проект девелопменту. Подальший розвиток призвів до поняття девелоперського проекту. Девелопмент означає якісне перетворення нерухомості, а також професійну діяльність з організації процесів девелопменту.

Одна з основних проблем девелопменту – залучення фінансування в проект, особливо на його ранніх стадіях.

Отже, продукт ІСП – це складна організаційно-технічна система. Створення такого об'єкта вимагає значної кількості різноманітних ресурсів і характеризується великим числом учасників проекту, які часто мають протилежні інтереси.

Під ефективністю технічної системи розуміють властивість системи, яка характеризується ступенем досягнення цілей, поставлених при створенні системи.

При цьому розрізняють два відтінку поняття «ефективність»:

Effectiveness (результативність) – ступінь досягнення запланованих результатів: результативна ефективність.

Efficiency (ефективність) – співвідношення між досягнутими результатами і витраченими ресурсами: економічна ефективність

В рамках даної роботи далі будемо розуміти під ефективністю продукту проекту саме економічну ефективність.

У практиці господарювання оцінка ефективності ІСП в залежності від можливостей компанії (наявності часу, фахівців, технічного оснащення тощо) здійснюється:

- а) традиційними методиками ЮНІДО;
- б) в найбільш складних ситуаціях – спеціалізованими методиками оцінки економічної ефективності ІСП (метод чутливості, метод сценаріїв, метод дерева рішень та ін.).

За методикою ЮНІДО є доцільним використання комплексу показників щодо оцінки ефективності реалізації ІСП:

- 1) чиста приведена вартість (NPV);
- 2) термін окупності (PP);
- 3) індекс рентабельності (PI);
- 4) внутрішня норма прибутковості (IRR).

При визначенні кожного з таких показників важливим етапом є визначення вартості будівництва на ранніх етапах ІСП.

Задача оптимального розподілу ресурсів є часткою проблеми оптимізації витрат ІСП.

4.2 Оптимізація розподілу обмежених ресурсів проекту комплексної системи пожежної автоматики складського терміналу (м. Вишневе Київської області)

Об'єкт дослідження – логістичний комплекс класу А, розташований в м Вишневе Київської області на відстані 300 м від основної транспортної магістралі – вул. Київській (траса Т-10-12).

Комплекс складається з 33 тис. кв. м. складських і 3,6 тис. кв. м. офісних площ. Основні послуги, що надаються комплексом: підлогове і стелажне зберігання; механічна і ручна обробка вантажів; автономні системи комунікацій; кілька режимів температурного контролю (0 – +5; +14 – +18 С); сортування і відбірка партій; прийом і видача вантажів з використанням штрих-кодових сканерів; всі види звітів; аутсорсинг і комісіонування; зберігання вантажу у відокремлених і захищених боксах.

За ступенем небезпеки розвитку пожежі приміщення комплексу відносяться до складів твердих горючих матеріалів.

В складських приміщеннях запроектована комплексна система пожежної автоматики, яка (в залежності від типу приміщення і характеру збережених матеріалів) складається з водозаповненої системи автоматичного спринклерного пожежогасіння, повітряної системи автоматичного спринклерного пожежогасіння, водозаповненої системи

автоматичного спринклерного пожежогасіння під перекриттям і системи міжстелажного пожежогасіння.

Весь складський комплекс обладнується водозаповненою системою внутрішнього протипожежного водогону (пожежні крани), крім складських приміщень, де створюється повітряна система внутрішнього протипожежного водогону (пожежні крани).

Для захисту будівлі ззовні розроблена кільцева водозаповнена система зовнішнього протипожежного водогону.

Монтаж і налагодження системи (Таблиця 4.1) проводяться в такій послідовності:

- підготовчі роботи: видалення з приміщень горючих матеріалів при проведенні електрозварювальних робіт, зведення (при необхідності) лісів, підготовка трубопроводів і конструкцій, підготовка робочих місць;
- розмітка трас і установка несучих конструкцій;
- прокладка труб і кабелів;
- перевірка на герметичність з'єднань; надійність закріплення труб на опорних конструкціях;
- фарбування трубопроводів, змонтованих відкрито;
- установка обладнання, приладів.

Задача системи автоматичної установки водяного пожежогасіння та внутрішнього протипожежного водопроводу в експлуатацію оформляється документацією по певній формі згідно з чинними нормативними документами.

Таблиця 4.1 – Перелік монтажних робіт, що становлять проект створення комплексної (водозаповненої і повітряної) системи автоматичного спринклерного пожежогасіння

Позначення операції	Найменування робіт і витрат, одиниця виміру	Узагальнена вартість комплектуючих,	Заробітна плата, грн. /	витрати праці робочих, люд.-год.	Мінімальна кількість робочих для операції	Максимальна тривалість операції
R ₁	Підготовчі роботи на насосній станції	1200	500	25	2	2
R ₂	Виготовлення дрібних листових конструкцій масою до 0,5 т	59480	4611	3490	18	24

Насосна станція автоматичного пожежогасіння						
R ₃ – R ₆	Монтаж насосних агрегатів SP-160-4-A MMS-8000 виробництва фірми «Grundfos» N = 45,0кВт	145000	800	60	2	3
R ₇	Монтаж компресора	6000	1000	30	4	1
R ₈	Встановлення фланцевих з'єднань на сталевих трубопроводах Ø 100мм	22230	3013	169	4	5
R ₉	Виготовлення вузлів труб з фланцями і зварними стидами на умовний тиск не більш 2,5 МПа, різних зовнішніх діаметрів	4584	2734	1070	8	17
R ₁₀	Трубопроводи зі сталевих труб з фланцями і зварними стидами на умовний тиск не більш 2,5 МПа, монтовані з готових вузлів різних зовнішніх діаметрів	46344	8627	1832	13	17
R ₁₁	Монтаж вентилів, засувок, клапанів сталевих фланцевих на умовний тиск до 2,5 Мпа,	56317	9249	1175	13	11
R ₁₂	Перевірка на герметичність з'єднань; надійність закріплення труб на опорних конструкціях	0	600	30	2	2
R ₁₃	Ґрунтовка і фарбування трубопроводів, змонтованих відкрито	780	200	10	1	1
Приміщення, що захищаються						
R ₁₄	Монтаж опорних конструкцій для кріплення трубопроводів всередині будівель і споруд масою до 0,1 т	22767	20361	1531	27	7
R ₁₅	Виготовлення вузлів для технологічних цехових трубопроводів із труб з фланцями і зварними стидами на умовний тиск не більш 2,5 МПа, зовнішній діаметр трубопроводу 219 мм	31716	16852	1335	28	6
R ₁₆	Трубопроводи спринклерних установок водного і пінного пожежогасіння і збудливі зі сталевих труб, які монтуються з готових вузлів, діаметр умовного проходу до 200 мм	42533	39593	2808	27	13
R ₁₇	Виготовлення вузлів для технологічних цехових трубопроводів сталей з фланцями і	119155	92290	6545	31	26

	зварними стиками на умовний тиск не більш 2,5 МПа, зовнішній діаметр трубопроводу 159 мм					
R ₁₈	Трубопроводи спринклерних установок водного і пінного пожежогасіння і збудливі зі сталевих труб, які монтуються з готових вузлів, діаметр умовного проходу до 150 мм	184075	172891	12362	59	26
R ₁₉	Виготовлення вузлів для технологічних цехових трубопроводів із с фланцями і зварними стиками на умовний тиск не більш 2,5 МПа, зовнішній діаметр трубопроводу 108 мм	35069	18970	1345	24	7
R ₂₀	Трубопроводи спринклерних установок водного і пінного пожежогасіння і збудливі зі сталевих труб, які монтуються з готових вузлів, діаметр умовного проходу до 100 мм	36809	34742	2464	25	12
R ₂₁	Виготовлення вузлів для технологічних цехових трубопроводів із труб з фланцями і зварними стиками на умовний тиск не більш 2,5 МПа, зовнішній діаметр трубопроводу 76 мм	81337	67847	4812	40	10
R ₂₂	Трубопроводи дренчерних установок водного і пінного пожежогасіння з сталевих труб, які монтуються з готових вузлів, діаметр умовного проходу до 80 мм	4724	4433	314	10	4
R ₂₃	Трубопроводи спринклерних установок водного і пінного пожежогасіння і збудливі зі сталевих труб, які монтуються з готових вузлів, діаметр умовного проходу до 80 мм	139648	13028	9300	58	10
R ₂₄	Виготовлення вузлів для технологічних цехових трубопроводів із труб з фланцями і зварними стиками на умовний тиск не більш 2,5 МПа, зовнішній діаметр трубопроводу 57мм	656	568	316	13	3
R ₂₅	Трубопроводи спринклерних	953	920	217	9	3

	установок водного і пінного пожежогасіння і збудливі зі сталевих труб, які монтуються з готових вузлів, діаметр умовного проходу до 50 мм					
R ₂₆	Виготовлення вузлів для технологічних цехових трубопроводів із труб вуглецевих і якісних сталей з фланцями і зварними стиками на умовний тиск не більш 2,5 МПа, зовнішній діаметр трубопроводу 32 мм	2565	1360	630	26	3
R ₂₇	Трубопроводи спринклерних установок водного і пінного пожежогасіння і збудливі зі сталевих труб, які монтуються з готових вузлів, діаметр умовного проходу до 40 мм	2539	2436	216	5	5
R ₂₈	Монтаж муфт	27452	23394	1659	41	5
R ₂₉	Перевірка на герметичність з'єднань; надійність закріплення труб на опорних конструкціях	0	1600	30	2	2
R ₃₀	Монтаж зрошувачів, насадок з декоративною розеткою спринклерних установок водного і пінного пожежогасіння	238900	20124	1427	36	5
R ₃₁	Монтаж зрошувачів, насадок дренчерних установок водного і пінного пожежогасіння, діаметр умовного проходу до 25 мм	15080	717	51	3	3
R ₃₂	Здача системи автоматичної установки водяного пожежогасіння та внутрішнього протипожежного водопроводу в експлуатацію	0	315	24	1	3
		1327913	580073	55277		236

4.2.1 Структурна і параметрична ідентифікація задачі визначення оптимальних витратних характеристик проекту

В даному випадку проект Т комплексної системи пожежної автоматики складається з N=32 укрупнених робіт. Робота T_i представляється як паралелепіпед в просторі ресурсів R³. Для роботи T_i

відомі потреби в ресурсах: $T_i : (a_i, w_i, l_i)$: де a_i – тривалість роботи, w_i – вартість роботи, l_i – людський ресурс. Відомі також величини $\{T, W, L\}$ загальних ресурсів на виконання даного проекту в кожен момент часу, які виділяють в просторі ресурсів R^3 область Ω . Вектор параметрів розміщення $u_i=(t_i, x_i, y_i)$ задає положення об'єкта T_i в просторі ресурсів проекту, при цьому параметр t_i визначає момент початку роботи T_i . Будемо вважати, що полюс O_i ВСК – вершина об'єкта T_i .

При цьому T^*, W^*, L^* – максимальні значення відповідних ресурсів, можливі для виконання проекту, T^{kr} – тривалість критичного шляху.

Отже, математична модель оптимального розподілу ресурсів має вигляд:

$$\text{знайти: } u^* = \arg \min_{u \in D \subset E^{3N}} \Psi(u), \quad (4.1)$$

де область D допустимих рішень визначається (1.2), (1.3), а також множиною технологічних і фізичних обмежень.

У припущенні, що екзогенні параметри моделі (4.1) є постійними, область Ω – необмежений замкнутий паралелепіпед.

Умова (1.2) описується системою N систем лінійних нерівностей виду:

$$F_i(u_i) \geq 0, i = \overline{1, N} \quad F_i(u_i) := \{f_i^h(u_i)\}_{h=\overline{1,6}}, \quad (4.2)$$

$$f_i^h(u_i) \in \{t_i, T - t_i - a_i, x_i, W^* - x_i - w_i, l_i, L^* - y_i - l_i\}.$$

Умова (1.3) задається системою $N(N-1)/2$ наборів лінійних нерівностей виду:

$$F^s(u_i, u_j) := \langle f_v^s(u_i, u_j) \geq 0, v = \overline{1,6}, s = \overline{1, N(N-1)/2}, \quad (4.3)$$

де $f_i^s(u_i, u_j) \in \{t_j - t_i - a_i, t_i - t_j - a_j, w_j - x_i - w_i, w_i - x_j - w_j, l_i - y_j - l_j, l_j - y_i - l_i\}$.

На множині T задане відношення часткового впорядкування робіт проекту в часі, яке обумовлюється технологічними обмеженнями виконання конкретних робіт проекту, задається у вигляді:

$$T_i \prec T_j, i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j, \quad (4.4)$$

або
$$f_2^S(u_i, u_j) := t_i - t_j - a_j = 0, \quad (4.5)$$

тобто робота T_j повинна виконуватися безпосередньо після роботи T_i .

Надалі при розв'язанні задачі вирівнювання ресурсів ця умова в разі необхідності може бути ослаблена до несупорядливої нерівності.

На рис. 4.1 представлена мережева (графова) модель упорядкування робіт проекту, де стрілками позначені роботи, а колами – моменти початку і закінчення робіт.

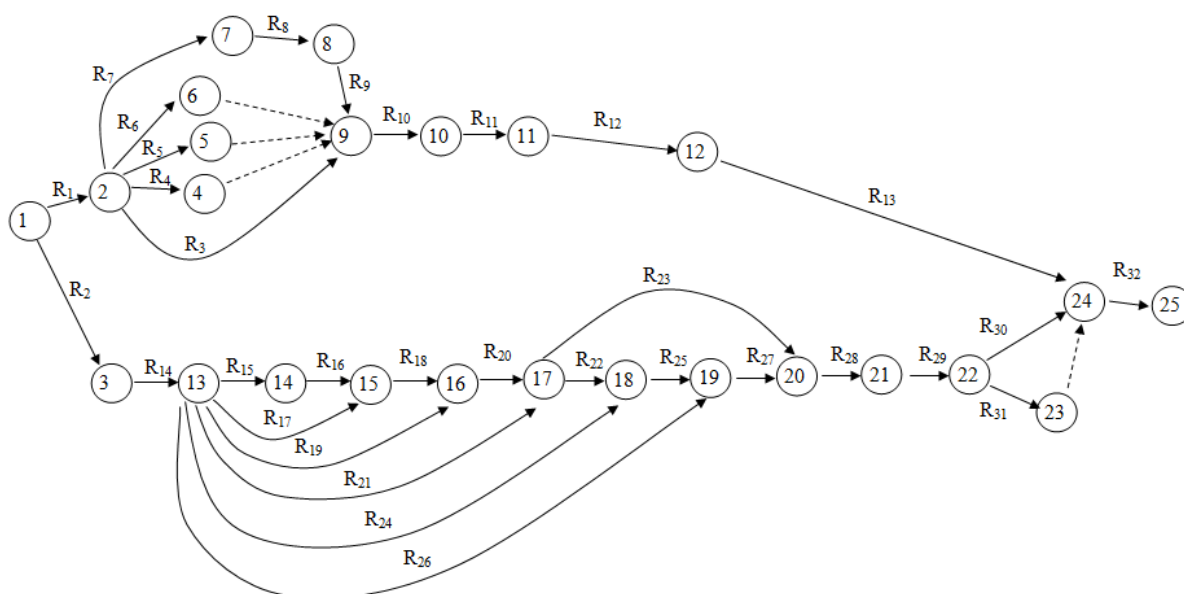


Рис. 4.1 – Мережева (графова) модель упорядкування робіт проекту

Фіктивні операції, необхідні тільки для побудови моделі, показані штриховими лініями.

4.2.2 Формалізація критерію якості задачі – величини витрат

Залежно від постановки задачі і етапу розв'язання задачі оптимізації ресурсів проекту векторний функціонал $\Psi(u)$ задачі (4.1) приймає різний вигляд і має різні властивості.

У розглянутій реалізації задача (4.1) розглядається як двоетапна.

Етап 1 містить такі задачі:

- визначення критичного шляху проекту T^{kr} (Задача I);
- розподіл операцій на критичні (що не мають резервів часу) операції

$T_k, k \in K$, де K – множина індексів критичних операцій, і некритичні – $T_{\bar{k}}, \bar{k} \in \bar{K}, \bar{K} = J/K, J = \bar{K} \cup K$, де $|J| = N$, \bar{K} – множина індексів некритичних операцій.

– визначення резервів часу некритичних робіт.

Для розв'язання Задачі I використовується принцип головного критерію, тобто в якості цільової функції на першому етапі виступає час T , а інші критерії виносяться в обмеження задачі:

$$\Psi(u) := T(u) \rightarrow \min. \quad (4.6)$$

На Етапі 2 розв'язується задача вирівнювання та оптимізації використання ресурсів W, L (Задача II).

Розв'язання Задачі I проведено методом послідовно-одиначного розміщення. Для розрахунку резервів часу некритичних робіт використані методи мережевого планування. Результат розв'язку Задачі I – критичний шлях проекту T^{kr} і вектор u параметрів розміщення набору об'єктів T є початковим наближенням для Задачі II.

4.2.3 Постановка і розв'язання задачі вирівнювання ресурсів

Задача II – оптимізація і вирівнювання ресурсів, наприклад, ресурсів L , необхідних для виконання запланованих робіт проекту.

З урахуванням результатів реалізації першого етапу в якості цільового функціоналу оптимізаційної задачі другого етапу можна розглядати функцію виду

$$\Psi(u) := L(u) \rightarrow \min, \quad (4.7)$$

При цьому в аналітичному описі області допустимих значень D з'являється обмеження $T = T^{kr}$.

Задача оптимального розподілу ресурсів проекту включає в якості необхідної складової вирівнювання використання ресурсів (w_i, l_i) з урахуванням можливості зсуву некритичних робіт $T_{\bar{k}}$ у часі в межах наявних резервів часу $t_x(T_{\bar{k}})$. При цьому, параметри розміщення критичних робіт $T_k, k = \overline{1, K}$ вважають фіксованими.

Таким чином, при побудові математичної моделі задачі вирівнювання використання ресурсів враховуються: умова приналежності

некритичної роботи вільної підобласті ресурсів $T_{\bar{k}} \subset \Omega / \bigcup_{k=1}^{K < N} T_k$; умова приналежності некритичної роботи $T_{\bar{k}}$ своєму резерву часу $t_x(T_{\bar{k}})$, тобто $T_{\bar{k}} \subset \Omega_{\bar{k}}$, $\bar{k} = \overline{1, K}$, де $\Omega_{\bar{k}} \subset \Omega$ – паралелепіпед, габарит якого по осі OT становить $t_x(T_{\bar{k}})$.

Таким чином, математична модель багатовимірної задачі вирівнювання ресурсів має вигляд:

$$\text{знайти:} \quad \bar{u}^* = \arg \min_{(\bar{u}) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{3\bar{K}+1}} L(u), \quad (4.8)$$

де $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{2\bar{K}})$ – вектор параметрів розміщення некритичних робіт; Θ – область допустимих рішень, що задається системою

$$\begin{cases} F_{\bar{k}}(u_{\bar{k}}) \geq 0, \\ F^s(u_i, u_j) \geq 0, \quad s = \overline{1, N(N-1)/2}, \\ t_{\bar{k}}^* \leq t_{\bar{k}} \leq t_{\bar{k}}^* + T_{\bar{k}}, \quad \bar{k} = \overline{1, K}. \end{cases}$$

Для розв'язання задачі використано алгоритм, заснований на схемі методу гілок і меж, який передбачає побудову дерева рішень A^2 з такими особливостями:

- рівні дерева рішень A^2 , які відповідають параметрам розміщення критичних робіт, виключаються з подальшого розгляду. Таких рівнів – 3K;
- визначення резервів часу $t_x(R_{\bar{k}})$ некритичних робіт, що згенерувало обмеження $t_{\bar{k}}^* \leq t_{\bar{k}} \leq t_{\bar{k}}^* + T_{\bar{k}}$, реалізується у вигляді додаткового правила відсікання кінцевих вершин дерева A^2 .

Програмна реалізація виконана в Borland Delphi 7.0, мова програмування Object Pascal 6.0. На рис. 4.2 і 4.3 представлені результати розв'язання задачі побудови оптимального календарного графіка виконання робіт по монтажу комплексної системи пожежної автоматики складського терміналу, що включає визначення критичного шляху проекту в двовимірній і тривимірній постановках відповідно. Час виконання проекту складає 130 робочих днів, максимальна кількість виконавців, які працюють одночасно, становить 175 осіб.

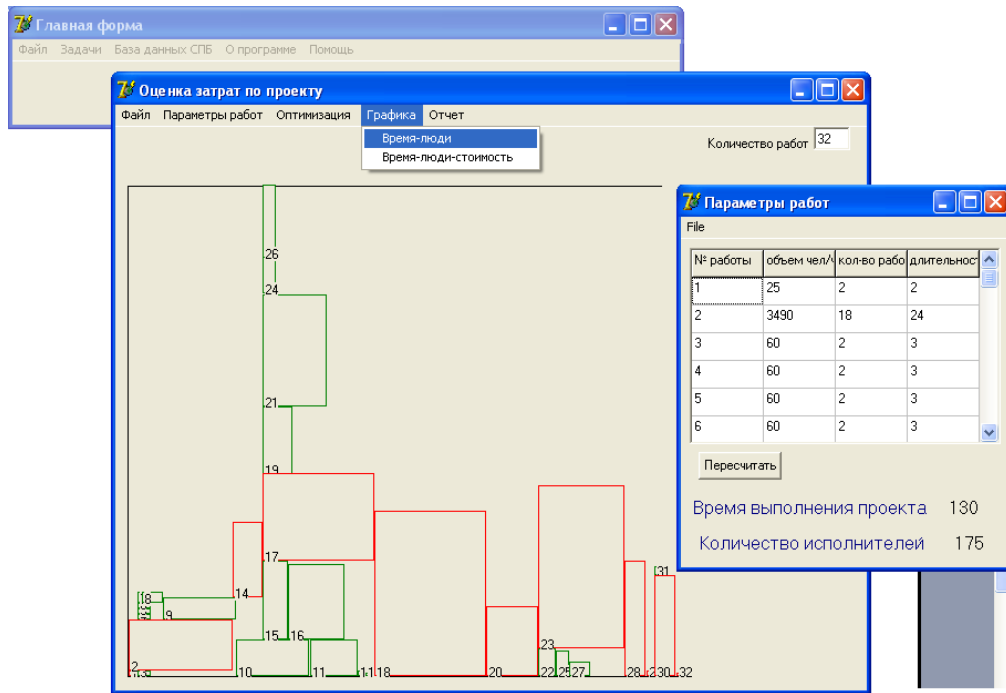


Рисунок 4.2 – Розв’язок задачі визначення критичного шляху проекту на площині «час – людський ресурс».

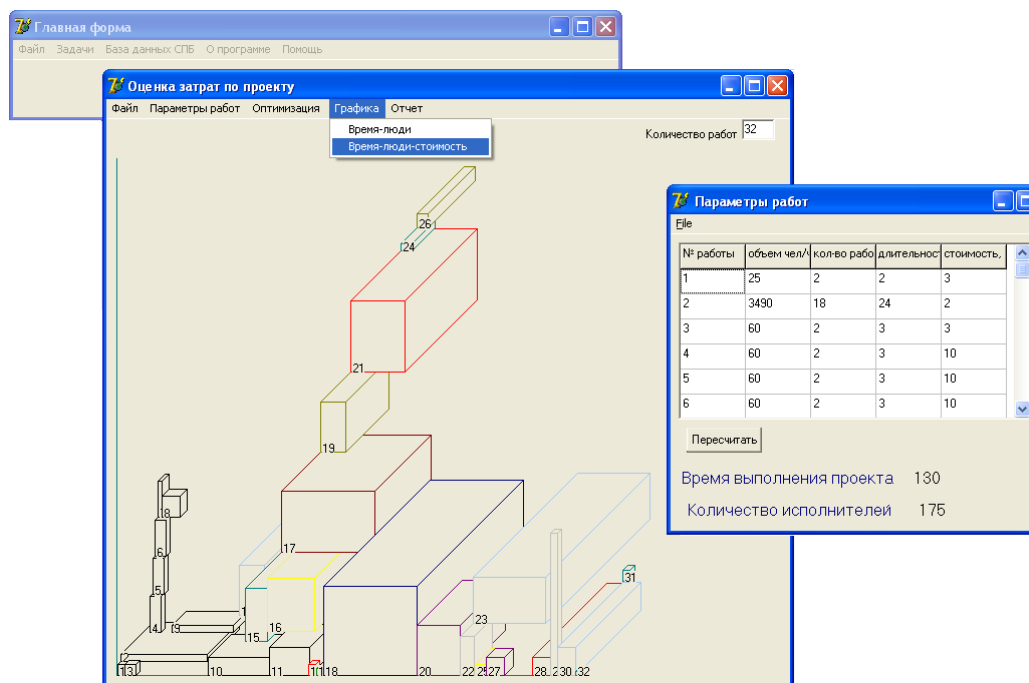


Рисунок 4.3 – Розв’язок задачі визначення критичного шляху проекту в тривимірній постановці

На рис. 4.4 і 4.5 представлені результати розв'язання задачі вирівнювання ресурсів проекту (в даному випадку – людського ресурсу) в двовимірній і тривимірній постановках відповідно.

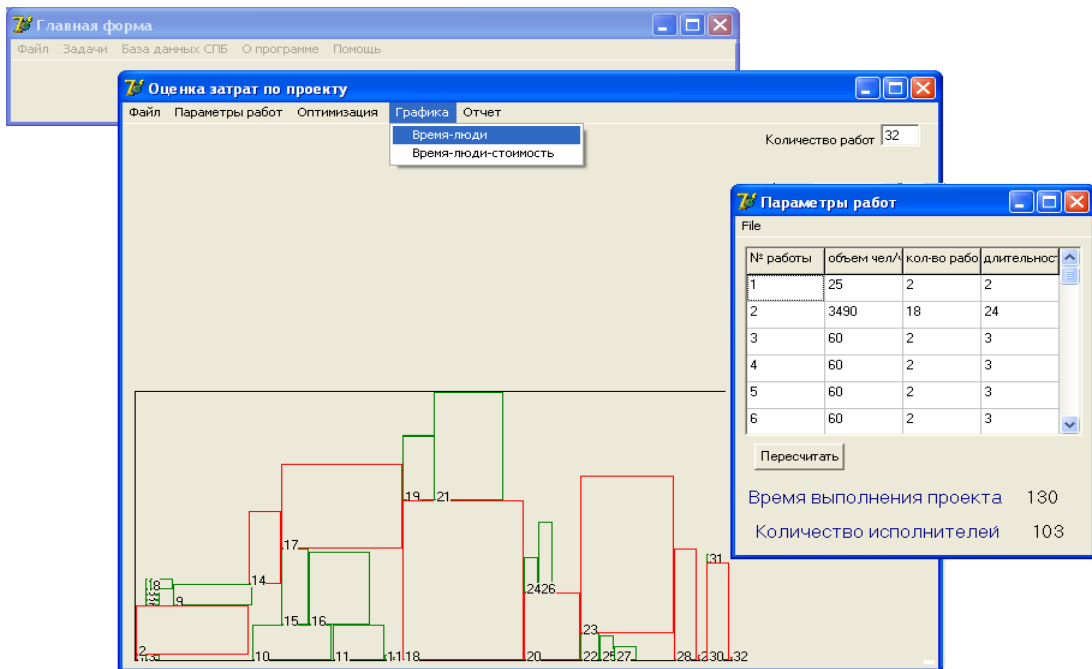


Рисунок 4.4 – Розв'язок задачі вирівнювання ресурсів проекту

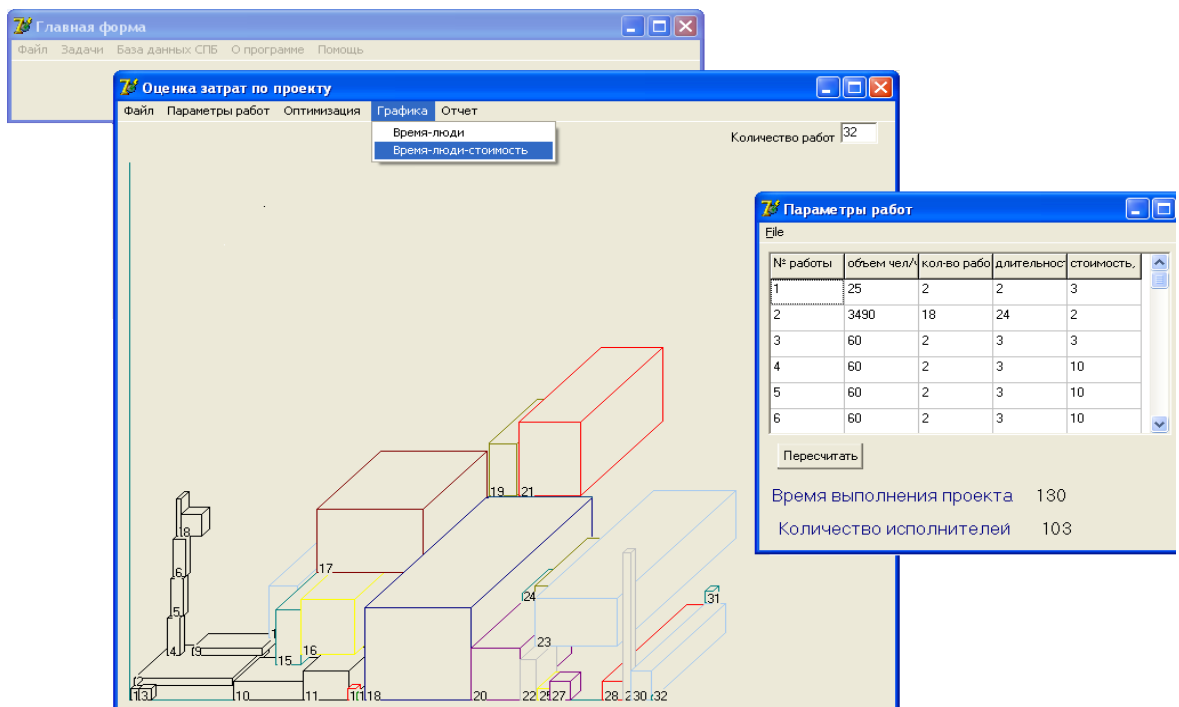


Рисунок 4.5 – Розв'язок задачі вирівнювання ресурсів проекту в тривимірній постановці

Завдяки вирівнюванню використання людського ресурсу максимальне число одночасно працюючих виконавців склало 103 людини.

4.3 Оптимізація розподілу обмежених ресурсів проекту реконструкції ділянки водопровідних мереж (м. Харків)

4.3.1 Побудова математичної моделі

Аналіз практичних постановок задач управління ресурсами проектів реконструкції інженерних комунікацій показав, що типовою є наступна задача календарного планування.

Нехай є проект, що складається з N робіт (операцій) $T = \{T_i\}$, $i = \overline{1, N}$. На множині робіт T задана умова часткової впорядкованості, визначене конкретною послідовністю виконання робіт. Для кожної роботи T_i відомий її обсяг V_i (люд. час). На проект в цілому в кожний момент часу може бути виділено не більше L (люд.) виконавців робіт. Таким чином, ресурси проекту можна представити як область $\Omega \subset R^2$ двомірного простору TOL , де T – час проекту і L – трудовий ресурс проекту в кожен момент часу. У своїй системі координат $T_iO_iL_i$ кожна робота T_i може бути представлена як прямокутний геометричний об'єкт із змінними метричними характеристиками. У найпростішому випадку T_i – прямокутник $T_i = T_i(a_i, l_i)$, $a_i \times l_i = V_i$, a_i, l_i – var. При цьому характеристика a_i означає тривалість, а характеристика l_i – число виконавців роботи T_i в кожен момент часу.

Зауваження 4.1. Обсяг V_i роботи T_i , є константою $i = \overline{1, N}$.

Зауваження 4.2. На основі врахування технологічних характеристик кожної роботи, умов техніки безпеки праці та ін. для кожної роботи T_i можуть бути виділені гранично допустимі значення ресурсів для її виконання

$$a_i \in A_i, b_i \in B_i, \text{ где } A_i = [a_{i \min}, a_{i \max}], L_i = [l_{i \min}, l_{i \max}], a_{i \min} > 0, l_{i \min} > 0.$$

Має місце співвідношення $l_i = V_i / a_i$ (рис. 4.6).

При дискретному характері завдання ресурсів

$$V_i \leq a_{i \min} \times l_{i \max}, \quad V_i \leq a_{i \max} \times l_{i \min}.$$

Положення кожної роботи $T_i(u_i)$ в загальній системі координат TOW характеризується вектором параметрів розміщення $u_i = (t_i, y_i)$.

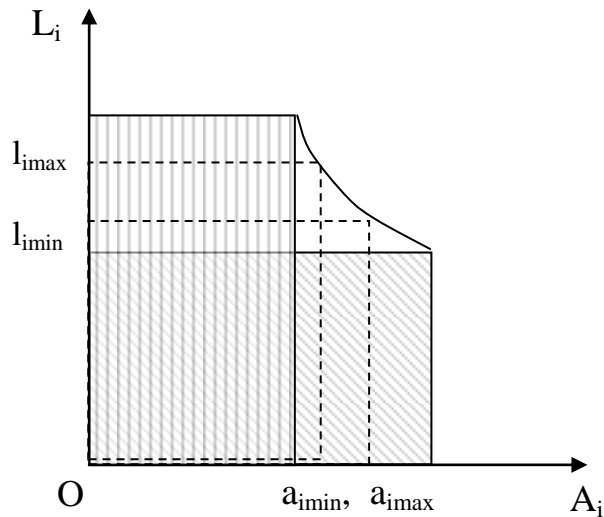


Рисунок 4.6 – Представлення роботи T_i при різних значеннях (a_i, l_i) як однозв'язної множини

Зауваження 4.3. Особливістю даної постановки є розширення поняття «часткова впорядкованість робіт». У класичному підході (див. формулу 4.4) умова $T_i \succ T_j$ означає виконання роботи T_j безпосередньо після роботи T_i . В рамках поточної постановки робота T_j може здійснюватися і паралельно з роботою T_i , якщо виконано необхідний мінімальний обсяг роботи T_i для початку (і продовження) виконання роботи T_j . Наприклад, при виконанні проекту реконструкції водопровідних мереж операція «Виробництво земляних робіт при розкритті магістралі» не може розпочатися, якщо не виконано достатній обсяг роботи «Розбирання асфальтобетонного покриття».

Таким чином, кожна робота T_i може бути представлена як об'єднання двох робіт $T_{i-1}(a_{i-1}, l_{i-1}, t_{i-1}, y_{i-1})$, $T_{i-2}(a_{i-2}, l_{i-2}, t_{i-2}, y_{i-2})$, таких, що відповідні обсяги робіт задовольняють умові (рис. 2.24 б)

$$V_{i-1} + V_{i-2} = V_i, \quad V_{i-1} \geq V_i^j \quad \text{або} \quad a_{i-1} \times l_{i-1} + a_{i-2} \times l_{i-2} = V_i, \quad a_{i-1} \times l_{i-1} \geq V_i^j.$$

При цьому зберігається умова безперервності виконання роботи за часом і максимальної незмінності складу виконавців:

$$t_{i-2} = t_i + a_{i-1}, \quad l_{i-2} = l_{i-1} = l_i.$$

При такій постановці для роботи T_i параметри $\mu_i=(t_{i_1}, y_{i_1}, a_{i_1}, a_{i_2}, l_{i_1}, l_{i_2})$ є ендогенними.

Зауваження 4.4. Множина робіт T_j , безпосередньо наступних за T_i , може складатися більш ніж з одного елемента: $j \in \{1,2,\dots,J\}$, $1 \leq J \leq N-1$.

У даній роботі для визначення одного значення V_i^j використовується мажоруюча оцінка

$$V_i^{j*} = \max_{j \in J} V_i^j.$$

Необхідно побудувати оптимальний календарний графік $G(T^{kr}, \Delta L)$ проекту T , де T^{kr} – загальний час виконання проекту (тривалість критичного шляху), $\Delta L = \max_{t \in \{1,2,\dots,T_R\}} L_t - L_{t-1}$.

Формальна постановка задачі має вигляд:

$$T^{kr} \rightarrow \min_{\mu \in D \subset R^{8N}}, \quad (4.9)$$

$$\Delta L \rightarrow \min_{\mu \in D \subset R^{8N}}, \quad (4.10)$$

де $\mu=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$; $D \subset R^{8N}$ – область допустимих рішень, що виділяється наступною системою обмежень на розміщення робіт:

$$T_i \subset \Omega, \quad (4.11)$$

$$\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset, \quad (4.12)$$

$$T_m \succ T_n, m > n, \quad m,n \in \{1,2,\dots,N\}, \quad (4.13)$$

$$a_{i_k} \in A_i, l_{i_k} \in L_i, \quad k=1,2; i, j=1, \overline{N}, i \neq j, \quad (4.14)$$

$$V_{i_1} + V_{i_2} = V_i, \quad V_{i_1} \geq V_i^j. \quad (4.15)$$

Обмеження (4.11) визначає умову наявності кожної роботи в складі проекту, обмеження (4.12) визначає неможливість використання одного ресурсу двома роботами одночасно, обмеження (4.13) – умову часткової впорядкованості робіт, умова (4.14) – обмеження на величину ресурсів робіт, обмеження (4.15) – умову збереження обсягу роботи, що замикає систему.

Вже згадана оптимізаційна задача (4.9) – (4.15) по своїй постановці є двокритеріальною, де оптимальне значення мінімаксного критерію (4.10)

означає максимальне забезпечення властивості вирівнювання ресурсів проекту.

Твердження 4.1. Критерії ΔL і L виду

$$\begin{aligned}\Delta L &= \max_{t \in \{1, 2, \dots, T_R\}} L_t - L_{t-1}, \\ L &= \max_{t \in \{1, 2, \dots, T_R\}} L_t\end{aligned}\quad (4.16)$$

в термінах основної задачі дослідження є еквівалентними.

Справедливість Твердження 4.1 безпосередньо впливає з необхідності забезпечення мінімальних витрат ресурсу L в кожен момент часу проекту.

Наслідок 4.1. Подання критерію (4.10) у вигляді (4.16) дозволяє визначити область Ω як смугу в системі координат TOL .

У розділі 2.5 побудовано аналітичний опис обмежень (4.11) – (4.13) за допомогою апарату Φ -функцій.

Таким чином, $\Phi_{i0}(t_i, y_i, a_{i-1}, a_{i-2}, l_{i-1}, l_{i-2})$ – функція, що аналітично описує обмеження (4.11), має вигляд (2.54) і виражається системою $F_0(\mu) \geq 0$ (2.55) лінійних нерівностей.

$\Phi_{ij}(\mu_i, \mu_j)$ -функція, що задає умову (4.12), має вигляд (2.56) і представляється набором лінійних нерівностей виду (2.57).

4.3.2 Методика зведення задачі (4.9) - (4.15) до однокритеріальної постановки

Пропонований підхід заснований на трансформації багатокритеріальної задачі в однокритеріальну з використанням принципу лексикографічного впорядкування. Таким чином, завдання (4.9) – (4.15) представляється послідовністю наступних двох однокритеріальних задач:

Задача 1. Визначення критичного шляху

$$T_R \rightarrow \min_{\mu \in D^1 \subset \mathbb{R}^{8N}}, \quad (4.17)$$

де область $D \subseteq D^1$.

В управлінні ресурсами проекту можливі два варіанти задачі (4.17):

Задача 1.1. $L = \infty \Rightarrow D \subset D^1$ – трудові ресурси необмежені.

У цьому випадку умова (4.11) описується системою $F_0^1(\mu_i) \geq 0, 3N$ лінійних нерівностей, функції обмежень яких мають вигляд

$$F_0^1(\mu_i) : \{t_i, T - t_i - a_{i-1} - a_{i-2}, l_i\}, i=\overline{1, N}.$$

Задача 1.2. $L = \text{const} \Rightarrow D = D^1$.

Задача 2. Завдання вирівнювання ресурсів

$$L \rightarrow \min_{\mu \in D^2 \subset \mathbb{R}^{8N}}, \quad (4.18)$$

де область $D \subseteq D^2$, причому $f_3^2(\mu_i) = T_R - t_i - a_{i-1} - a_{i-2}$.

Наведемо основні властивості оптимізаційних задач (4.17), (4.18), що впливають з їх математичних постановок. Припустимо, що A_{i-k}, V_{i-k} з (4.14) неперервні, тобто область D має властивість безперервності.

Властивість 4.1. Цільові функції задач (4.9) – (4.10) є лінійними.

Властивість 4.2. Обмеження області допустимих рішень як першої, так і другої задачі містять лінійні і нелінійні функції.

Властивість 4.3. Область $D \subset \mathbb{R}^{6N+1}$ неопукла, незв'язна, в загальному випадку необмежена точкова множина, що має кусково-гладку межу. Кожна компонента зв'язності області D є багатозв'язною.

Властивість 4.4. Область D допускає представлення

$$D = \bigcup_{g=1}^G D_g, \quad G = O(4^N).$$

Властивість 4.5. Умова (4.13) часткової впорядкованості дозволяє значно скоротити число розглянутих підобластей області D .

Властивість 4.6. Так як задача (4.17) в якості цільового функціоналу має загальний час виконання проекту, то природно припустити, що на даному етапі рішення $V_{i-1} = V_i^j$. Іншими словами, при частковій впорядкованості виду $T_j \succ T_i$, робота T_j починає виконуватися, як тільки виконаний необхідний для неї обсяг роботи T_i . При такому припущенні об'єм $V_{i-1} = \text{const}$, і мають місце такі обмеження:

$$a_{i-1} l_{i-1} = V_i^j; \quad a_{i-2} l_{i-2} = V_i - V_i^j.$$

Тоді $l_{i-1} = \frac{V_i^j}{a_{i-1}}$, $l_{i-2} = \frac{V_i - V_i^j}{a_{i-2}}$ функції f_{12}^h , f_{13}^h , $h=1,2$ набувають вигляду (2.58), (2.59):

$$f_{12}^1(\mu_i, \mu_j) = l_j - (l_i + \frac{V_i^j}{a_{i-1}}), \quad f_{12}^2(\mu_i, \mu_j) = l_j - (l_i + \frac{V_i - V_i^j}{a_{i-2}}), \quad (4.19)$$

$$f_{13}^1(\mu_i, \mu_j) = l_i - (l_j + \frac{V_j^k}{a_{j-1}}), \quad f_{13}^2(\mu_i, \mu_j) = l_i - (l_j + \frac{V_j - V_j^k}{a_{j-2}}), \quad T_j \succ T_k. \quad (4.20)$$

Згідно Властивостей 2.5, 2.6 функції (4.17) і функції

$$W - (w_i + \frac{V_i^j}{a_{i-1}}), \quad W - (w_i + \frac{V_i - V_i^j}{a_{i-2}}) \quad (4.21)$$

є опуклими і сепарабельними.

Методика розв'язання однокритеріальної задачі (4.17). У роботі реалізований наступний алгоритм

Крок 1. Рішення релаксированої задачі 1.1 – визначення оптимального значення вектора ендогенних параметрів μ^* і функції мети $T_R(\mu^*)$.

Крок 2. Якщо $\mu^* \in D$, то задача (4.17) вирішена. Якщо $\mu^* \notin D$, то – розв'язання релаксированої задачі 1.2, тобто визначення допустимої точки $\mu_{\text{доп}}^* \in D$ такої, що

$$L(\mu_{\text{доп}}^*) - L(\mu^*) \rightarrow \min. \quad (4.22)$$

Розглянемо більш докладно кроки алгоритму з урахуванням наступних зауважень.

Зауваження 4.5. Згідно Властивості 4.6 розмірність області допустимих рішень D зменшується і становить $4N + 1$ (параметри l_{i-1} і l_{i-2} стають залежними).

Зауваження 4.6. Рішення задачі 1.2 передбачає, що параметри a_{i-1} , a_{i-2} (l_{i-1} і l_{i-2} відповідно) визначаються

$$a_{i-1} = a_{i-1 \min}, \quad a_{i-2} = a_{i-2 \min}, \quad l_{i-1} = \frac{V_i^j}{a_{i-1}}, \quad l_{i-2} = \frac{V_i - V_i^j}{a_{i-2}}.$$

Зауваження 4.7. Властивість 4.6 багато в чому задає перестановку номерів об'єктів, впорядковуючи множину об'єктів розміщення по координаті t_i . Тому для вирішення задачі 1.1 (Крок 1) можна використовувати модифікований метод послідовно-одиначного розміщення, j -а ітерація якого в даному випадку має вигляд:

$$1) \{\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_{J-1}^*\} = \text{fix} \text{ (визначені на попередніх ітераціях);}$$

$$2) t_j^* = \max_{y \in Y} (t_y^* + a_{y-1}),$$

де Y - множина об'єктів, які відповідають умові: $T_j \succ T_y$;

$$3) y_j^* = \min_{m \in M, l=1,2} (y_m + l_{m-1}),$$

за умови, що $\text{int } T_j(t_j^*, y_j^*) \cap \bigcup_{k=1}^{J-1} \text{int } T_k(t_k^*, y_k^*) = \emptyset$.

Отримана в результаті рішення задачі 1.1 (Крок 1) точка $(\mu^*, T_R(\mu^*))$ є початковою для ітераційного процесу вирішення задачі 1.2 (Кроку 2).

Для визначення глобального мінімуму задача (4.18) необхідно вирішити G задач опуклого програмування з лінійною функцією цілі. Схема рішення задачі 2 (4.18) включає в себе 7 кроків:

$$1) \text{ визначення. } L(\mu^*) = \max_{i=1,2,\dots,N, l=1,2} (l_i^* + b_{i-1}).$$

Якщо $L(\mu^*) \leq L$ – задача вирішена. В іншому випадку – перехід до 2);

2) виділення множини T_K критичних операцій, які становлять критичний шлях проекту, і множини некритичних операцій.

Положення критичних операцій визначається вектором, для задачі 1.2 параметри $\{t_k, a_{k-1}, a_{k-2}\}$, $k \in 1, 2, \dots, K$ вектора вважаються екзогенними. Множина критичних операцій і число елементів цієї множини позначимо літерою K .

Зауваження 4.8. Робота T_i може бути представлена у вигляді

$$T_i = T_{i-1} \cup T_{i-2}$$

тому можлива ситуація, коли $T_{i-1} \in T_K$, $T_{i-2} \in T_{\bar{K}}$;

3) визначення додаткових обмежень на діапазон розміщення некритичних операцій $T_{\bar{K}}$, визначених побудованим варіантом критичного шляху, так званих вільних резервів часу

$$FF_{\bar{K}} = [t_{\bar{K}}^*, t_{\bar{K}}^{\max}], \text{ где } t_{\bar{K}}^{\max} = \min_{z \in Z} t_z^*.$$

де Z – кількість об'єктів, які відповідають умові $T_z \succ T_j$.

Тоді додаткові обмеження представляються нерівностями

$$t_K + a_{1_K} + a_{2_K} \leq t_{\bar{K}}^{\max}, \quad t_K \geq t^*;$$

4) визначення множин $D_g, g = 1, 2, \dots, G_{\mu^*}$, таких, що $\mu^* \in \bigcup_{g=1}^{G_{\mu^*}} D_g$;

5) виділення поточної множини D_g – побудова системи обмежень $F_g(\mu) \geq 0$, що виділяють дану множину;

6) побудова для кожної з сепарабельних функцій (4.20) – (4.21) обмежень системи $F_g(\mu) \geq 0$, що визначають розміщення некритичних операцій, кусочно-лінійної апроксимації виду:

$$\alpha_\eta \times t_i + \beta_\eta \times a_i + d_\eta^n = 0,$$

де $\alpha_\eta, \beta_\eta, d_\eta^n$ – функції координат вузлів апроксимації, $\eta=1, 2, \dots, N$.

Як результат – отримання кусково-лінійної апроксимації множини D_g з наперед заданою точністю;

7) рішення оптимізаційної задачі лінійного програмування

$$L(\mu_{\text{доп}}^*) - L(\mu^*) \rightarrow \min_{D_g^L}.$$

симплекс-методом або методом активного набору.

Зауваження 4.9. Точність рішення залежить від точності апроксимації (кількості проміжків r_i) сепарабельних функцій (4.20) – (4.21) обмежень (4.11) – (4.12).

Зауваження 4.10. Якщо рішення задачі (4.21) не є допустимою точкою області D , то необхідно приймати рішення про збільшення числа безпосередніх виконавців робіт.

Запропонована методика реалізована при вирішенні задачі складання

календарного графіка виконання робіт по реконструкції водопровідних мереж між камерами МК-9607 і МК-9608 по Московському проспекту, 254Б в м. Харкові. Проект реконструкції включає 25 робіт.

Перелік і характеристики робіт представлені в табл. 4.2, де виділені операції, що підлягають розподіленню, наприклад, операція 2 може бути представлена як операція 2₃ і 2_ф.

Таблиця 4.2 – Характеристики робіт проекту реконструкції водопровідних мереж

№ роботи	№ роботи з урахуванням розбиття	Найменування робіт	Тривалість людино / год	Кількість днів згідно графіку	В день згідно графіку	Кількість людей	Всього днів	Всього людино·год.
1	1	Підготовчі роботи: трасування магістралі	60	2	30	3,8		
2	2 ₃	Розбирання асфальтового покриття та виробництво земляних робіт	3140	2	157	19,62	9	3356
3	2 _ф	-----	304	7	434,6	54,32		
4	3 ₄	Демонтаж бетонних лотків перекриття	160,7	1	160,7	20,01	7	1125
5	3 _ф	-----	964,3	6	160,7	20,09		
6	4 ₅	Демонтаж трубопроводів	137,4	1	137,4	17,17	7	962
7	4 _ф	-----	824,6	6	137,4	17,17		
8	5 ₆	Монтаж непрохідних каналів з лотків Л 11-2/ 8	304	2	76	9,5	4	608
9	5 _ф	-----	304	2	76	9,5		
10	6	Цегляна кладка стін каналів	117	2	58,5	7,31	2	117
11	7 ₈	Пристрій оглядових колодязів	120,8	2	60,4	7,25	5	302
12	7 _ф	-----	181,2	3	60,4	7,25		
13	8	Монтаж плит перекриття оглядових колодязів	210	3	70	8,75	3	210

14	9	-----	2347	17	138	17,25	17	2347
15	10	Виконання робіт з перевезення трубопроводів	545	2	272	34,06	2	545
16	11	Установка ковзаючих хомутових опор	232	10	23,2	2,9	10	232
17	12	Гідровипробування тепломагістралі	24	2	12	1,5	2	24
18	13 ₁₄	Установка муфтових з'єднань трубопроводу	45,2	2	22,6	2,82	5	113
19	13 _f	-----	67,8	3	22,6	2,82		
20	14	Монтаж лотків каналів	608	4	152	19	4	608
21	15	Пристрій цементно-піщаної стяжки лотків	388	7	55,4	6,92	7	388
22	16	Пристрій двох пластів з поліетиленової плівки	174	8	21,7	2,71	8	174
23	17	Пристрій цементно-піщаної стяжки лотків	395	7	56,4	7,05	7	395
24	18	Зворотне засипання траншей	601	8	75,1	9,39	8	601
25	19	Відновлення асфальтового покриття	443	3	147,6	18,37	3	443

На рис. 4.7 показана мережева модель (граф), що задає впорядкування виконання робіт проекту.

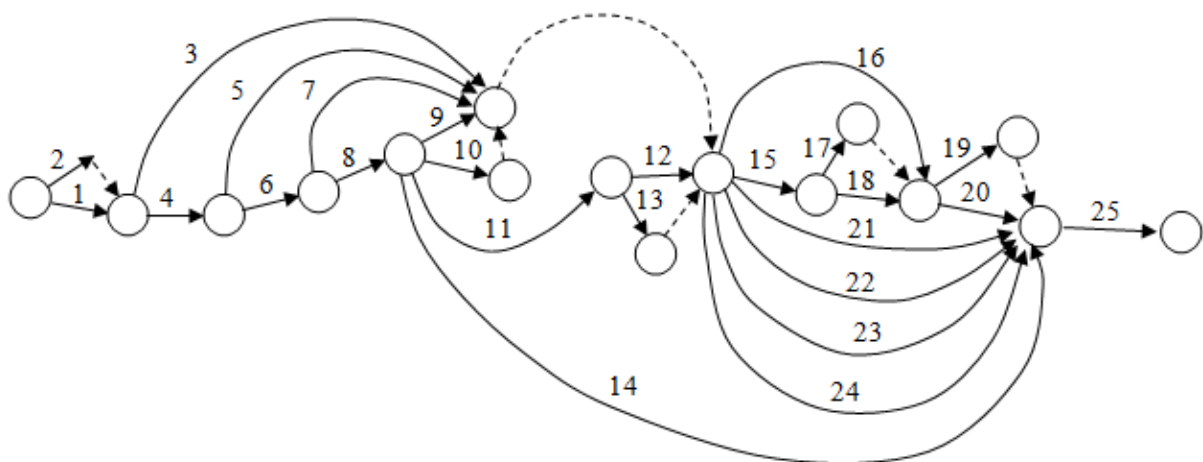


Рисунок 4.7 – Мережева модель проекту реконструкції водопровідних мереж

На рис. 4.8 представлений розв'язок задачі 1 (критичні операції виділені темним кольором), на рис. 4.9 — розв'язок задачі 2.

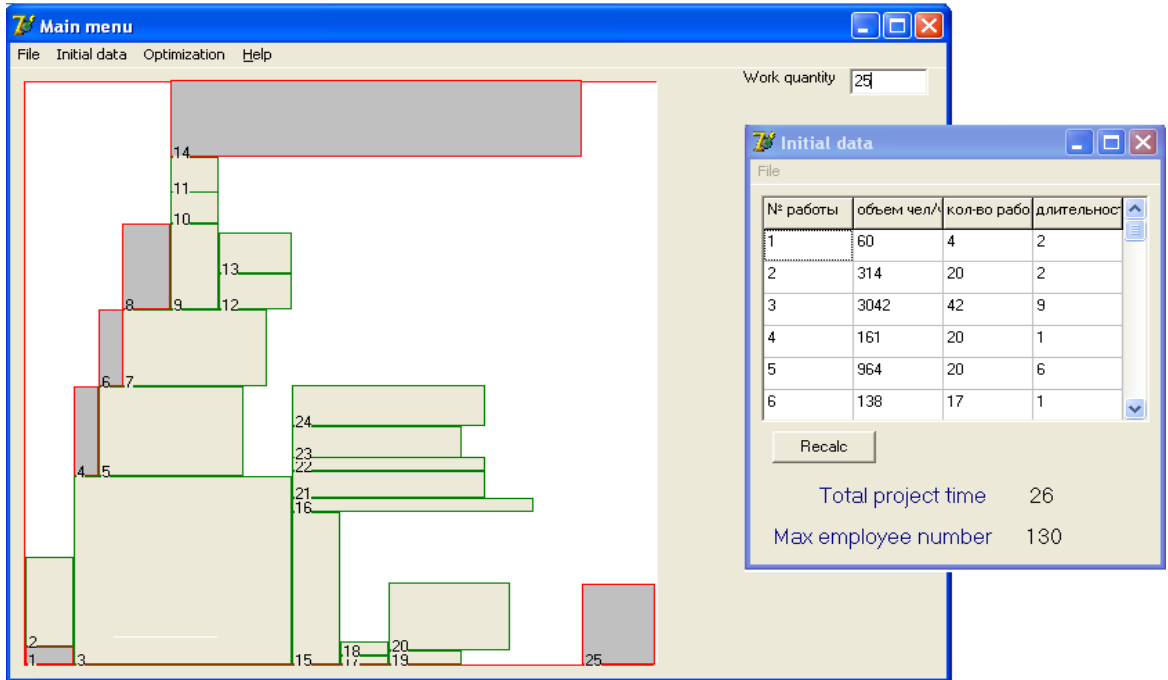


Рисунок 4.8 –Розв'язок задачі 1

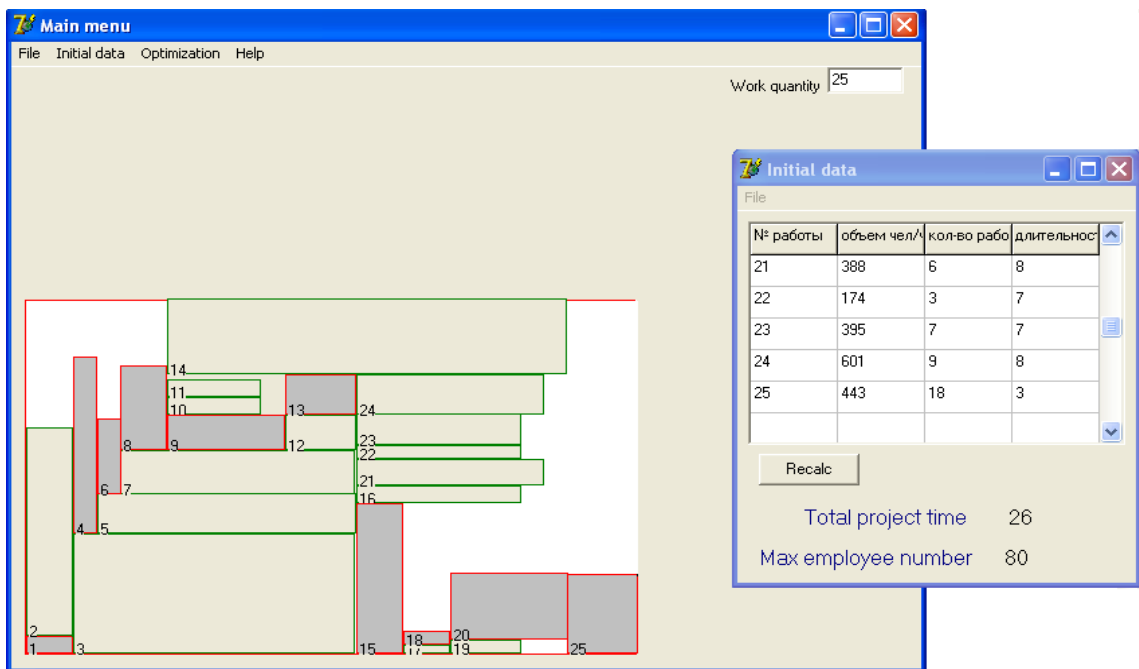


Рисунок 4.9 – Розв'язок задачі 2

Відзначимо, що в результаті рішення задачі вирівнювання ресурсів змінилася кількість і склад множини критичних операцій програми, але тривалість критичного шляху залишилася колишньою.

Застосування запропонованого підходу дозволило скоротити час виконання робіт з реконструкції з 28 до 26 днів і розв'язати задачу (4.21) вирівнювання людських ресурсів, в результаті чого чисельність одночасно працюючих виконавців зменшилася на 50 осіб – з 130 чоловік до 80 чоловік.

4.4 Висновки по главі 4

1 Побудовано математичну модель багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як оптимізаційної задачі розміщення кінцевого набору геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками і просторовою формою.

2 Запропоновано метод розв'язання оптимізаційної задачі розміщення, заснований на схемі методу гілок і меж, який враховує можливість розриву некритичних робіт проекту в часі і по ресурсах на часткові роботи.

3 Проведено чисельні дослідження розробленого методу на прикладі оптимізації проектів виконання робіт по монтажу комплексної системи пожежної автоматики складського терміналу в м Вишневе Київської області та реконструкції водопровідних мереж в м. Харкові.

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В. Математические методы в организации и планировании производства / Л.В. Канторович. – Л.: ЛГУ, 1939. – 250с.
2. Канторович Л.В. Расчет рационального раскроя промышленных материалов / Л.В. Канторович, В.А. Залгаллер. – Л.: Лениздат, 1957.– 197с.
3. Рвачев В.Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов / В.Л. Рвачев // Доклады АН Украины. – 1963. –N 4. – С. 765–767.
4. . Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов / Ю.Г. Стоян. – К.: Наук. думка, 1975. – 239с.
5. Gilmore P. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions / P. Gilmore, R. Gomory // Operations Research. – 1965. – № 13. – P. 94-120.
6. Мухачева Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ / Э.А. Мухачева. – М.: Машиностроение, 1984. – 176 с.
7. Михалевич В.С. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов / В.С. Михалевич, А.И. Кукса. – М.: Наука, 1983. – 208 с.
8. Михалевич В.С. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ / В.С. Михалевич, Шкурба В.В. // Кибернетика. – 1966. № 2. – С. 34-40.
9. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К.: Наук, думка, 2003.– 262 с.
10. Шор Н.З. Об одном подходе к получению глобальных экстремумов в полиномиальных задачах математического программирования / Н.З. Шор // Кибернетика. – 1987. – № 5. – С. 102–106.
11. Скопецький В.В. Розподіл ресурсів у просторі і часі / В.В. Скопецький, В.В. Остапенко, Г.С. Фінін. – К.: Наук, думка, 2003.– 322 с.
12. Донец Г.А. Экстремальные покрытия графов / Г.А. Донец., А.Я. Петренюк. – Кіровоград: Комбінаторні конфігурації, 2009. – 172 с.
13. Рвачев В.Л. Теория R–функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев.– К.: Наук. думка, 1982.–551с.
14. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С. В. Яковлев. – К.: Наук. думка, 1986.– 267 с.

15. Гиль Н.И. Элементы теории геометрического проектирования / Н.И. Гиль, С.В. Яковлев, М.В. Новожилова и др.: Под ред. акад. НАН Украины Рвачева В.Л. – К.: Наук. думка, 1995.– 248с.
16. Стоян Ю.Г. Теорія і метод евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Емець.– К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
17. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян. – Харьков: 1983.–36с. (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.; 181).
18. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – К.: Наук. думка, 1976. – 247 с.
19. Верхотуров М.А. Задача нерегулярного раскроя плоских геометрических объектов: моделирование и расчет рационального раскроя / М.А. Верхотуров // Информационные технологии. – 2000. – №5. – С.37–42.
20. Белякова Л.Б. Об оптимальном раскрое листового металла / Л.Б. Белякова // Автоматизация технологического проектирования при помощи ЭВМ. –М.: Наука. 1966. – С. 105–115.
21. Гиль Н.И. Об одном способе решения задачи прямоугольного раскроя / Н.И. Гиль, А.К. Пандорин. – Харьков, 1985. – 27 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; 205).
22. Новожилова М.В. Оптимизация при построении раскройных планов в СУ ГАП / М.В. Новожилова, А.В. Карташов // Проектирование автоматизированных систем контроля и управления сложными объектами: междунар. школа, 27–30 сентября 1992 г., Туапсе: тез. докл. – Харьков: ХИРЭ, 1992.– С. 12.
23. Стоян Ю.Г. Автоматизация проектирования компоновки оборудования летательных аппаратов / Ю.Г. Стоян, Е.Н. Кулиш.– М.: Машиностроение, 1984.– 192с.
24. Кокотов В.З. Алгоритм плотного размещения разногабаритных элементов на плате / В.З. Кокотов // Информационные технологии. – 1998. – № 11. – С. 16–21.
25. Stoyan Yu.G. Automation of arrangement design of engineering systems of block design. Mathematical model/ Yu.G. Stoyan, A.F. Loiko // Engineering simulation. – 1998. – № 15. – P. 815–825.
26. Стоян Ю.Г. Размещение источников физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Пуятин. – К.: Наукова думка, 1981. – 182с.
27. Стоян Ю.Г. Оптимизация технических систем с источниками

физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Путятин. – К.: Наукова думка, 1988. – 189с.

28. Гиль Н.И. Построение математической модели и решение задачи размещения выпуклых n -мерных политопов в n -мерном параллелепипеде /Н.И. Гиль, М.С.Софронова // Доповіді Національної Академії наук України. – 2006. – №8. – С. 95–102.

29. Гиль Н.И. Об одном подходе к построению годографа вектор-функции плотного размещения плоских геометрических объектов, устойчивого к вычислительной погрешности / Н.И. Гиль, В.М. Комяк. – Харьков. – 1991. – 23 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; 350).

30. Новожилова М. В. Применение методологии множителей Лагранжа в комбинаторной задаче размещения прямоугольников / М. В. Новожилова, И.Е. Лазарева // Кибернетика и системный анализ.– 1999. – № 3.– С.141–147.

31. Новожилова М. В. Методологія розв'язання оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування / М.В. Новожилова // Вісник ЗДУ. Фіз.-мат. науки, біологічні науки.–1999.– № 1.–С. 79–82.

32. Новожилова М. В. Моделювання основних обмежень в нелінійних задачах оптимізаційного геометричного проектування / М.В. Новожилова // Прикладна геометрія і інженерна графіка. – К.: КДТУБА. – 1999, – № 65. С.62–68.

33. Новожилова М.В. Моделювання і розв'язання багаторесурсної задачі календарного планування як задачі оптимального розміщення гіперпаралелепедів / М.В. Новожилова // АСУ и приборы автоматики – 2001 – № 115 – С. 54–61.

34. Ненахов Э.И. Метод линеаризации и негладкая оптимизация / Э.И. Ненахов, Л.А. Соболенко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 3. – С. 90–104.

35. Романова Т.Е. Математическая модель и метод решения задачи оптимизации упаковки произвольных двумерных объектов в прямоугольных областях/ Т.Е. Романова, Е.А. Ступак, М.В. Злотник // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2009. – №1. – С. 48–53.

36. Stoyan Y. Φ functions for primary 2D-objects / Y. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil, T. Romanova // Studia G.Informatica – 2002. – Vol. 2 (1). – P. 1–32.

37. Stoyan Y. Construction of Φ -function for two convex polytopes / Y. Stoyan, N. Gil, T. Romanova, J. Terno, G. Scheithauer // MATH-NM-13. –

2000. – 22р.

38. Чуб И.А. Компонентно-тепловой синтез плат РЭА // И.А. Чуб, В.П. Путьгин // Прикладные методы кибернетики. – 1984. – Вып. 32 (4). – С. 123-130.

39. Чуб И.А. Автоматизация проектирования технических систем с источниками физических полей / И.А. Чуб // Вестник Харьковского политехнического института. – 1990. – №273. – С. 65-68.

40. Чуб И.А. Размещение объектов техногенной опасности с минимизацией уровня воздействия возможной чрезвычайной ситуации / И.А. Чуб, Е.В. Морщ // Проблемы пожарной безопасности. – 2004. – Вып. 16. – С. 248-251.

41. Чуб И.А. Моделирование размещения пожароопасных объектов: минимизация загрязнения атмосферы / И.А. Чуб, М.В. Новожилова, В.А. Андронов. – Харьков: ИД «ИНЖЕК», 2012. – 134с.

42. Чуб И.А. Построение Ф-функции объектов с изменяемыми метрическими характеристиками и пространственной формой / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Моделювання та інформаційні технології. – 2003. – Вип. 22. – С.229–234.

43. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A guide to the Theory of NP-Completeness // San-Francisco, Freeman. 1979.

44. Fowler, R. J., Paterson, M. and Tanimoto, S. L., 1981, " Optimal packing and covering in the plane are NP-complete" , Inf. Process. Lett., Vol. 12, pp. 133–137.

45. Mukherjee I. A review of optimization techniques in metal cutting processes / I. Mukherjee, P. Ray // Computers and Industrial Engineering. – 2006. – Vol. 50(1). – P.15–34.

46. Чуб І.А. Конструктивні особливості задачі розміщення геометричних об'єктів в анізотропній області / І.А. Чуб // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2008. – Вип. 80. – С. 139–143.

47. Нефедова А.Л. Система геометрического моделирования жилой застройки / А.Л. Нефедова, В.П. Лулаков // Науковий вісник будівництва. – 1998. – Вип. 2. – С. 168-171.

48. Стоян Ю.Г. Оптимизация размещения источников тепла в прямоугольной области с изменяемыми размерами / Ю.Г. Стоян, В.П. Путьгин, И.А. Чуб // Проблемы машиностроения. – 1985.– Вып. 24. – С. 53-56.

49. Стоян Ю.Г. Оптимизация температурного поля перфорированной пластины с дискретными тепловыми источниками / Ю.Г. Стоян, В.П. Путьгин, И.А. Чуб // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1985. – С. 26-30.

50. Чуб И.А. Оптимизационная динамическая задача управления ограниченными ресурсами проекта / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Современные информационные технологии в экономике и управлении предприятиями, программами и проектами: VIII междунар. науч.–практ. конф., 20–26 сентября 2010 г., Алушта: тез. докл.– Харьков: НАУ им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2010. – С. 191–193.

51. Чуб И.А. Решение экстремальной задачи распределения ресурсов как задачи размещения прямоугольников с изменяемыми метрическими характеристиками / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Информатика та системні науки. ISS–2011: наук.–практ. конф., 17–19 березня 2011 р., Полтава: тез. доп. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – С. 331–334.

52. Новожилова М.В. Математическая модель оптимального распределения нескольких ресурсов инвестиционно–строительного проекта / М.В. Новожилова, И.В. Беленченко // Науковий вісник будівництва. – 2007. – Вип. 43. – С. 236–239.

53. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Haußner, H. Schumann // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 183. – P. 1109–1130.

54. Новожилова М. В. Применение методологии множителей Лагранжа в комбинаторной задаче размещения прямоугольников / М.В. Новожилова, И.Е. Лазарева // Кибернетика и системный анализ.– 1999. – № 3.– С.141–147.

55. Новожилова М.В. Решение оптимизационной задачи размещения прямоугольников в полосе с учетом возможности их разбиения / М.В. Новожилова, Н.А. Попельных, И.В. Беленченко // Системи обробки інформації – 2006. – № 8 – С. 67–73.

56. Новожилова М.В. Модификация точного метода решения задачи размещения прямоугольных объектов / М.В. Новожилова, И.А. Чуб // АСУ и приборы автоматики. – 2008. – Вып. 145. – С. 57–63.

57. Чуб І.А. Формалізація умов взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутників в анізотропній області в полярній системі координат / І.А. Чуб, М.В. Новожилова // Системи обробки інформації. – 2010. – Вып. 1 (82). – С. 196–199.

58. Чуб І.А. Аналітичний опис геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат / І.А. Чуб, М.В. Новожилова // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – 2010. – Вип. 26. – С. 116–121.

59. Баркалов С.А. Математические основы управления проектами / С.А. Баркалов, В.И. Воропаев, Г.И. Секлетова и др. – М.: Высшая школа,

2005. – 423с.

60. Стоян Ю.Г. Пространства геометрических информаций / Ю.Г. Стоян – Харьков, 1985. – 68с. – (Препринт АН УССР / Ин-т проблем машиностроения; 223).

61. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К.: Наук. думка, 1981. – 288с.

62. Сергієнко І.В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності / І.В. Сергієнко. – К.: Академперіодіка, 2010. – 318с.

63. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. – К.: Наук, думка. 1988. – 472 с.

64. Krichagina E.V. A dynamic stochastic stock-cutting problem / E.V. Krichagina, R. Rubio, M.I. Taksar, L.M. Wein // *Operations Research*. – 1999. – №46. – P. 690–701.

65. Мухачева Э.А. Метод последовательного уточнения оценок: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя / Э.А. Мухачева, А.С. Мухачева, Г.Н. Белов // *Информационные технологии*. – 2000 – №2. – С. 11–17.

66. Faggioli E. Heuristics and exact methods for the cutting sequencing problem / E. Faggioli, C.A. Bentivoglio // *EJOR*. – 1998. – № 110.– P. 564–575.

67. Балабанов В.Н. Многокритериальная задача рационального планирования продольного раскроя рулонного материала / В.Н. Балабанов // *Проблемы информационных технологий*. – 2009. – №2 (6). – С.57–63.

68. Degraeve Z. A mixed integer programming model for solving a layout problem in the fashion industry / Z. Degraeve, M. Vandebroek // *Managment Science*. – 1998. – №44. – P. 301–310.

69. Coffman E.G. Average-case analysis of cutting and packing in two dimensions/ E.G. Coffman, P.W. Shor // *European Journal of Operational Research*. –1990.– № 44.– P. 134–145.

70. Письменчук Н.В. Методы и алгоритмы компоновочного синтеза технических систем с решетчатой структурой: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. техн. наук: спец. 05.13.01 «Управление в технических системах» / Н.В. Письменчук. – Харьков. – 1988. – 16с.

71. Stoyan Yu.G. Regular packing of congruent polygons on the rectangular sheet/ Yu.G. Stoyan, A.V. Pankratov // *European Journal of Operational Research*. –1999.– N 113.– P. 653–765.

72. Винарский В.Я. Математическая модель и методы решения задач

периодического размещения трехмерных объектов: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. физ.– мат. наук: спец. 05.13.16 «Математические методы в научных исследованиях» / В.Я. Винарский. – Киев. – 1987. – 16с.

73. Дубро Г.В. Математические модели и оптимизационные методы периодического размещения многоугольников: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. техн. наук: спец. 05.13.01 «Управление в технических системах» / Г.В. Дубро. – Харьков. – 1992. – 16с.

74. Белякова Л.Б. Вопросы оптимального расположения конгруэнтных фигур на плоскости: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. физ.– мат. наук: спец. 01.05.02 «Математическое моделирование и вычислительные методы» / Л.Б. Белякова. – Горький. – 1970. – 22с.

75. Stoyan Yu. Non guillotine Placement of Rectangles into a Strip of Given Width / Yu. Stoyan, M. Novozhilova // Pesquisa Operacional. – 1999. – №19(2). – P. 189–211.

76. Чуб И.А. Метод решения линеаризованной задачи размещения неориентированных геометрических объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Управляющие машины и системы. – 2011. – № 5. – С. 47-52.

77. Рвачев В.Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов / В.Л. Рвачев // Доклады АН Украины. – 1963. –N 4. – С. 765–767.

78. Стоян Ю.Г. Об оптимальном размещении геометрических объектов: автореф. дис. на соиск. уч. степени докт. техн. наук: спец.: 01.05.13 «Математическая кибернетика» / Ю.Г. Стоян. – М. – 1970. – 32с.

79. Стоян Ю.Г. Свойства и способы реализации функции плотного размещения / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – К. – 1972. – 46 с. – (Препринт / АН Украины. Ин–т кибернетики; 18).

80. Heckman R. Computing closely matching upper and lower bounds on textile nesting problems. / R. Heckman, T. Lengauer // European Journal of Operational Research. – 1998. – №108. – P. 473–489.

81. Milenkovic V. A monotonic convolution for Minkowski sums / V. Milenkovic, E. Sacks // International Journal of Computational Geometry and Applications. – 2007. – 17(4). – P. 383–396.

82. Стоян Ю.Г. Сумма Минковского и годограф вектор–функции плотного размещения / Ю.Г. Стоян, Л.Д. Пономаренко // Доклады АН Украины. – 1977. – №10. – С. 888–890.

83. Стоян Ю. Г. Алгебро–топологические свойства ф–объектов / Ю.Г. Стоян, В.Я. Винарский. – Харьков. – 1981. – 34с. – (Препр. / АН УССР. Ин–т пробл. машиностроения; № 166).

84. Стоян Ю.Г. Основные свойства и методы построения Ф–функций / Ю.Г. Стоян, Л.Д. Пономаренко, В.Я. Винарский. – Харьков, 1984.– 28с.– (Препринт / АН УССР. Ин–т пробл. машиностроения; № 193).

85. Новожилова М. В. Методологія розв’язання оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування/ М. В. Новожилова // Вісник ЗДУ: Фіз.–мат. науки, біологічні науки.–1999.–№ 1.–С. 79–82.

86. Новожилова М.В. Використання поняття Ф–функції в 2D задачах геометричного проектування / М.В. Новожилова, О.К. Пандорін // Вісник ЖІТІ. Фундаментальні науки. – 1998. – №8. – С. 328–331.

87. Софронова М.С. Математическое моделирование размещения выпуклых n -политопов в n -мерном параллелепипеде: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. физ.– мат. наук: спец. 01.05.02 «Математическое моделирование и вычислительные методы» / М.С. Софронова. – Харьков. – 2007 – 16с.

88. Lodi A. Two–dimensional packing problems: a survey/ A. Lodi, S. Martello, M. Monaci // European Journal of Operational Research. – 2002. – Vol. 141. – P. 241–252.

89. Lodi A. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two–dimensional bin packing problems/ A. Lodi, S. Martello, D.Vigo // INFORMS J. Computing. – 1999. – Vol. 11. – P. 345–357.

90. Михалевич В.С. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / В.С. Михалевич, Н.З. Шор, Л.А. Галустова и др.– К.: Наук. думка, 1977.– 178с.

91. Магас С.Л. Об оптимальном раскрое полосы прямоугольными заготовками / С.Л. Магас // Вычислительная математика в современном научно–техническом прогрессе: III респ. науч.–техн. конф.: тез. докл. – К.: ИК АН Украины. – 1982. – С. 92–93.

92. Магас С.Л. Определение и свойства структур линейных неравенств / С.Л. Магас // Автоматизация проектирования в машиностроении. – 1983. – Вып. 3. – С. 5–11.

93. Новожилова М. В. Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств. – Харьков, 1988. – 45 с. – (Препр. / АН УССР. Ин–т пробл. машиностроения; 292).

94. Stoyan Y. G. Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints/ Y. G. Stoyan, G. N. Yaskov // Intern. Trans. Oper. Res. – 1998. – Vol.5. – №1. – P. 45–57.

95. Dong H. Vehicle component layout with shape morphing – an initial

study / H. Dong, G.M. Fadel, V.Y. Blouin // ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2006. – P. 112-115

96. Мухачева Э.А. Метод поиска минимума с запретами в задачах двумерного гильотинного раскроя / Э.А. Мухачева, А.И. Ермаченко, Т.М. Мирзетдинов, А.О. Усманова // Информационные технологии. – 2001. – №6. – С.25–31.

97. Li Zh. Compaction and separation algorithms for non-convex polygons and their applications/ Zh. Li, V. Milenkovic // European Journal of Operational Research. – 1995.– № 3.– P. 539–561.

98. Oliveira J.F. Applying constraint logic programming to the resolution of nesting problems / J.F. Oliveira, M.A.M Carravilla, C. Ribeiro // 16th European Conference on Operational Research. – Brussels, Belgium. – 1998.– P.16.

99. Grinde R.B. Containment of a single polygon using mathematical programming / R.B. Grinde, T.M. Cavalier // European Journal of Operational Research. – 1996. – № 92. – P.368–386.

100. Deb K. A fast elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm for multi-objective optimization: / K. Deb, S. Agrawal, A. Pratab, T. Meyarivan //". Parallel Problem Solving from Nature. NSGA-II: VI Conference. – Springer, 2000. – № 1917. – P. 849–858.

101. Jacquenot G. 2D multi-objective placement algorithm for free-form components / G. Jacquenot, F. Bennis, J.-J. Maisonneuve, Ph. Wenger // Proceedings of ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences, August 30 – September 2, 2009, San Diego, USA, 2009. – P. 35-39.

102. Винарский В.Я. Ф-отображение и некоторые его приложения в задачах геометрического проектирования/ В.Я. Винарский, М.В. Новожилова // Проблемы бионики. – 1985. – Вып.35. – С. 32–39.

103. Магас С. Л., Методы решения экстремальных задач размещения многоугольных геометрических объектов в полосе: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. физ.– мат. наук: спец. 05.13.16 «Математические методы в научных исследованиях» / С.Л. Магас. – М.: 1984. – 20 с.

104. Новожилова М.В. Выбор метода точного решения задачи размещения многоугольников в области с подвижными границами / М.В. Новожилова, А.В. Карташов // Математическое и компьютерное моделирование в машиностроении. – 1994. – С. 9–20.

105. Пандорин А.К. Методы и алгоритмы построения раскладок в

системах управления раскроем изотропных материалов: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. техн наук: спец. 01.05.03 «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин и систем» / А.К. Пандорин. – Харьков, 1988. – 17с.

106. Новожилова М.В. Метод решения задачи оптимизации линейной функции цели на структуре нелинейных неравенств / М.В. Новожилова // Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов.– 1993. – С. 25–30

107. Стоян Ю.Г. Размещение кругов и невыпуклых многоугольников с поворотами в прямоугольнике минимальной длины / Ю.Г. Стоян, М.В. Злотник // Докл. НАН Украины. – 2007.– № 2.– С. 37–42.

108. Martins T. C. Simulated annealing applied to the irregular rotational placement of shapes over containers with fixed dimensions/ Thiago de C. Martins, M. S. G. Tsuzuki // Expert Systems with Applications: An International Journal. 2010.– Vol. 37(3). – P. 138-156.

109. Umetani S. Solving the Irregular Strip Packing Problem via Guided Local Search for Overlap Minimization / S. Umetani, M. Yagiura, S. Imahori, T. Imamichi, K. Nonobe, T. Ibaraki. – Mathematical engineering technical reports. – Department of mathematical informatics Graduate school of information science and technology the University of Tokyo, Japan, METR 2008–22, May 2008.

110. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации / Б.Н. Пшеничный – М.:Наука, 1983. – 136 с.

111. Новожилова М.В. Комп'ютерне моделювання умови неперетину в задачах розміщення в анізотропній області / М.В. Новожилова, Є.А. Астахов // Системи обробки інформації. – 2003. – № 6. – С 138–143.

112. Чуб І.А. Формалізація умов взаємного неперетину об'єктів задачі розміщення багатокутників в анізотропній області в полярній системі координат / І.А. Чуб, М.В. Новожилова // Системи обробки інформації. – 2010. – Вып. 1 (82). – С. 196–199.

113. Чуб И.А. Метод решения задачи размещения в анизотропной области / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Компьютерная математика. – 2011. – № 3. – С.

114. Попельнюх Н.О. Математичне моделювання задачі управління ресурсами проекту в умовах невизначеності задавання вихідних даних та в умовах повного детермінізму / Н.О. Попельнюх, М.В. Новожилова // Управління проектами: стан та перспективи: міжнар. наук.– практ. конф.: тези доп. – Миколаїв. – 2005. – С. 113–114.

115. Новожилова М.В. Оптимизационная задача управления ресурсами с учетом погрешностей исходных данных / М.В. Новожилова, Н.А. Попельных // Геометричне та комп'ютерне моделювання – 2006. – Вип.15. – С. 64–73.
116. Чуб И.А. Решение задачи распределения ресурсов проекта как оптимизационной задачи размещения геометрических объектов с изменяемыми метрическими характеристиками / И.А. Чуб, А.С. Иванюков, М.В. Новожилова // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 3. – № 5–6. – С. 79–90.
117. Чуб І.А. Математична модель та розв'язок оптимізаційної задачі розподілу ресурсів проекту /І.А. Чуб, М.В. Новожилова, І.В. Беленченко // Системи обробки інформації. – 2011. – Вип. 2 (92). – С. 291–294.
118. Munos–Perez J. Location of an undesirable facility in a polygonal region with forbidden zones/ J. Munos–Perez, J. J. S. Rodrigues // European Journal of Operational Research. – 1999. – № 114. – P. 372–379.
119. Чуриков К.А. Математическая модель задачи оптимизации компоновочных решений при синтезе экологических и теплофизических систем с дискретными источниками: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. физ.– мат. наук: спец. 01.05.02 «Математическое моделирование и вычислительные методы» / К.А. Чуриков. – Харьков. – 2000. – 16с.
120. Чуб И.А. Моделирование размещения пожароопасных объектов с учетом опасных факторов возможного пожара / И.А. Чуб, Е.В. Морщ // Проблемы пожарной безопасности. – 2004. – Вып. 15. – С. 224–227.
121. Чуб И.А. Построение системы геометрических ограничений в задачах оптимизации размещения пожаровзрывоопасных объектов / И.А. Чуб // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – 2007. – Вип 16. – С. 125–132.
122. Абрамов Ю.А. Формирование априорной информации для систем ликвидации последствий чрезвычайной ситуации / Ю.А. Абрамов, А.А. Тарасенко // Проблеми надзвичайних ситуацій. – 2007. – Вип. 6. – С. 11-22.
123. Чуб И.А. Параметризация концентрационного поля аэрозольных выбросов пожара / И.А. Чуб, Е.В. Морщ // Проблемы пожарной безопасности. – 2003. – Вып. 13. – С. 159–162.
124. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир. – 1975. – 536с.

Наукове видання

ЧУБ Ігор Андрійович
НОВОЖИЛОВА Марина Володимирівна
АНДРОНОВ Володимир Анатолійович

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ
РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ З МЕТРИЧНИМИ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЩО ЗМІНЮЮТЬСЯ**

Монографія

Підписано до друку 30.01.17 . Формат 60x84/16.
Папір 80 г/м². Друк різнограф. Ум.друк. арк. 10,07.
Тираж прим. Вид. № 103/12. Зам. № 609/14. Обл.вид арк. 4,5.
Відділення редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
61023, м. Харків, вул. Чернишевська, 94