

УДК 514.18

**Леонід КУЦЕНКО**

[leokuts@i.ua](mailto:leokuts@i.ua)

ORCID: 0000-0003-1554-8848

**Олег СЕМКІВ**

[legooleg1@rambler.ru](mailto:legooleg1@rambler.ru)

ORCID: 0000-0002-9347-0997

**Леонід ЗАПОЛЬСЬКИЙ**

[z\\_l\\_l@ukr.net](mailto:z_l_l@ukr.net)

ORCID: 0000-0003-4357-2933

м. Харків

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА В МОДЕЛІ ПУАНСО ТА ПОЯСНЕННЯ ЕФЕКТУ ДЖАНІБЕКОВА

*Наведено математичне наповнення *table*-програми інтерпретації Пуансо обертання твердого тіла з нерухою точкою та пояснення на базі цього динамічного прояву ефекту Джанібекова. Одержано графічну модель кочення без ковзання еліпсоїда інерції тіла по одній зі своїх дотичних площин. У результаті, на дотичній площині будується зображення герполодії, а на поверхні еліпсоїда – її відповідної полодії, за допомогою яких можна аналізувати стійкість обертання або перевероти твердого тіла з нерухою точкою.*

**Ключові слова:** інтерпретація Пуансо, моменти інерції тіла, еліпсоїд інерції, кочення еліпсоїда, полодія, герполодія, ефект Джанібекова.

### Постановка проблеми

Для дослідження стійкості обертання навколо головних осей еліпсоїда інерції твердого тіла з нерухою точкою зручно використовувати геометричну інтерпретацію Пуансо [1, 2]. Сутність картини Пуансо полягає у тому, що для визначення стійкості обертання тіла слід розглянути рух його еліпсоїда інерції, який котиться без ковзання по одній зі своїх дотичних площин (площині Пуансо). Ця площина розташована перпендикулярно вектору кінетичного моменту тіла й залишається нерухою у просторі. Миттєва кутова швидкість за величиною пропорційна радіусу-вектору точки дотику, а за напрямком з ним збігається. Тоді стійкість обертання твердого тіла визначається формою лінії кочення еліпсоїда, яка утворюється на дотичній площині і має назву герполодії, а також формою і розташуванням її відповідної лінії на поверхні еліпсоїда – полодії. Висновок про стійкість розглянутого руху можна зробити за розташуванням полодій

на еліпсоїді інерції. Класичний опис та визначення геометричної форми полодій зводиться до застосування еліптичних інтегралів і не просто формалізується при складанні комп'ютерних алгоритмів. Звідси слідує важлива роль графічних технологій, які дозволять унаочнити картину Пуансо, і тим самим сприятимуть розв'язанню на якісному рівні зазначеного кола задач.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботах [1, 2] наведено детальний аналіз стійкості обертань твердого тіла залежно від форми полодій на еліпсоїді інерції. Але зазначені результати базуються виключно на формулах та ілюструються рисунками. Для оперативного дослідження впливу параметрів на обертання за інерцією об'єкту з нерухою точкою слід мати оперативні прояви ефекту кочення еліпсоїда інерції по площині Пуансо [3]. А для цього слід розробити універсальний алгоритм геометричного моделювання у вигляді комп'ютерної анімації зазначеного

процесу, де графічна інформація залежатиме від значень моментів інерції вздовж осей декартової системи координат та початкових значень кутів обертання.

Відомо [1-3], що обертання твердого тіла навколо середньої за величиною осі еліпсоїда інерції виявляється нестійким (на рис.1 – це вісь  $Oy$ ). Справді, при досить малому збурюванні обертання навколо середньої осі еліпсоїда інерції новий рух буде визначатися коченням еліпсоїда по площині Пуансо, причому геометричним місцем точок дотику буде служити одна з полюдій, досить близька до кривої, складеної з будь-яких половин двох еліпсів – сепаратрис.

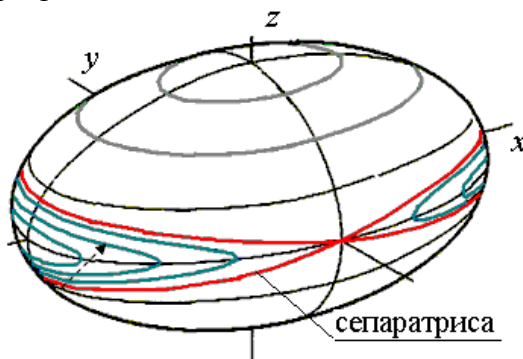


Рис. 1. Еліпсоїд інерції з полюдіями та сепаратрисами на поверхні

За допомогою комп'ютерної анімації можна пересвідчитись, що рух поверхні еліпсоїда інерції буде однаково ймовірний по кожній з досить близьких полюдій, що лежать у чотирьох областях, на які поверхня розділяється двома сепаратрисами. Це характерно для нестійкого обертання і істотно відрізняє цей випадок від обертання навколо великої й малої осей (на рис.1 – це осі  $Ox$  і  $Oz$ ), коли збурений рух здійснюється коченням еліпсоїда інерції уздовж досить близької полюдії, що лежить у тій же області еліпсоїда, що й кінець відповідної півосі, яку «огортає» полюдія (рис. 1).

Для інженерних досліджень набагато зручніше було б описані в літературі властивості сприймати за допомогою динамічних зображень, створених засобами графічних комп'ютерних анімацій. У роботі [4] наведено програму моделювання геомет-

ричної картини Пуансо, складеної мовою пакету MATHEMATICA. Реалізацію її для користувача наведено у роботі [5]. У роботі [6] наведено аналогічну програму для середовища MatLab. Але у зазначених програм обмеженим є використання залежностей, одержаних у аналітичному вигляді. Для багатьох аналогічних програмних продуктів (наприклад, [7]), тексти програм закриті за інтерфейсами. Теж стосується і результатів, які викладені на youtube (наприклад, [8]). Тому доцільним буде реалізувати зазначене комп'ютерне моделювання геометричної інтерпретації Пуансо у середовищі математичного пакету maple і перевірити його на прикладі цікавої прикладної задачі, відомої як «ефект Джанібекова» [9-14]. На основі складеної програми в даній роботі буде пояснено динамічний прояв ефекту космонавта Джанібекова.

### Постановка завдання

Навести математичне наповнення програми комп'ютерного графічного моделювання обертання твердого тіла, основане на геометричній інтерпретації Пуансо. Для цього необхідно описати та побудувати: а) нерухому дотичну площину Пуансо; б) герполоїду на площині Пуансо; в) полюду на поверхні еліпсоїда інерції; г) процес кочення еліпсоїда інерції по площині Пуансо; д) приклади аналізу обертання твердого тіла; е) прояв ефекту Джанібекова стосовно обертання твердого тіла в невагомості.

### Виклад основного матеріалу

Позначимо через  $I_1$ ,  $I_2$  і  $I_3$ , – моменти інерції твердого тіла відносно нерухомих осей глобальної системи координат  $x$ ,  $y$  і  $z$ , а через  $w_1$ ,  $w_2$  і  $w_3$  – проекції вектора миттєвої кутової швидкості тіла на ці осі. Відомо [1, 2], що характер полюдій і герполоїдів істотно залежить від величин моментів інерції  $I_1$ ,  $I_2$  і  $I_3$ , а також від інтегралів

$$I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2 = K^2 = \text{const}; \quad (1)$$

$$I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2 = 2T = \text{const}, \quad (2)$$

де  $K$  – кінетичний момент, а  $T$  – кінетична енергія тіла обертання.

Нехай площина Пуансо дотикається еліпсоїда інерції у точці  $P$ , вона перпендикулярна незмінному вектору кінетичного моменту  $K$  і відстоїть від центра еліпсоїда на постійній відстані  $d = \sqrt{2T}/K$ .

Нерухома площина Пуансо, на якій зображується герполоїда у просторі системи координат  $Oxyz$ , описується рівнянням

$$z = K \frac{(d - x(w_{10}I_1)/K - yx(w_{20}I_2)/K)}{(w_{30}I_3)}. \quad (3)$$

Тут через  $w_{10}$ ,  $w_{20}$ , і  $w_{30}$  позначено початкові значення кутових швидкостей обертання еліпсоїда навколо відповідних осей координат.

Далі наведемо [1, 2] систему шести диференціальних рівнянь, які пов'язують проекції вектора  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  і  $w_3(t)$  миттєвої кутової швидкості тіла на осі  $x$ ,  $y$  і  $z$ , а також кути Ейлера  $u(t)$ ,  $v(t)$  і  $w(t)$ , які миттєва вісь обертання утворює з цими осями координат.

$$\begin{aligned} I_1 \frac{dw_1}{dt} &= (I_2 - I_3)w_2w_3; \\ I_2 \frac{dw_2}{dt} &= (I_3 - I_1)w_1w_3; \\ I_3 \frac{dw_3}{dt} &= (I_1 - I_2)w_1w_2; \\ \frac{du}{dt} \sin w \sin v + \frac{dw}{dt} \cos v &= w_1; \\ \frac{du}{dt} \sin w \cos v - \frac{dw}{dt} \sin v &= w_2; \\ \frac{du}{dt} \cos w + \frac{dv}{dt} &= w_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язання системи рівнянь виконаємо наближено методом Рунге-Кутти з початковими умовами  $w_1(0) = w_{10}$ ,  $w_2(0) = w_{20}$ ,  $w_3(0) = w_{30}$ ,  $u(0) = u_0$ ,  $v(0) = v_0$  і  $w(0) = w_0$ .

Позначимо одержаний наближений розв'язок для функцій  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  і  $w_3(t)$  як  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$ , і  $W_3(t)$ , а для функцій  $u(t)$ ,  $v(t)$  і  $w(t)$  – як  $U(t)$ ,  $V(t)$ , і  $W(t)$ .

Спочатку обчислимо просторові координати  $(Gx, Gy, Gz)$  герполоїди, які одер-

жуються у результаті обертання навколо осі з направляючими кутами  $U(t)$ ,  $V(t)$ , і  $W(t)$  і миттєвої кутової швидкості вектора з координатами  $e = \{W_1, W_2, W_3\}$ . Для цього позначимо

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} \cos V & \sin V & 0 \\ -\sin V & \cos V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos W & \sin W \\ 0 & -\sin W & \cos W \end{pmatrix}; \\ C_1 &= \begin{pmatrix} \cos U & \sin U & 0 \\ -\sin U & \cos U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

і розглянемо матрицю

$$E = ((A_1 B_1 C_1) / \sqrt{2T})^T. \quad (6)$$

Тоді координати  $(Gx, Gy, Gz)$  герполоїди відповідатимуть координатам вектора, одержаного в результаті векторного добутку  $E \times e$ . Наближене зображення герполоїди на площині Пуансо одержуємо в результаті послідовного сполучення точок з масиву координат  $(Gx, Gy, Gz)$  залежно від параметра  $t$ .

Для побудови пологої необхідно використати співвідношення  $e/\sqrt{2T}$  і послідовно сполучити точки з одержаного масиву координат  $(W_1/\sqrt{2T}, W_2/\sqrt{2T}, W_3/\sqrt{2T})$  залежно від параметра  $t$ .

Опис та побудова процесу кочення еліпса інерції виконується у декілька етапів. Спочатку підготовлюється інформація для зображення еліпсоїда інерції, заданого у параметричному вигляді

$$\begin{aligned} x &= \cos a \cos b / \sqrt{I_1}; \\ y &= \cos a \sin b / \sqrt{I_2}; \quad z = \sin a / \sqrt{I_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут довжини півосей еліпсоїда інерції через моменти інерції визначаються, відповідно, так:  $1/\sqrt{I_3}$ ,  $1/\sqrt{I_2}$  і  $1/\sqrt{I_1}$ .

Наведемо приклад *maple*-програми зображення еліпсоїда за допомогою чотирикутників на його поверхні:

```

elpsN := 25: elpsM := 10:
for j from 0 to elpsN do
uu := evalf(-Pi + j*2*Pi/elpsN):
for i from 0 to elpsM do
vv := evalf(-Pi/2 + i*Pi/elpsM):
xe[i,j] := cos(uu)*cos(vv)/sqrt(I1):
ye[i,j] := cos(uu)*sin(vv)/sqrt(I2):
ze[i,j] := sin(uu)/sqrt(I3):
Gre[i,j] := display(polygon([
[xe[i,j],ye[i,j],ze[i,j]],
[xe[i+1,j], ye[i+1,j], ze[i+1,j]],
[xe[i+1,j+1], ye[i+1,j+1], ze[i+1,j+1]],
[xe[i,j+1], ye[i,j+1], ze[i,j+1]]])):
end do: end do:
    
```

В наведеному фрагменті програми параметри  $elpsN$  і  $elpsM$  визначають кількість розбиття поверхні еліпсоїда вздовж координатних ліній. Зображення еліпсоїда будуватиметься шляхом сполучення відповідних вузлів чотирикутників.

Далі будуюмо проміжні положення полоїди під час кочення еліпсоїда по площині Пуансо. Якщо задана точка  $e' = (Xp, Yp, Zp)$ , належна початковому положенню полоїди, то для обчислення координат вузлових точок на множині «повернутих» полоїдів необхідно використати матрицю, аналогічну матриці (6):

$$E' = (A_1 B_1 C_1)^T. \quad (8)$$

Тоді координати  $(Xp, Yp, Zp)$  полоїди відповідатимуть координатам вектора, одержаного у результаті векторного добутку  $E' \times e'$ . Наближене зображення послідовності полоїд на поверхні еліпсоїда одержуємо у результаті послідовного сполучення вузлових точок з відповідного масиву координат  $(Xp, Yp, Zp)$  залежно від параметра  $t$ . Аналогічно можна побудувати множину проміжних положень еліпсоїда під час його кочення по площині Пуансо, розглядаючи поверхню еліпсоїда як набір вузлових точок. Після виконання програми одержимо сумісне зображення визначених графічних об'єктів у вигляді анімації процесу кочення еліпсоїда інерції по нерухомій площині за умови розміщення на еліпсоїді та площині спряжених кривих – полоїди і герполоїди.

Наведемо приклади виконання складеної програми. При цьому будуть враховані значення моментів інерції тіла  $I_1$ ,  $I_2$  і  $I_3$

відносно нерухомих осей системи координат  $x$ ,  $y$  і  $z$ , для сталих початкових умов швидкостей обертання навколо відповідних осей еліпсоїда інерції  $w_{10} = 1$ ;  $w_{20} = 2$ ;  $w_{30} = 1$ , а також сталих початкових значень кутів обертання  $u(0) = 0,01$ ;  $v(0) = 0,01$ ;  $w(0) = 0,01$ .

*Приклад 1.*  $I_1 = 2$ ;  $I_2 = 12$ ;  $I_3 = 15$ . Рівняння дотичної площини

$$z = 0,54 - 0,13x - 1,65y.$$

На рис. 2 наведено одержані зображення полоїди і герполоїди та їх носіїв.

На рис. 3 наведено три фази кочення еліпсоїда по дотичній площині.

*Приклад 2.*  $I_1 = 8,2$ ;  $I_2 = 5$ ;  $I_3 = 13$ . Рівняння дотичної площини

$$z = 0,49 - 0,63x - 0,77y.$$

На рис. 4 наведено одержані зображення полоїди і герполоїди та їх носіїв.

На рис. 5 наведено три фази кочення еліпсоїда по дотичній площині.

*Приклад 3.*  $I_1 = 15$ ;  $I_2 = 11$ ;  $I_3 = 3$ . Рівняння дотичної площини

$$z = 2,62 - 5x - 7,72y.$$

На рис. 6 наведено одержані зображення полоїди і герполоїди та їх носіїв. На рис. 7 наведено три фази кочення еліпсоїда по дотичній площині.

Отже, складена програма перевірена для випадків різних комбінацій значень моментів інерцій. Одержано лінію кочення еліпсоїда, яка утворюється на дотичній площині, (герполоїді), а також її відповідної лінії на поверхні еліпсоїда (полоїді).

Для роботи з програмою необхідно задати: проміжок часу інтегрування системи диференціальних рівнянь *Time* (не плутати з часом виконання програми), кількість проміжних положень процесу кочення (кадрів анімації)  $N$ , початкові значення проєкцій вектора  $w_1(0)$ ,  $w_2(0)$  і  $w_3(0)$  миттєвої кутової швидкості тіла на осі  $x$ ,  $y$  і  $z$ , початкові значення кутів Ейлера  $u(0)$ ,  $v(0)$  і  $w(0)$ , які миттєва вісь обертання утворює з цими осями координат. При необхідності можна побудувати у часі всі графіки зазначених функцій, а також графіки зміни їх похідних.

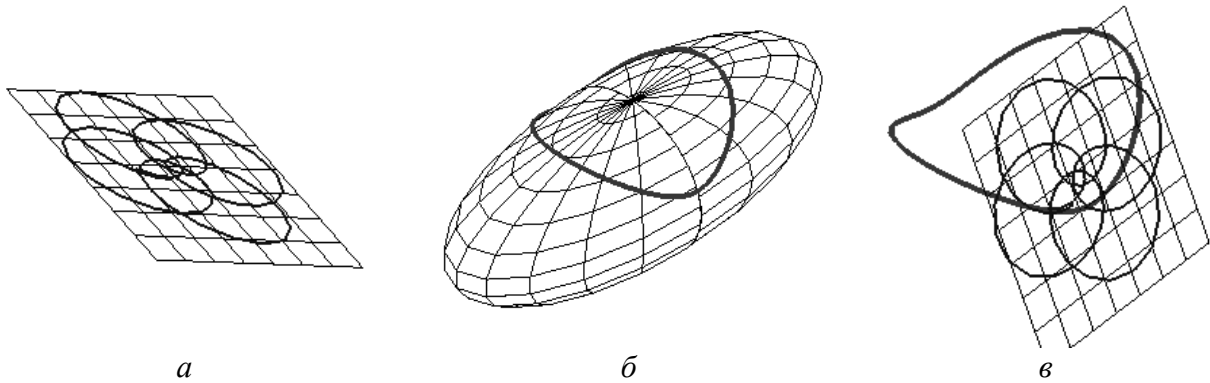


Рис. 2. Зображення полоїди і герполоїди для прикладу 1:  
*a* – герполоїда на дотичній площині;  
*б* – полоїда на поверхні еліпсоїда;  
*в* – спряження полоїди і герполоїди

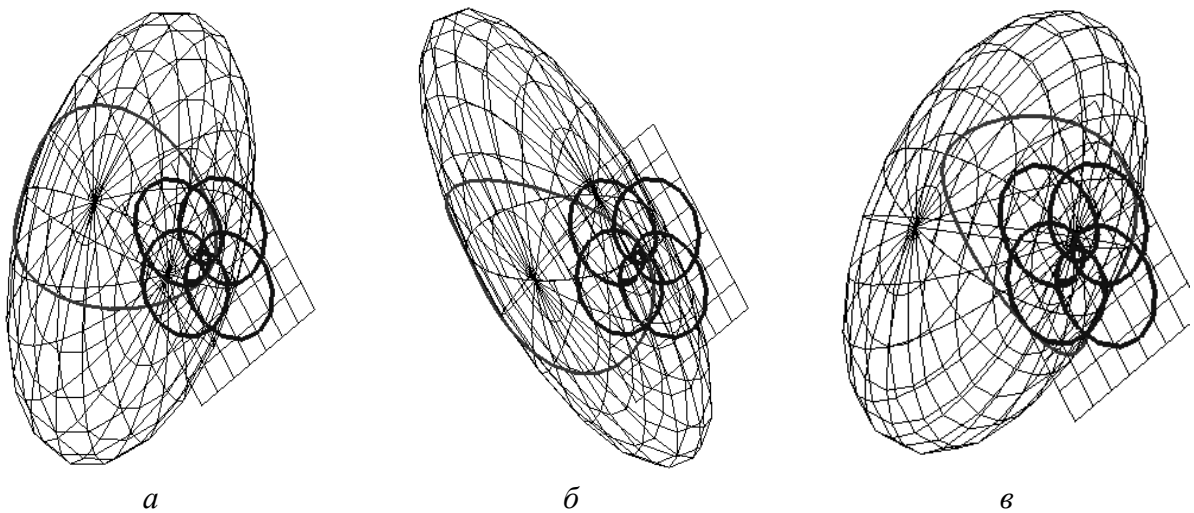


Рис. 3. Фази кочення еліпсоїда по площині  $\pi$  залежно від часу  $t$  для прикладу 1:  
*a* – при  $t = 2$ ; *б* – при  $t = 4$ ; *в* – при  $t = 6$

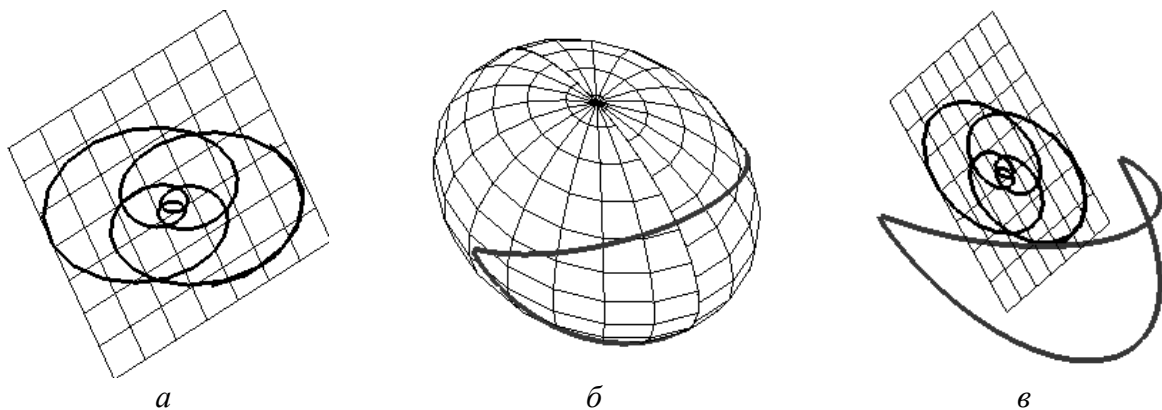


Рис. 4. Зображення полоїди і герполоїди для прикладу 2:  
*a* – герполоїда на дотичній площині;  
*б* – полоїда на поверхні еліпсоїда;  
*в* – спряження полоїди і герполоїди

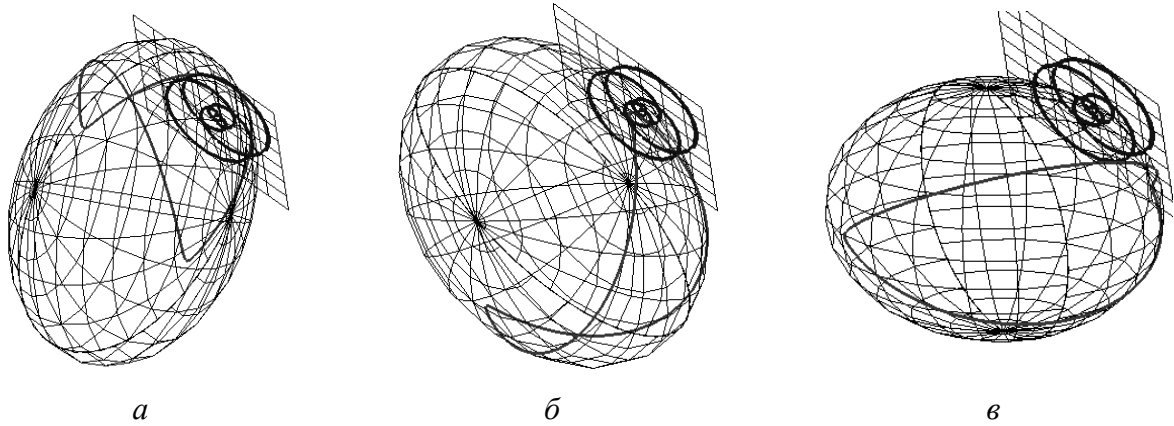


Рис. 5. Фази кочення еліпсоїда по площині  $\pi$  залежно від часу  $t$  для прикладу 2:  
 $a$  – при  $t = 5$ ;  $b$  – при  $t = 9$ ;  $v$  – при  $t = 12$

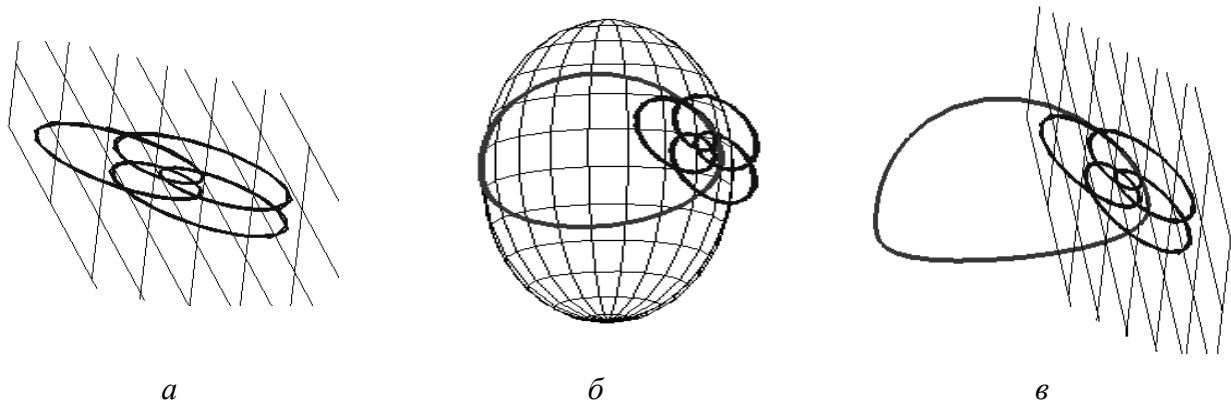


Рис. 6. Зображення полоїди і герполоїди для прикладу 3:  
 $a$  – герполоїда на дотичній площині;  
 $b$  – полоїда на поверхні еліпсоїда і герполоїда;  
 $v$  – спряження полоїди і герполоїди

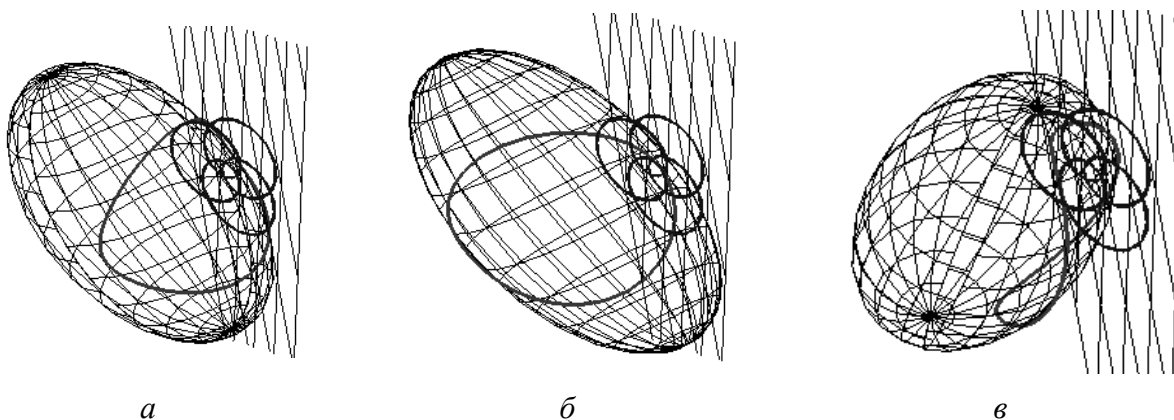


Рис. 7. Фази кочення еліпсоїда по площині  $\pi$  залежно від часу  $t$  для прикладу 3:  
 $a$  – при  $t = 3$ ;  $b$  – при  $t = 7$ ;  $v$  – при  $t = 10$

На основі розробленої програми можна проілюструвати динамічний прояв обертання твердого тіла, виявлений в умовах невагомості космонавтом Джанібековим. Ефект Джанібекова полягає [9, 10] у незвичному поведженні обертового тіла, яке переміщується у невагомості. Космонавт помітив, що при відкручуванні гайки з «вушками» у разі її зіскоку з різьбового гвинта, вона продовжує летіти за інерцією у невагомості, обертаючись як пропелер. Але дивним було те, що пролетівши у невагомості приблизно 40 сантиметрів «вушками» вперед, гайка робила раптовий переворот на 180 градусів і продовжувала летіти у тому ж напрямку, але вже «вушками» назад і обертаючись в іншу сторону. В Інтернеті можна знайти [10] відеофайли поведження «гайки Джанібекова» й аналогічних експериментів в умовах земного тяжіння (наприклад, з тенісною ракеткою [11]).

Для прикладу об'єкта обертання оберемо паралелепіпед одиничної маси, спрямувавши його сторони вздовж осей декартової системи координат: довшу – вздовж осі  $Ox$ , а коротшу – вздовж осі  $Oy$ . В цьому випадку середній за значенням момент інерції буде у випадку обертання паралелепіпеда навколо осі  $Oz$ . Адже наближено моменти інерції тіла вздовж відповідних осей можна оцінити величиною площі, яку займає відповідна проекція.

**Приклад 4.** Нехай розміри паралелепіпеда 20, 10 і 15 вздовж осей  $x$ ,  $y$  і  $z$  відповідно. Тоді моменти інерції мають значення  $I_x = 15625$ ,  $I_y = 4062,5$  і  $I_z = 8333,3$ . Оберемо початкові значення швидкостей обертання:  $u_0 = 0,000005$ ,  $v_0 = 0,000005$ ,  $w_0 = 1$ . Всі параметри в умовних величинах.

На рис. 8 зображено аксонометрії певних фаз обертання паралелепіпеда та траєкторію переміщення сигнальної точки з початковими координатами  $(0, 0, 20)$ .

Приклад 4 ілюструє прояв ефекту Джанібекова, який виникає тоді, коли обертання відбувається навколо осі із середнім значенням моменту інерції. При цьому

тіло повинне мати крім основного обертання, ще й невеликі обертання навколо двох інших осей, швидкості яких мають бути на порядки меншими. У результаті такої «суперпозиції» обертань виходить складний рух тіла, який у певний момент часу перескакує з одного нестійкого положення в інше [12-14].

На завершення проілюструємо ефект Джанібекова з використанням еліпсоїда інерції ілюстрації Пуансо.

**Приклад 5.**  $I_1 = 15$ ;  $I_2 = 7$ ;  $I_3 = 3$ . Початкові значення кутів та швидкостей обертання  $u(0) = 0,01$ ;  $v(0) = 0,01$ ;  $w(0) = 0,01$ ;  $w_1(0) = 0,001$ ;  $w_2(0) = 5$ ;  $w_3(0) = 0,001$ . Рівняння дотичної площини

$$z = 4409 - 5x - 11666y.$$

На рис. 9 наведено фази кочення еліпсоїда, що відповідають прояву ефекту Джанібекова.

На рис. 9 можна спостерігати за тим, як полюдія на поверхні еліпсоїда перекочується по герполодії. Перевороти еліпсоїда відбуваються завдяки тому, що полюдія є близькою за розташуванням до сепаратриси (порівняйте з рис. 1).

На базі складеної програми створено анімаційний фільм для демонстрації нестійкості процесу обертання навколо осі із середнім значенням моменту інерції паралелепіпеда. При цьому можна спостерігати і аналізувати переміщення сигнальної точки з одного крайнього нестійкого положення до іншого завдяки обертальним рухам навколо осі  $Oz$  з врахуванням ефекту Джанібекова.

### Висновки і перспективи досліджень

В роботі упорядковано і реалізовано програмне наповнення комп'ютерного моделювання обертання твердого тіла, яке базується на геометричній інтерпретації Пуансо. Конкретно побудовано: нерухому дотичну площину Пуансо; герполоїду на площині Пуансо; полюїду на поверхні еліпсоїда інерції; процес кочення еліпсоїда

інерції по площині Пуансо; тестові приклади обертання твердого тіла.

У подальших дослідженнях планується використовувати кватерніони при складанні диференціальних рівнянь опису обе-

ртання твердого тіла [15, 16]. При цьому не виникатиме потреба використання тригонометричних функцій, що дозволить скоротити час обчислень і унаочнення графічних результатів обчислень.

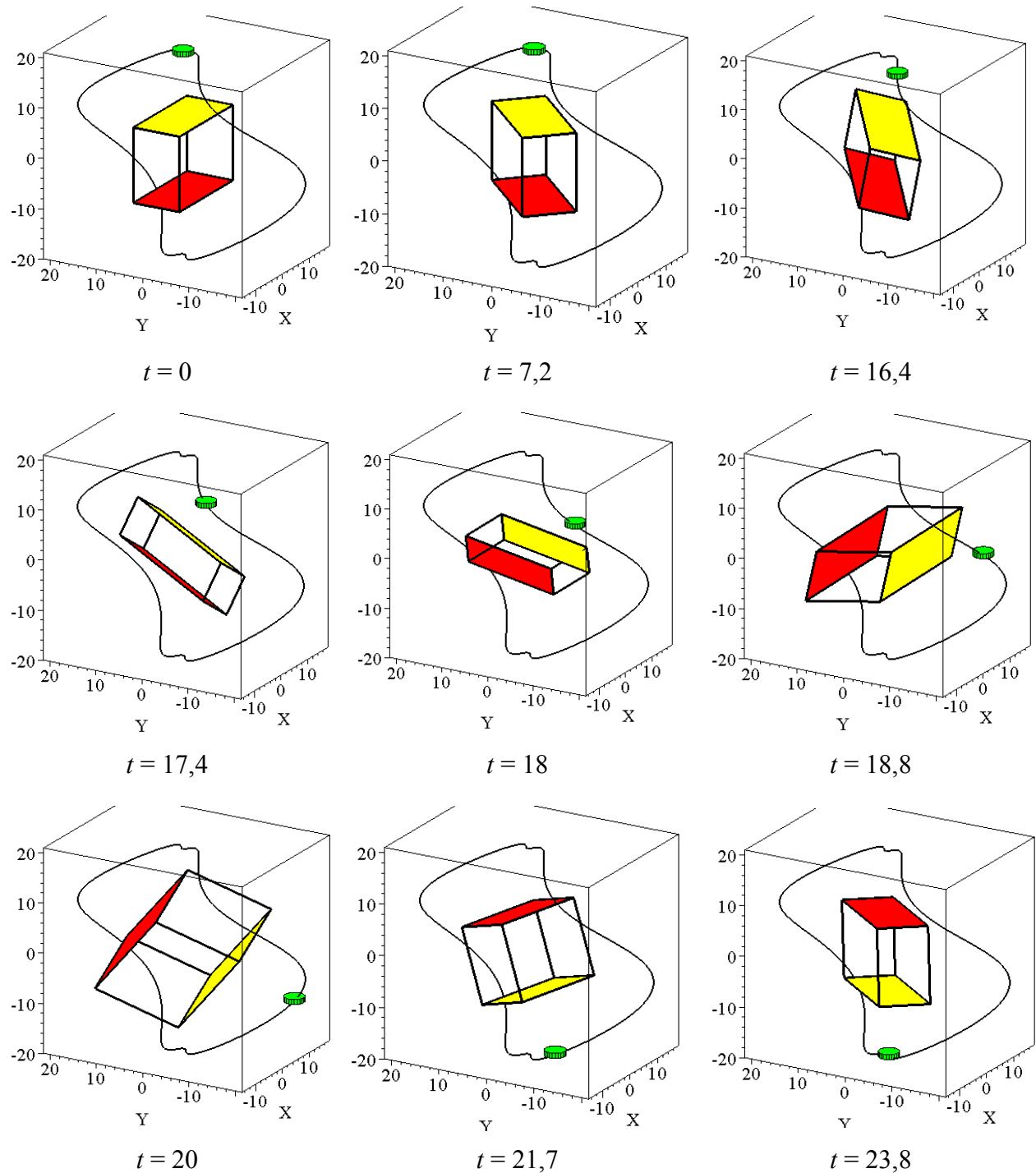


Рис. 8. Фази обертання паралелепіпеда залежно від часу



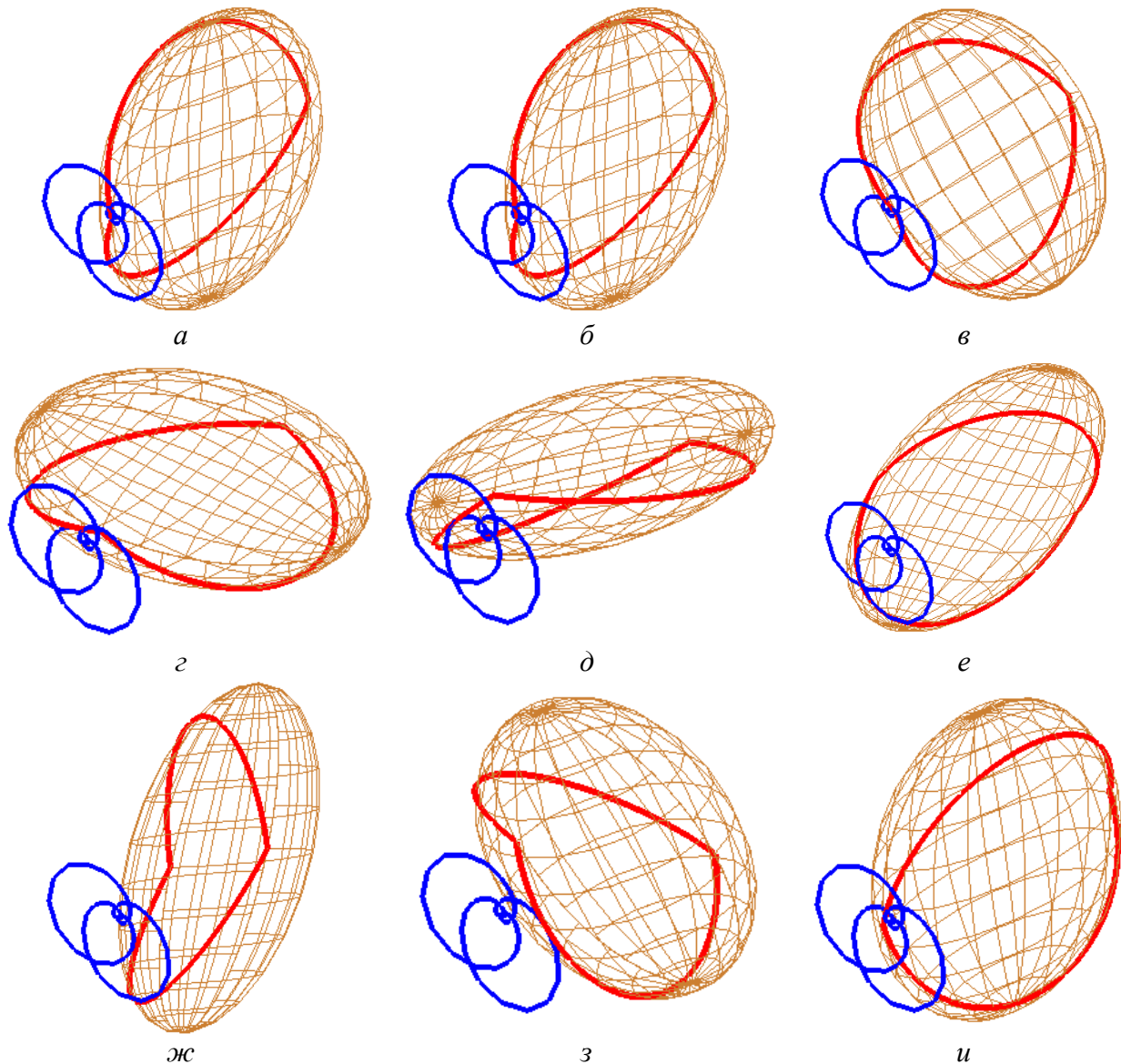


Рис. 9. Фази кочення еліпсоїда по площині  $\pi$  залежно від часу  $t$  для прикладу 5:  
 $a$  – при  $t = 0$ ;  $б$  – при  $t = 0,6$ ;  $в$  – при  $t = 1,37$ ;  $г$  – при  $t = 1,54$ ;  $д$  – при  $t = 1,67$ ;  
 $е$  – при  $t = 1,85$ ;  $ж$  – при  $t = 2,1$ ;  $з$  – при  $t = 2,4$ ;  $и$  – при  $t = 2,7$

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики: часть 2 [Текст] / Н. Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1972. – 332 с.
2. Маркеев, А. П. Теоретическая механика [Текст] / А. П. Маркеев. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
3. Раус, Э. Дж. Динамика систем твердых тел. Т. 2 [Текст] / Э. Дж. Раус. – М.: Наука, 1983. – 544 с.
4. Програма кочення еліпсоїда мовою пакету МАТНЕМАТІСА [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/23297/how-can-i-simulate-a-pot-lid-rotating-around-an-axis-that-is-quickly-rotating>
5. Savransky, D. Poinsot Construction [Electronic resource] / D. Savransky. – Available at: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61433-poinsot-construction?focused=7212431&tab=function>
6. Free Rotation of a Rigid Body: Poinsot Constructions [Electronic resource]. – Available at: <http://demonstrations.wolfram.com/FreeRotationOfARigidBodyPoinsotConstructions/>

7. 3D Rigid Body Simulation Instructions [Electronic resource]. – Available at: <http://ialms.net/sim/3d-rigid-body-simulation/>
8. Poinsot's construction. Polhode [Electronic resource]. – Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=BwYFT3T5ulw>
9. Андреев, Ю.М. Моделирование руху вільного твердого тіла в невагомості [Текст] / Ю.М.Андреев, Т.А.Андреева, В.І. Василюк // Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. Вип. 137/2013. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, 2013. – С. 3-8.
10. Видео «Эффект Джанибекова». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://www.youtube.com/watch?v=L2o9eBl\\_Gzw](https://www.youtube.com/watch?v=L2o9eBl_Gzw)
11. Dzhanibekov Effect or tennis racket theorem. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://community.wolfram.com/groups/-/m/t/498246>
12. Эффект Джанибекова. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.orator.ru/int\\_19.html](http://www.orator.ru/int_19.html)
13. Программа, демонстрирующая эффект Джанибекова. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://oko-planet.su/science/sciencehypothesis/15090-yeffekt-dzhanibekova-gajka-dzhanibekova.html>
14. Эффект Джанибекова – компьютерное моделирование. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://1tvprograma.ru/prosmotr/N1FIQ1F4R2ozOFE/>
15. Притыкин, В. Магия тензорной алгебры: Часть 18 – Математическое моделирование эффекта Джанибекова. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habrahabr.ru/post/264381/>
16. Норель, М. П. Вращение и кватернионы. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gamedev.ru/articles/?id=30129&page=4>

**Leonid KUTSENKO, Oleg SEMKIV, Leonid ZAPOLSKY**  
Kharkiv

#### GEOMETRICAL MODELING OF ROTATION SOLID STATE IN THE MODEL OF POINSOT AND EXPLANATION OF THE JANIBEKOV EFFECT

*The mathematical content of the computer program for the interpretation of Poinsot's rotation of a rigid body with a fixed point is given and an explanation on the basis of this dynamic manifestation of the effect of Dzhanibekov is given. A graphical model of rolling without sliding an ellipsoid of inertia of a body along one of its tangent planes is obtained. As a result, an image of the herpolhode is constructed on the tangent plane, and on the surface of the ellipsoid – to it of the corresponding polhode, by means of which it is possible to analyze the stability of rotation (or couplings) of a rigid body with a fixed point.*

**Keywords:** Poinsot's interpretation, moments of inertia of the body, ellipsoid of inertia, rolling of an ellipsoid, polhode, herpolhode, Dzhanibekov effect.

**Леонід КУЦЕНКО, Олег СЕМКІВ, Леонід ЗАПОЛЬСКИЙ**  
Харьков

#### ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МОДЕЛИ ПУАНСО И ОБЪЯСНЕНИЕ ЭФФЕКТА ДЖАНИБЕКОВА

*Приведено математическое наполнения программы интерпретации Пуансо вращения твердого тела с неподвижной точкой и объяснение на базе этого динамического проявления эффекта Джанибекова. Получена графическая модель качения без скольжения эллипсоида инерции тела по одной из своих касательных плоскостей. В результате, на касательной плоскости строится изображение герполодии, а на поверхности эллипсоида - ей соответствующей поллодии, при помощи которых можно анализировать устойчивость вращения (или перевороты) твердого тела с неподвижной точкой.*

**Ключевые слова:** интерпретация Пуансо, моменты инерции тела, эллипсоид инерции, качение эллипсоида, поллодия, герполодия, эффект Джанибекова.

Стаття надійшла до редколегії 28.09.2017