



Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Черкаський інститут пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля НУЦЗ України
Кафедра будівельних конструкцій

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Посібник до виконання
розрахунково-графічних робіт
з розділу «Опір матеріалів»

Черкаси, 2015

ББК 34.42 я73
УДК 42
С-88

*Рекомендовано до друку
на засіданні методичної ради
Черкаського інституту пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля НУЦЗ
України
протокол № 5 від 6 жовтня 2015 року*

Рецензент: **Осипенко В.І.** -- д.т.н., професор

Ступак Д.О., Отрош Ю.А., Поздєєв С.В.

С-88 Прикладна механіка: Посібник до виконання розрахунково-графічних робіт з розділу «Опір матеріалів». Для студентів і курсантів вищих навч. закл., які навч. за напрямом підготовки 6.170203 «Пожежна безпека» та 6.170201 «Цивільний захист». / Упор. Ступак Д.О., Отрош Ю.А., Поздєєв С.В. – Черкаси: ЧПБ, - 2015. – 54 с.

ББК 34.42 я73
УДК 42
С-88

© Ступак Д.О., Отрош Ю.А., Поздєєв С.В.

© ЧПБ імені Героїв Чорнобиля
НУЦЗ України, 2015

Зміст

Розрахунково-графічна робота №1. Визначення геометричних характеристик плоского поперечного перерізу	4
Розрахунково-графічна робота №2. Аналіз задачі розтягу-стискання прямолінійного стержня	8
Розрахунково-графічна робота №3. Аналіз напруженого плоского стану	14
Розрахунково-графічна робота №4. Аналіз задачі кручення прямолінійного стержня круглого поперечного перерізу	27
Розрахунково-графічна робота №5. Аналіз задачі згину консольної балки ...	34
Розрахунково-графічна робота №6. Аналіз задачі згину двохопорної балки.	38

Розрахунково-графічна робота №1. Визначення геометричних характеристик плоского поперечного перерізу

Завдання

Для заданого поперечного перерізу, що складається з швеллера, рівнобічного кутника, двотавра необхідно:

1. Визначити положення центру тяжіння.
2. Знайти осеві та відцентровий моменти інерції відносно довільних вісей, що проходять через центр тяжіння.
3. Визначити напрям головних центральних вісей.
4. Знайти моменти інерції відносно головних центральних вісей.
5. Накреслити переріз в масштабі 1:2 та вказати на ньому всі розміри в числах та всі вісі.

Передостання цифра посвідчення – схема, остання – розміри.

№ з/п	Схема	№ з/п	Схема	№ з/п	Схема
1		2		3	
4		5		6	
7		8		9	
		0			

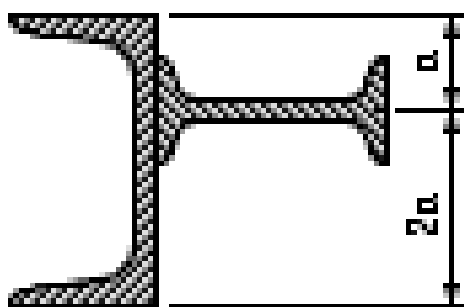
N стр	Швеллер	Рівнобокий кутник	Двотавр
1	14	80 x 80 x 8	12
2	16	80 x 80 x 6	14
3	18	90 x 90 x 8	16
4	20	90 x 90 x 7	18
5	22	90 x 90 x 6	20a
6	24	100 x 100 x 8	20
7	27	100 x 100 x 10	22a
8	30	100 x 100 x 12	22
9	33	125 x 125 x 10	24a
0	36	125 x 125 x 12	24

Послідовність виконання

1. За табличними даними визначаємо геометричні характеристики прокату.
2. Креслимо схему перерізу в масштабі.
3. Визначаємо координати центру ваги перерізу.
4. Переносимо систему координат в центр ваги перерізу і розраховуємо сумарні осьові та відцентровий моменти інерції.
5. Визначаємо напрям головних осей перерізу і будуємо головні осі на схемі

Приклад виконання

Визначити напрям головних вісей та величини головних осьових моментів інерції для складного плоского поперчного перерізу.



Дано:

Швелер – 36;

Двотавр – 24а

Розв'язок:

1. За табличними даними визначаємо характеристики прокату:

Швелер

№ профіля	Висота, h, мм	Ширина, b, мм	Площа перерізу, A, см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	z_0 , см
36	360	110	53.4	108200	513	2.68

Двотавр

№ профіля	Висота, h, мм	Ширина, b, мм	Площа перерізу, A, см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴
24а	240	125	37.5	38000	260

2. Креслимо схему перерізу в масштабі, приймаємо систему координат.

3. Визначаємо координати центрів ваги кожного профіля. Прийmemo для характеристик швелера індекс 1, для характеристик двотавра – 2.

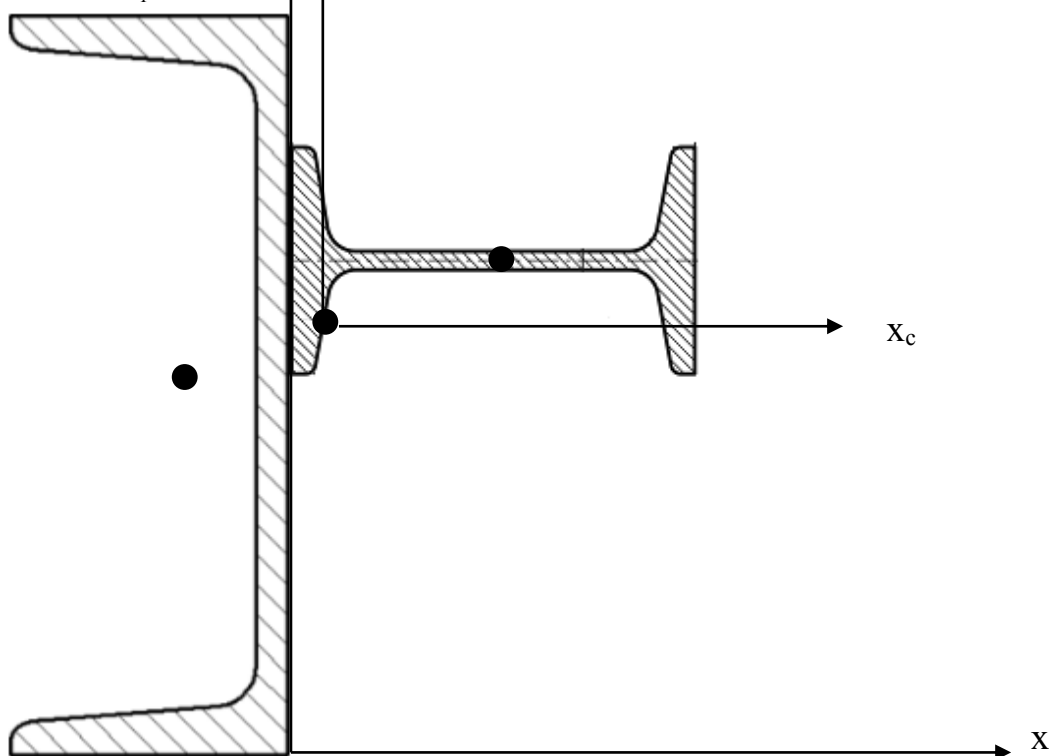
$$x_1 = -2,68 \text{ см}; y_1 = 18 \text{ см};$$

$$x_2 = 12 \text{ см}; y_2 = 24 \text{ см};$$

4. Визначаємо координати центру ваги всього перерізу:

$$x_c = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{-2.68 \cdot 53.4 + 12 \cdot 37.5}{53.4 + 37.5} = 3.37 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{18 \cdot 53.4 + 24 \cdot 37.5}{53.4 + 37.5} = 20.47 \text{ см}.$$



5. Переносимо систему координат в центр ваги перерізу і визначаємо координати центрів ваги швелера і двотавра в новій системі координат $x_c y_c$.

$$x'_1 = x_1 - x_c = -2.68 - 3.37 = 6.05 \text{ см};$$

$$y'_1 = y_1 - y_c = 18 - 20.47 = -2.47 \text{ см};$$

$$x'_2 = x_2 - x_c = 12 - 3.37 = 8.63 \text{ см};$$

$$y'_2 = y_2 - y_c = 24 - 20.47 = 3.53 \text{ см}.$$

6. Застосовуючи теорему про паралельний перенос вісей, визначаємо значення значення осевих та відцентрових моментів інерції відносно центру ваги всього перерізу та визначаємо сумарні осові та відцентровий моменти інерції відносно вісей x_c та y_c .

$$I'_{x1} = I_{x1} + (y'_1)^2 \cdot A_1 = 10820 + (-2.47)^2 \cdot 53.4 = 11145 \text{ см}^4;$$

$$I'_{y1} = I_{y1} + (x'_1)^2 \cdot A_1 = 513 + (6.05)^2 \cdot 53.4 = 2467 \text{ см}^4;$$

$$I'_{xy1} = I_{xy1} + (x'_1 \cdot y'_1) \cdot A_1 = 0 + (-2.47) \cdot 6.05 \cdot 53.4 = -798 \text{ см}^4;$$

$$I'_{x2} = I_{x2} + (y'_2)^2 \cdot A_2 = 260 + (3.53)^2 \cdot 37.5 = 727 \text{ см}^4;$$

$$I'_{y2} = I_{y2} + (x'_2)^2 \cdot A_2 = 3800 + (8.63)^2 \cdot 37.5 = 6593 \text{ см}^4;$$

$$I'_{xy2} = I_{xy2} + (x'_2 \cdot y'_2) \cdot A_2 = 0 + 3.53 \cdot 8.63 \cdot 37.5 = 1142 \text{ см}^4;$$

$$I_x = I'_{x1} + I'_{x2} = 11145 + 727 = 11872 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I'_{y1} + I'_{y2} = 2467 + 6593 = 9060 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy} = I'_{xy1} + I'_{xy2} = -798 + 1142 = 344 \text{ см}^4.$$

7. Напряг головних осей перерізу та їх величини визначається за формулами:

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\text{гол}} = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 344}{9060 - 11872} = -0.2446;$$

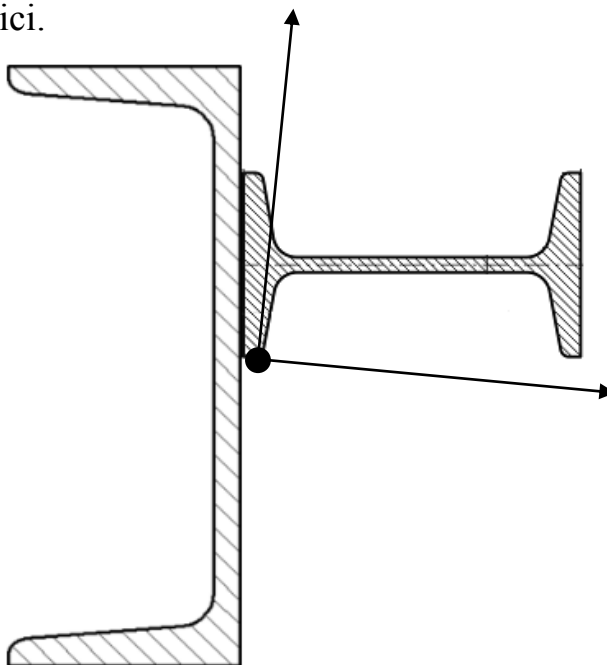
$$2\theta_{\text{гол}} = -13.75; \theta_{\text{гол}} = -6.87^\circ$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{9060 + 11872}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9060 - 11872}{2}\right)^2 + 344^2} = 10466 \pm 1447$$

$$I_1 = 10466 + 1447 = 11913 \text{ см}^4;$$

$$I_2 = 10466 - 1447 = 9019 \text{ см}^4.$$

8. Будуємо головні вісі.



Розрахунково-графічна робота №2. Аналіз задачі розтягу-стискання прямолінійного стержня

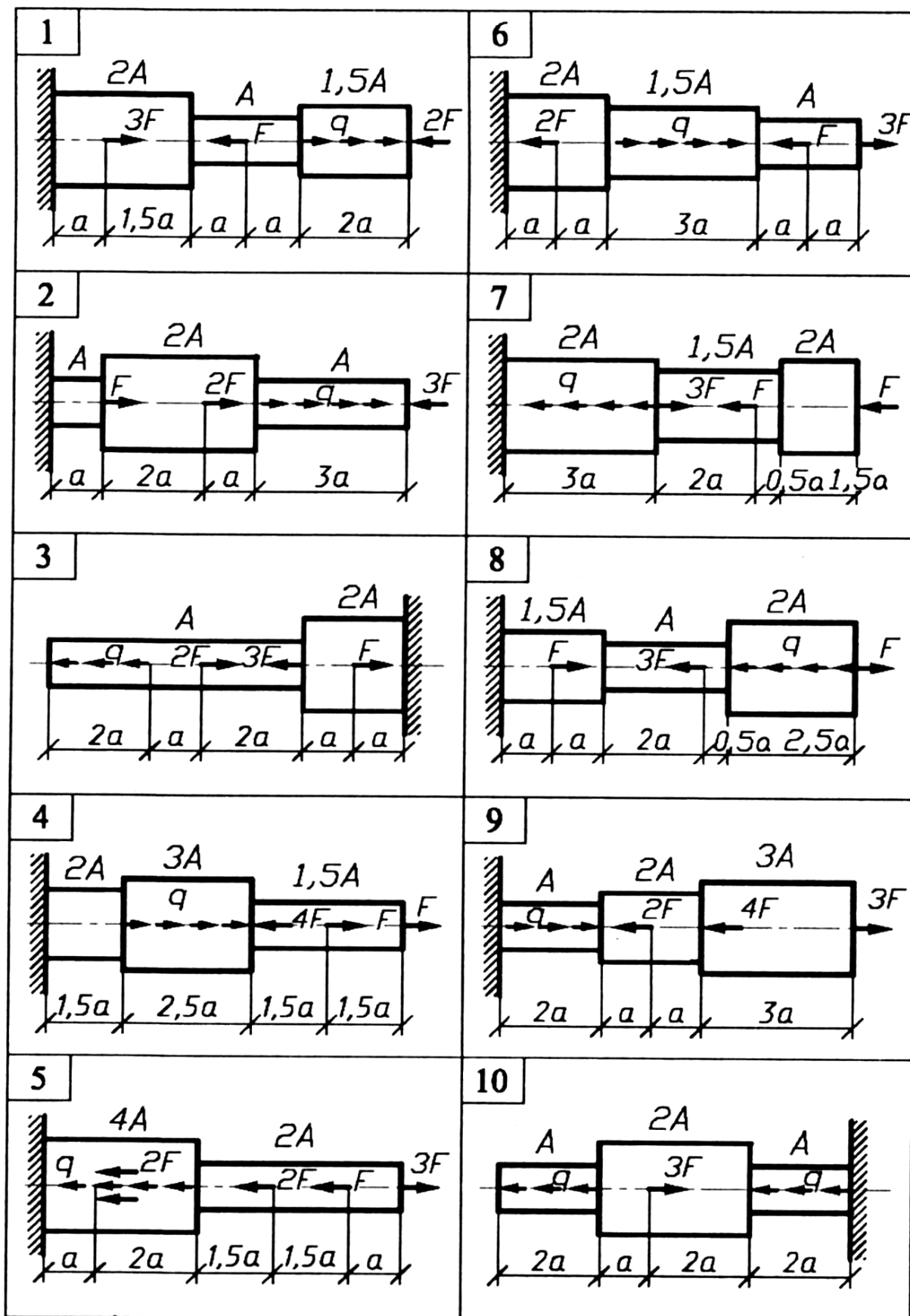
Завдання

Ступінчастий сталевий стержень перебуває під дією сили F і розподіленого навантаження q . Матеріал стержня — низьковуглецева сталь. Модуль пружності сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Побудувати:

- 1) епюру поздовжніх сил N по довжині стержня;
- 2) епюру нормальних напружень по довжині стержня;
- 3) епюру деформацій від зовнішніх сил по довжині стержня.

Таблиця 1 – Початкові дані

Варіант	Навантаження		Довжина	Площа
	F , кН	q , кН/м	a , см	A , см ²
1	30	15	20	3,5
2	25	10	32	3,5
3	20	12	24	3,2
4	15	14	26	3,0
5	17	16	28	2,8
6	23	11	30	3,3
7	27	13	18	3,6
8	32	9,0	16	3,8
9	36	7,0	17	4,0
0	40	8,0	20	4,5



Послідовність виконання

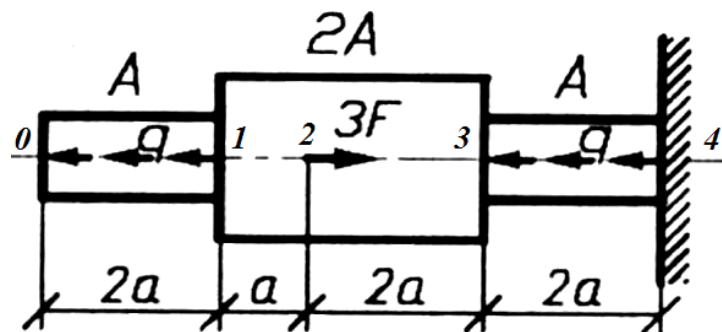
1. Креслиться розрахункова схема, на якій вказуються напрямлення зовнішніх сил та геометричні розміри стержня.
2. Визначаємо межі ділянок. Для кожної ділянки складаємо рівняння для визначення поздовжньої сили N .
3. Будується епюра поздовжніх сил від дії зовнішніх сил F та розподіленого навантаження q , за допомогою методу перерізів.
4. Будується епюра нормальних напружень.
5. Будується епюра абсолютних переміщень.

Приклад виконання

Завдання:

Ступінчастий сталевий стержень перебуває під дією сили F і розподіленого навантаження q . Матеріал стержня — низьковуглецева сталь. Модуль пружності сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Побудувати:

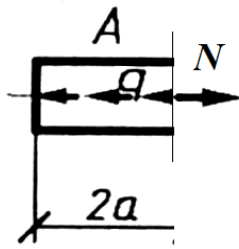
- 1) епюру поздовжніх сил N по довжині стержня;
- 2) епюру нормальних напружень по довжині стержня;
- 3) епюру деформацій від зовнішніх сил по довжині стержня.



Варіант	Навантаження		Довжина	Площа
	F , кН	q , кН/м	a , см	A , см ²
11	10	5	20	4

Розв'язок

1. Будуємо розрахункову схему стержня, на якій позначаємо напрям, чисельне значення зовнішньої сили та геометричні розміри стержня.
2. Розділяємо стержень на ділянки характерними перерізами в місцях прикладання сил та в місцях зміни геометрії поперечного перерізу. Утворилося чотири ділянки – 0-1, 1-2, 2-3 і 3-4. Для кожної ділянки записуємо рівняння для визначення поздовжньої сили.



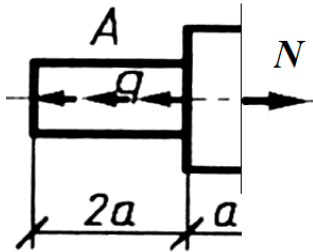
$$N=qz$$

$$m.0: z=0$$

$$N_0=0 \text{ кН}$$

$$m.1: z=0,4 \text{ м}$$

$$N_1=5 \cdot 0,4 = 2 \text{ кН}$$



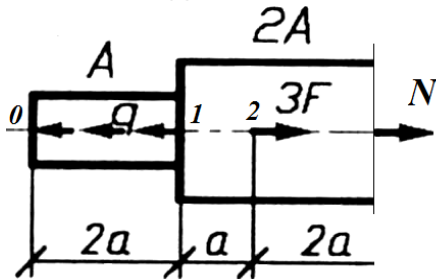
$$N=q \cdot 2 \cdot a$$

$$m.1: z=0,4 \text{ м}$$

$$N_1=5 \cdot 0,4 = 2 \text{ кН}$$

$$m.2: z=0,6 \text{ м}$$

$$N_2=5 \cdot 0,4 = 2 \text{ кН}$$



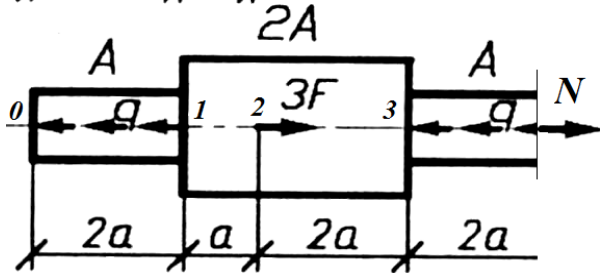
$$N=q \cdot 2 \cdot a - 3 \cdot F$$

$$m.2: z=0,6 \text{ м}$$

$$N_2=5 \cdot 0,4 - 3 \cdot 10 = -28 \text{ кН}$$

$$m.3: z=1,0 \text{ м}$$

$$N_3=5 \cdot 0,4 - 3 \cdot 10 = -28 \text{ кН}$$



$$N=q \cdot 2 \cdot a - 3 \cdot F + q \cdot (z - 5a)$$

$$m.3: z=1,0 \text{ м}$$

$$N_3=5 \cdot 0,4 - 3 \cdot 10 + 5 \cdot (5 \cdot 0,2 - 5 \cdot 0,2) = -28 \text{ кН}$$

$$m.4: z=1,4 \text{ м}$$

$$N_4=5 \cdot 0,4 - 3 \cdot 10 + 5 \cdot (7 \cdot 0,2 - 5 \cdot 0,2) = -26 \text{ кН}$$

3. За отриманими значеннями будуюмо епюру поздовжніх сил.

4. Побудуємо епюру нормальних напружень. Враховуючи лінійний характер епюри поздовжніх сил, епюра нормальних напружень теж буде лінійною. Отже можна визначити значення нормальних напружень для країв ділянок і отримати точки на епюрі, які потім з'єднати прямими лініями. Таким чином, визначаємо значення нормальних напружень країв ділянок:

- ділянка 0-1:

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{A} = \frac{0}{4 \cdot 10^{-4}} = 0;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{2 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \cdot 10^7 = 5 \text{ МПа};$$

- ділянка 1-2:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2 \cdot A} = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^7 = 2,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2 \cdot A} = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^7 = 2,5 \text{ МПа};$$

- ділянка 2-3:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2 \cdot A} = \frac{-28 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -3,5 \cdot 10^7 = -35 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2 \cdot A} = \frac{-28 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -3,5 \cdot 10^7 = -35 \text{ МПа};$$

- ділянка 3-4:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{-28 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = -7 \cdot 10^7 = -70 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A} = \frac{-26 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = -6,5 \cdot 10^7 = -65 \text{ МПа};$$

Відмічаємо отримані точки на епюрі, з'єднуємо їх прямими лініями і таким чином будуємо епюру нормальних напружень. На епюрі видно, що найбільш напруженим є переріз в точці 3 на ділянці 34, такий переріз називається найбільш небезпечним перерізом.

Отже епюра нормальних напружень побудована, тобто друга частина задачі виконана.

6. Побудуємо епюру абсолютних переміщень. На ділянках, де не діє розподілене навантаження, можна скористатися формулою Гука. На інших ділянках – інтегруванням.

$$\Delta l_{01} = \int_0^{0,4} \left(\frac{N_{01}}{E \cdot A} \right) dz = \int_0^{0,4} \left(\frac{q \cdot z}{E \cdot A} \right) dz = \frac{q \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot A} \Big|_0^{0,4} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,4^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_{12} = \frac{N_{12} \cdot l_{12}}{E \cdot 2A} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_{23} = \frac{N_{23} \cdot l_{23}}{E \cdot 2A} = \frac{-28 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -7,0 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_{34} = \int_1^{1,4} \left(\frac{N_{34}}{E \cdot A} \right) dz = \int_1^{1,4} \left(\frac{q \cdot 2 \cdot a - 3 \cdot F + q \cdot (z - 5 \cdot a)}{E \cdot A} \right) dz = \frac{(q \cdot 2 \cdot a - 3 \cdot F - q \cdot 5 \cdot a) \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}}{E \cdot A} \Big|_1^{1,4} =$$

$$\frac{\left(-33 \cdot 10^3 \cdot 1,4 - 5 \cdot 10^3 \cdot \frac{1,4^2}{2} \right) - \left(-33 \cdot 10^3 \cdot 1,0 - 5 \cdot 10^3 \cdot \frac{1,0^2}{2} \right)}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -19,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Побудову епюри переміщень розпочинають з точки закріплення. Оскільки стержень закріплений в точці 4, точка 4 залишиться нерухомою. Точка 3 отримає переміщення Δl_{34} . Кожна наступна ділянка буде зміщуватись з врахуванням деформації попередніх ділянок.

$$\Delta l_3 = \Delta l_{34} = -19,5 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

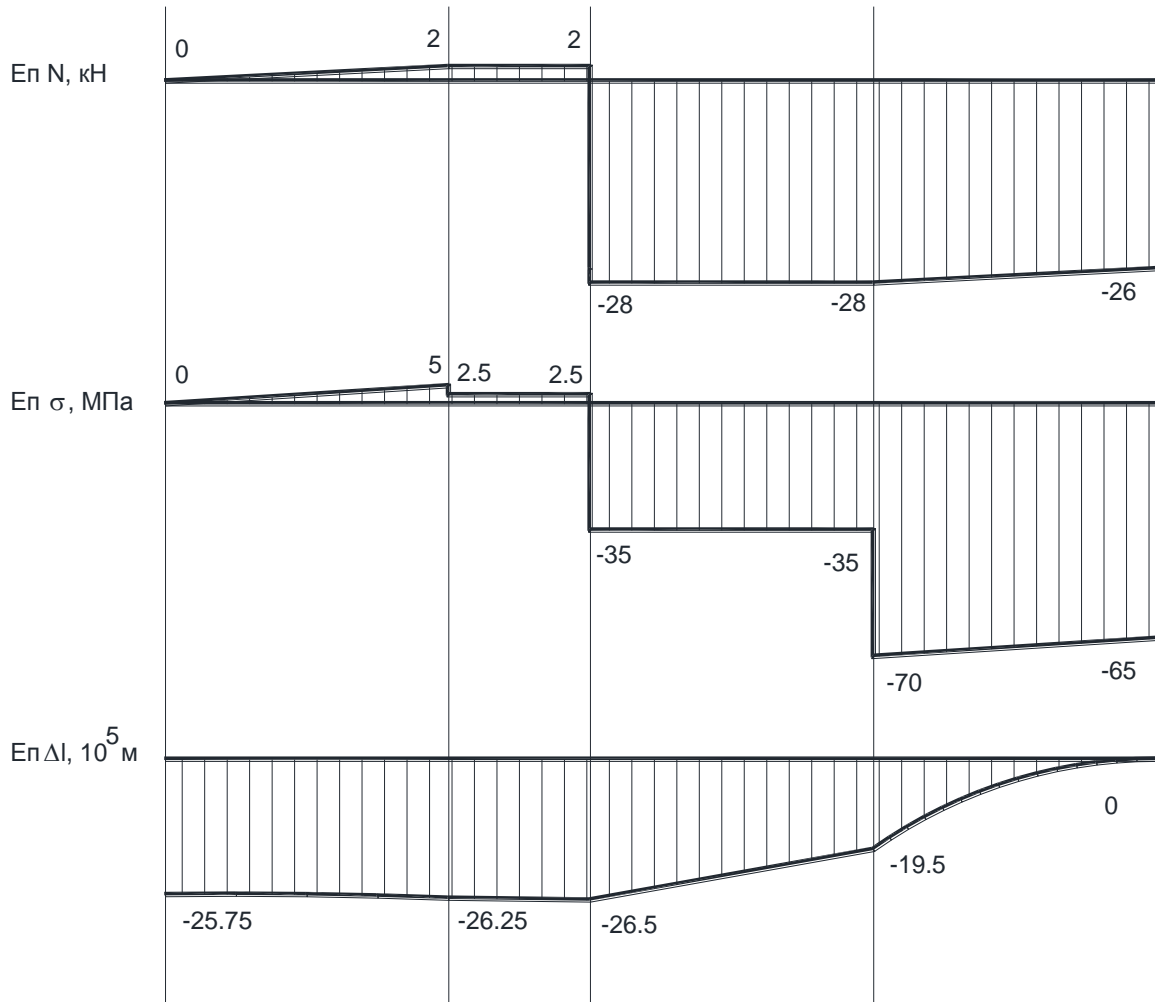
$$\Delta l_2 = \Delta l_{23} + \Delta l_{34} = -7 \cdot 10^{-5} - 19,5 \cdot 10^{-5} = -26,5 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_{12} + \Delta l_{23} + \Delta l_{34} = 0,25 \cdot 10^{-5} - 7 \cdot 10^{-5} - 19,5 \cdot 10^{-5} = -26,25 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_0 = \Delta l_{01} + \Delta l_{12} + \Delta l_{23} + \Delta l_{34} = 0,5 \cdot 10^{-5} + 0,25 \cdot 10^{-5} - 7 \cdot 10^{-5} - 19,5 \cdot 10^{-5} = -25,75 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

При побудові епюри враховуємо характер зміни деформацій на ділянці. Ділянка, що навантажена розполеним навантаженням деформується непропорційно.

Таким чином епюра абсолютних переміщень побудована.



Задача розв'язана.

Розрахунково-графічна робота №3. Аналіз напруженого плоского стану

Завдання

Елемент перебуває під дією зусиль, які створюють напружений стан. Визначити аналітично і графічно:

- 1) головні напруження, а також положення головних площин;
- 2) нормальні та дотичні напруження для заданої площини, що розташована під кутом θ ,
- 3) максимальні дотичні напруження та положення площин, де вони діють.

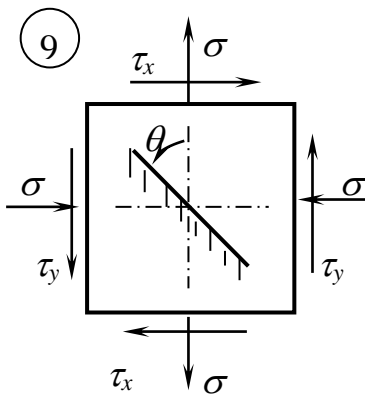
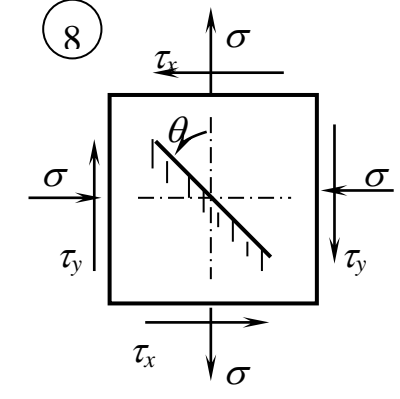
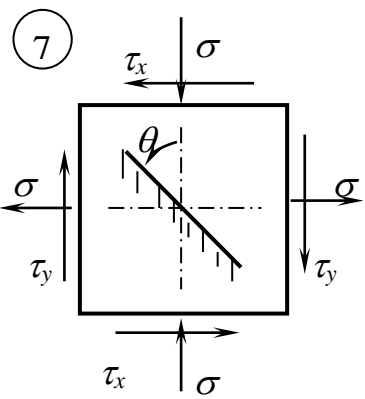
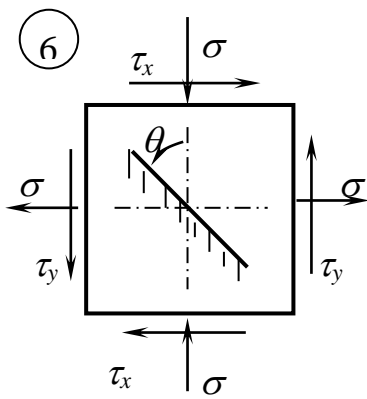
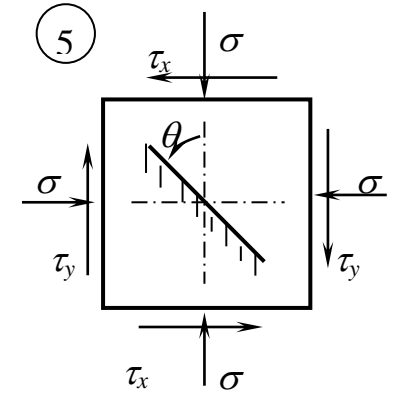
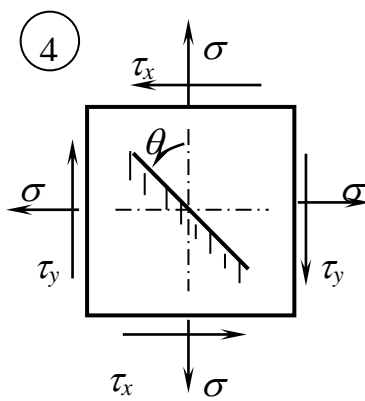
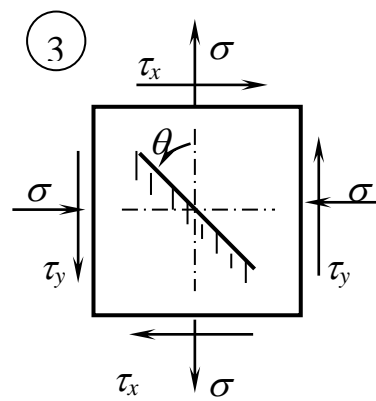
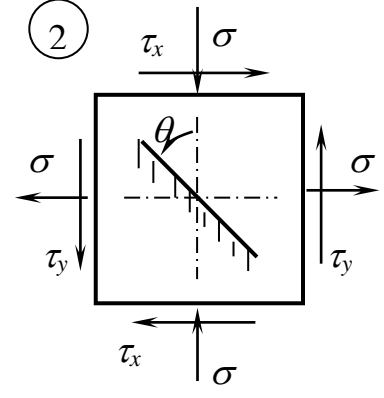
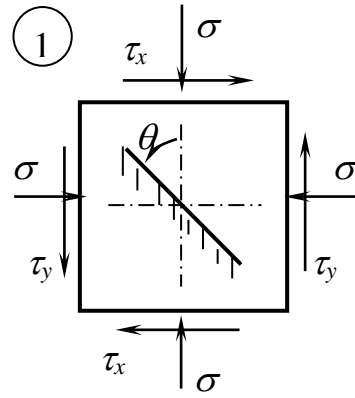
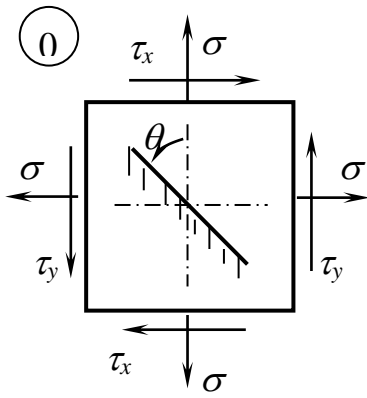
Перевірити міцність матеріалу за теоріями міцності.

Вихідні дані наведені у таблиці 2.

Таблиця 2 – Початкові дані

№ n/n	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ , МПа	θ°	Сталь
0	100	150	100	45	ст. 5
1	80	50	30	75	ст. 3
2	70	60	40	60	ст. 4
3	50	30	30	120	45
4	90	90	80	150	40
5	70	70	70	30	35
6	30	30	30	-30	20
7	60	50	40	-60	45
8	75	40	20	-75	ст. 2
9	30	20	10	-30	40

Розрахункові схеми



Послідовність виконання

1. Креслиться розрахункова схема у вигляді елемента, на гранях якого наносяться задані напруження, а також позначається кут повороту елемента, на гранях якого треба визначити напруження.

2. Проводиться розв'язок оберненої задачі аналізу напруженого стану, тобто знаходяться значення головних напружень та визначаються положення головних площадок аналітичним методом.

3. Визначаються напруження на гранях елемента, повернутого на кут θ .

4. Визначаються найбільші дотичні напруження, кути повороту площадок з найбільшими дотичними напруженнями, а також нормальні напруження, що діють на площадках з максимальними дотичними напруженнями.

5. Будується круг Мора.

6. За побудованим кругом Мора визначається все що необхідно визначити у задачі.

7. Перевіряється міцність матеріалу за гіпотезами міцності.

Приклад розв'язку

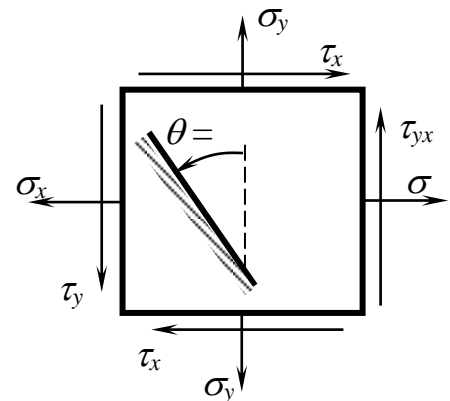
Умови задачі. Елемент перебуває під дією зусиль, які створюють напружений стан. Визначити аналітично і графічно:

- 4) головні напруження, а також положення головних площин;
- 5) нормальні та дотичні напруження для заданої площини, що розташована під кутом θ ;
- 6) максимальні дотичні напруження та положення площин, де вони діють.

Перевірити міцність матеріалу за теоріями міцності.

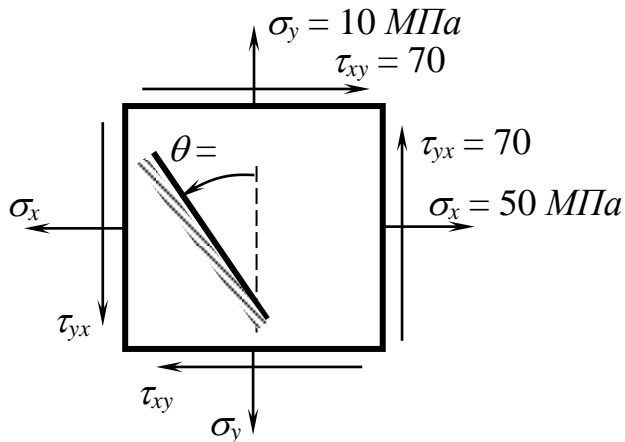
Відомі такі чисельні дані:

$$\sigma_x = 50 \text{ МПа}; \sigma_y = 40 \text{ МПа}; \tau_{yx} = 70 \text{ МПа}; \theta = 30^\circ, \text{ Матеріал} - \text{Сталь 45}$$



Розв'язок

1. Побудуємо розрахункову схему елемента, на гранях якого позначимо величини і реальні напрямки напружень.



Враховуючи знаки напружень запишемо:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 50 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = 40 \text{ МПа}; \\ \tau_{yx} &= 70 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 70 \text{ МПа}; \\ \theta &= 30^\circ. \end{aligned}$$

2. Знайдемо аналітично положення головних площадок, визначивши кут їх повороту за формулою:

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\text{гол}} = \frac{-2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot (-70)}{50 - 10} = 3.5$$

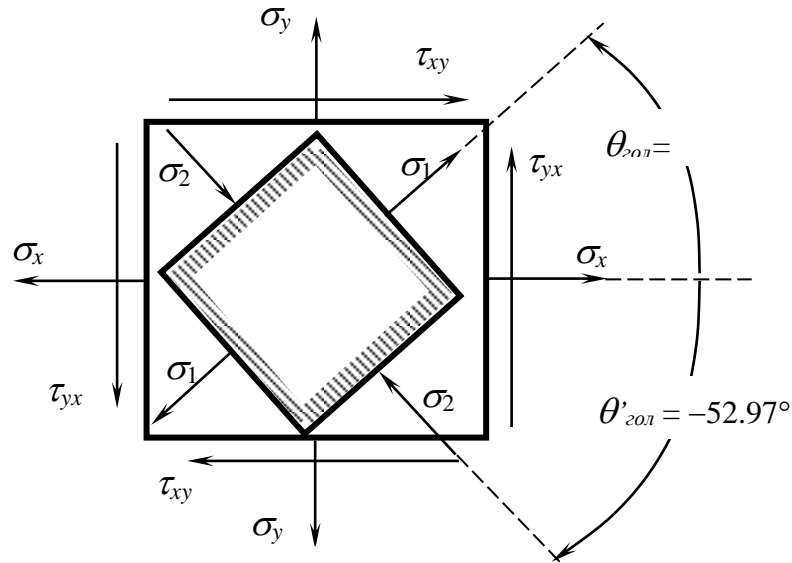
Взявши арктангенс, знайдемо: $2\theta_{\text{гол}} = 74.05^\circ$, тоді $\theta_{\text{гол}} = 37.03^\circ$. В межах кута повороту від 0 до 2π арктангенс дає два значення, що відрізняються між собою на кут π . Таким чином, маємо ще одне значення кута повороту $2\theta'_{\text{гол}} = 74.05^\circ - 180^\circ = -105.95^\circ$ або $\theta'_{\text{гол}} = 37.03^\circ - 90^\circ = -52.97^\circ$.

Головні напруження дорівнюють:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} = \frac{50 + 10}{2} + \sqrt{\left(\frac{50 - 10}{2}\right)^2 + (-70)^2} = 102.8 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} = \frac{50 + 10}{2} - \sqrt{\left(\frac{50 - 10}{2}\right)^2 + (-70)^2} = -42.8 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Для перевірки правильності результатів знайдемо головні напруження за іншою формулою, використовуючи знайдені кути $2\theta_{\text{гол}} = -74.05^\circ$, $2\theta'_{\text{гол}} = 105.95^\circ$.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta_{\text{гол}}}{2} - \tau_{yx} \sin 2\theta_{\text{гол}} = \frac{(50 + 10)}{2} + \frac{(50 - 10) \cos(74.05^\circ)}{2} - (-70) \sin(74.05^\circ) = \\ &= 102.8 \text{ МПа}; \end{aligned}$$



$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta'_{\text{гол}}}{2} - \tau_{yx} \sin 2\theta'_{\text{гол}} = \frac{(50 + 10)}{2} + \frac{(50 - 10) \cos(-105.95^\circ)}{2} - (-70) \sin(-105.95^\circ) \\ = -42.8 \text{ МПа};$$

Значення головних напружень збігаються, отже знайдені правильно і дорівнюють

$$\sigma_1 = 102.8 \text{ МПа}, \sigma_2 = -42.8 \text{ МПа}.$$

Положення головних площадок і напрямки дії головних напружень показуємо на рисунку.

3. Знайдемо напруження на гранях елемента, повернутого на кут $\theta = 30^\circ$. Одна з площадок елемента буде повернута на кут $\theta = 30^\circ$, тоді інша буде повернута на кут $\theta' = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$. Знаючи ці кути, можемо визначити напруження.

$$\sigma_\theta = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta}{2} - \tau_{yx} \sin 2\theta = \frac{(50 + 10)}{2} + \frac{(50 - 10) \cos(2 \cdot 30^\circ)}{2} - (-70) \sin(2 \cdot 30^\circ) = \\ = 100.62 \text{ МПа};$$

$$\tau_\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta}{2} + \tau_{yx} \cos 2\theta = \frac{(50 - 10) \sin(2 \cdot 30^\circ)}{2} + (-70) \cos(2 \cdot 30^\circ) = -17.68 \text{ МПа}$$

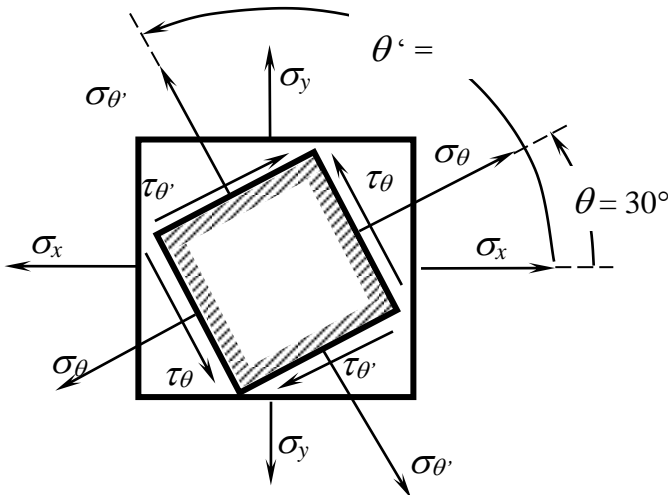
$$\sigma'_\theta = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta'}{2} - \tau_{yx} \sin 2\theta' = \\ = \frac{(50 + 10)}{2} + \frac{(50 - 10) \cos(2 \cdot 120^\circ)}{2} - (-70) \sin(2 \cdot 120^\circ) = -40.62 \text{ МПа};$$

$$\tau'_\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta'}{2} - \tau_{yx} \cos 2\theta' = \frac{(50 - 10) \sin(2 \cdot 120^\circ)}{2} - (-70) \cos(2 \cdot 120^\circ) = \\ = 17.68 \text{ МПа}$$

Перевірку можна здійснити, знаючи те, що сума нормальних напружень на суміжних гранях завжди залишається сталою, тобто

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\theta + \sigma'_\theta, \text{ або } 50 + 10 = 100.62 + (-40.62) = 60 \text{ МПа}$$

Перевірка збігається, оскільки і справа і зліва даної рівності маємо по 60 МПа.



Перевірку дотичних напружень проводимо за законом парності дотичних напружень. Згідно з цим законом дотичні напруження на суміжних гранях мають однакові значення але різні за знаком, тобто $\tau_\theta = -\tau'_\theta$. Якщо порівняти отримані значення дотичних напружень, можна побачити, що закон парності виконується. Отже перевірка показує правильність отриманих результатів. Таким чином одержано:

Таким чином одержано:

$$\sigma_\theta = 100.62 \text{ МПа}; \tau_\theta = -17.68 \text{ МПа}; \sigma'_\theta = -40.62 \text{ МПа}; \tau'_\theta = 17.68 \text{ МПа}.$$

Положення площадок з напруженнями, значення яких були отримані подаємо на схемі.

4. Знайдемо значення найбільших дотичних напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{102.8 - (-42.8)}{2} = 72.8 \text{ МПа}$$

Положення площадок з максимальними дотичними:

$$\operatorname{ctg} 2\theta_k = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(-70)}{50 - 10} = -3.5; \operatorname{tg} 2\theta_k = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{yx}} = -0.286$$

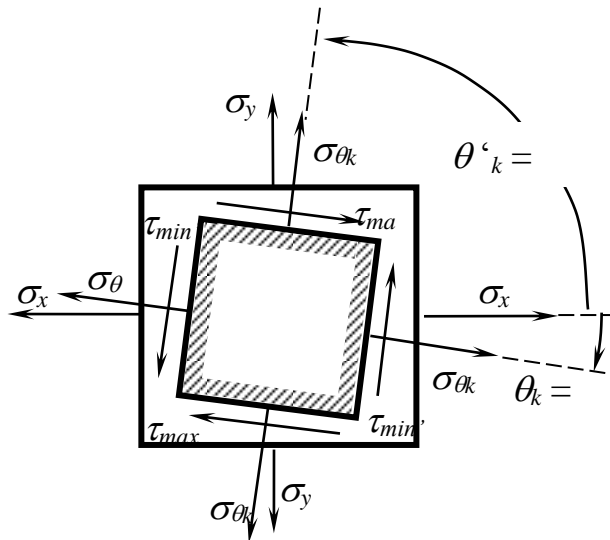
Знаходимо кут повороту площадки з максимальними дотичними напруженнями, взявши арктангенс, $2\theta_k = -15.95^\circ$, тоді $\theta_k = -7.97^\circ$. В межах кута повороту від 0 до 2π арктангенс дає два значення, що відрізняються між собою на кут π . Таким чином, маємо ще одне значення кута повороту $2\theta'_k = -15.95^\circ + 180^\circ = 164.05^\circ$ або $\theta'_k = -7.97^\circ + 90^\circ = 82.03^\circ$.

Нормальні напруження, що діють на площадках з максимальними дотичними напруженнями:

$$\sigma_{\theta_k} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + 10}{2} = 30 \text{ МПа.}$$

Правильність знаходження кутів повороту площадок з максимальними дотичними напруженнями перевіряється через розгляд виконання умови, яка полягає у тім, що різниця між кутами повороту головних площадок і площадок з максимальними дотичними напруженнями повинна складати 45° . Отже

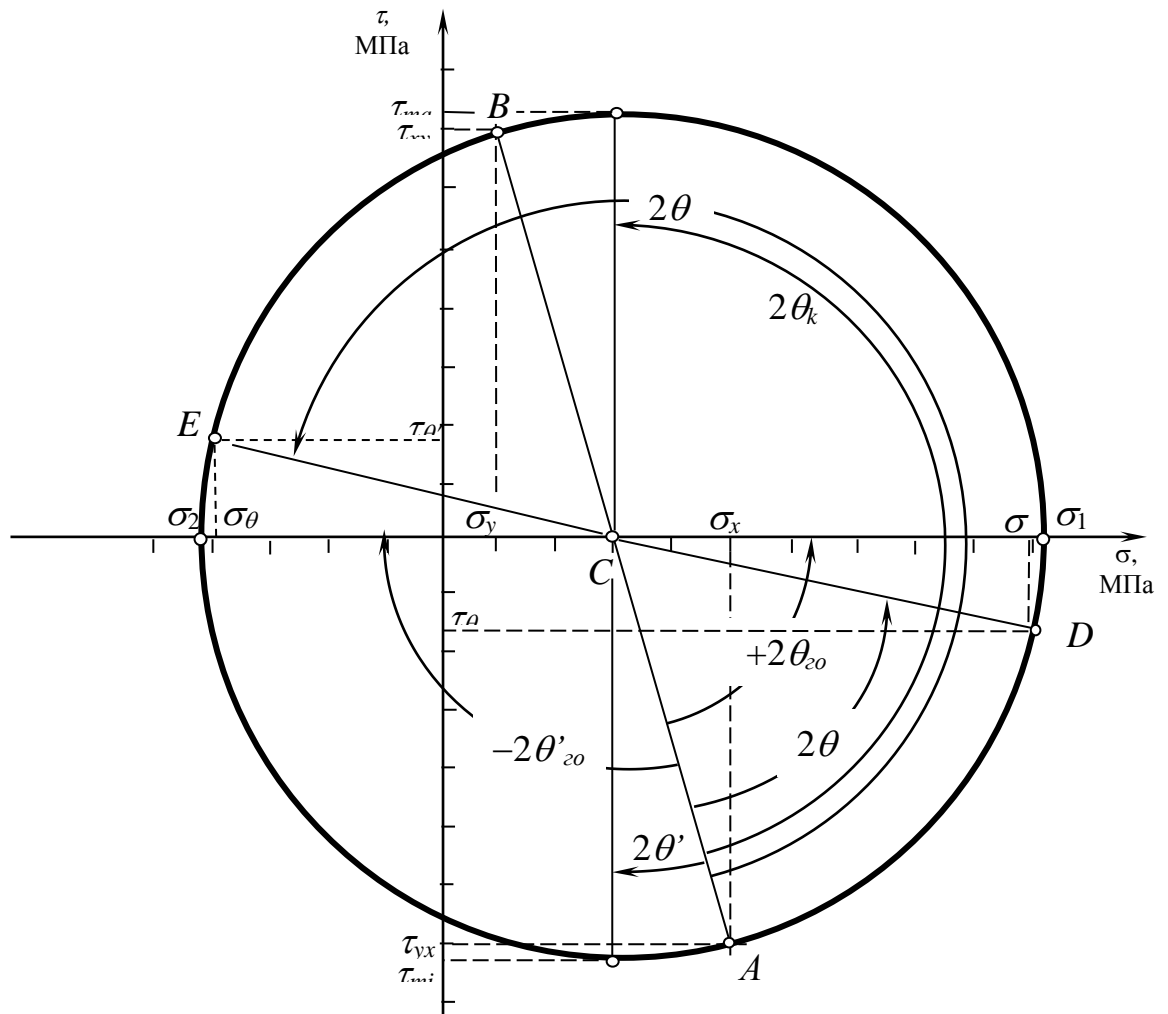
$$\theta_{\text{гол}} - \theta_k = 45^\circ, \quad \text{або} \\ 37.03^\circ - (-7.97^\circ) = 45^\circ. \quad \text{Перевірка збігається.}$$



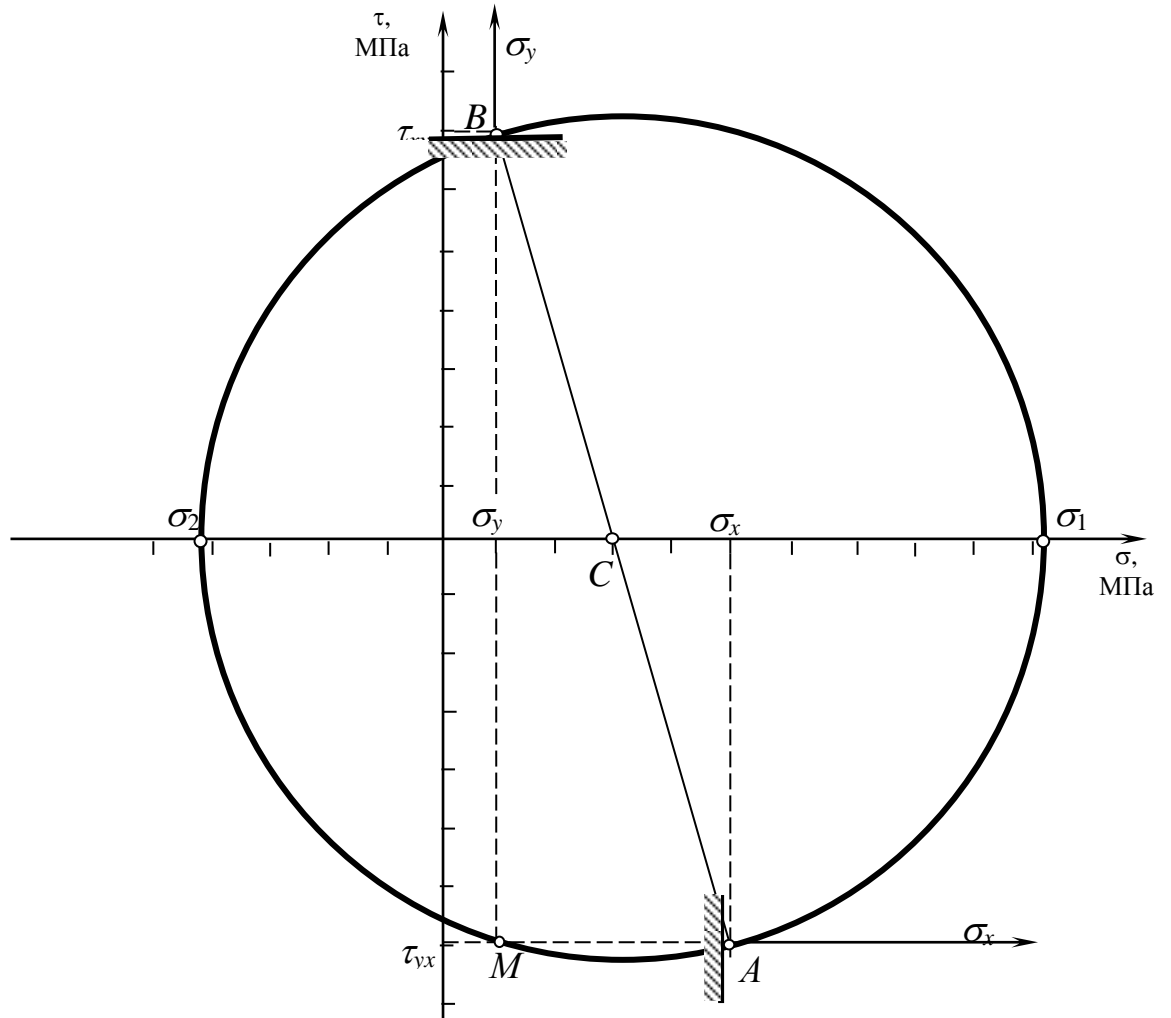
Таким чином, нами були визначені максимальні дотичні напруження, що дорівнюють $\tau_{max} = 72.8 \text{ МПа}$, та нормальні напруження на тих же площадках $\sigma_{\theta_k} = 30 \text{ МПа}$. Положення площадок щз максимальними дотичними напруженнями показані на схемі.

На цьому аналітичний розв'язок даної задачі вважається закінченим.

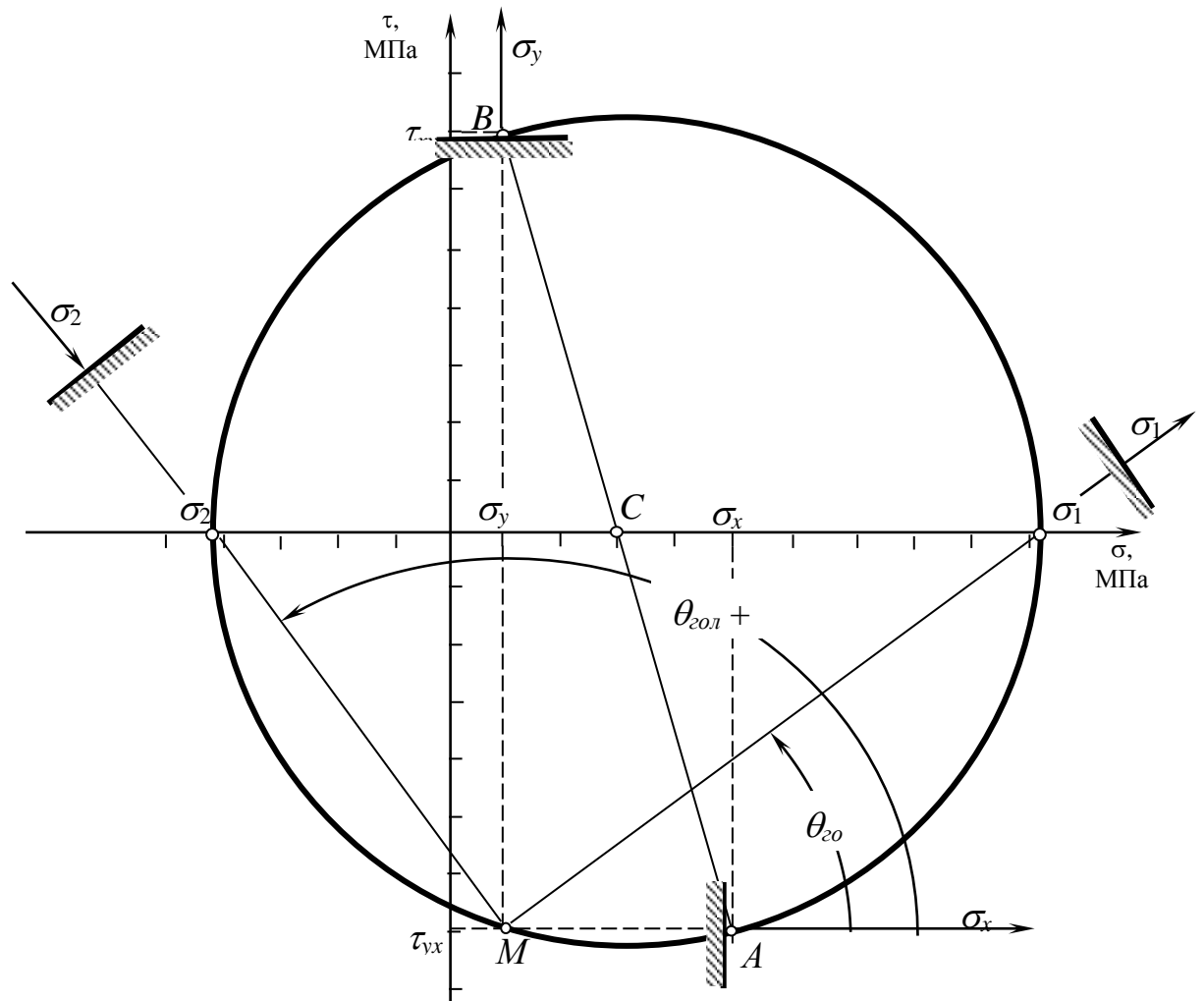
5. Обчислимо всі параметри, що необхідно визначити за умовами задачі, використовуючи коло Мора. Побудуємо коло Мора. Оскільки круг Мора та аналітичні розрахунки повністю незалежні, порівняння отриманих даних є кінцевою перевіркою результатів розв'язку задачі.



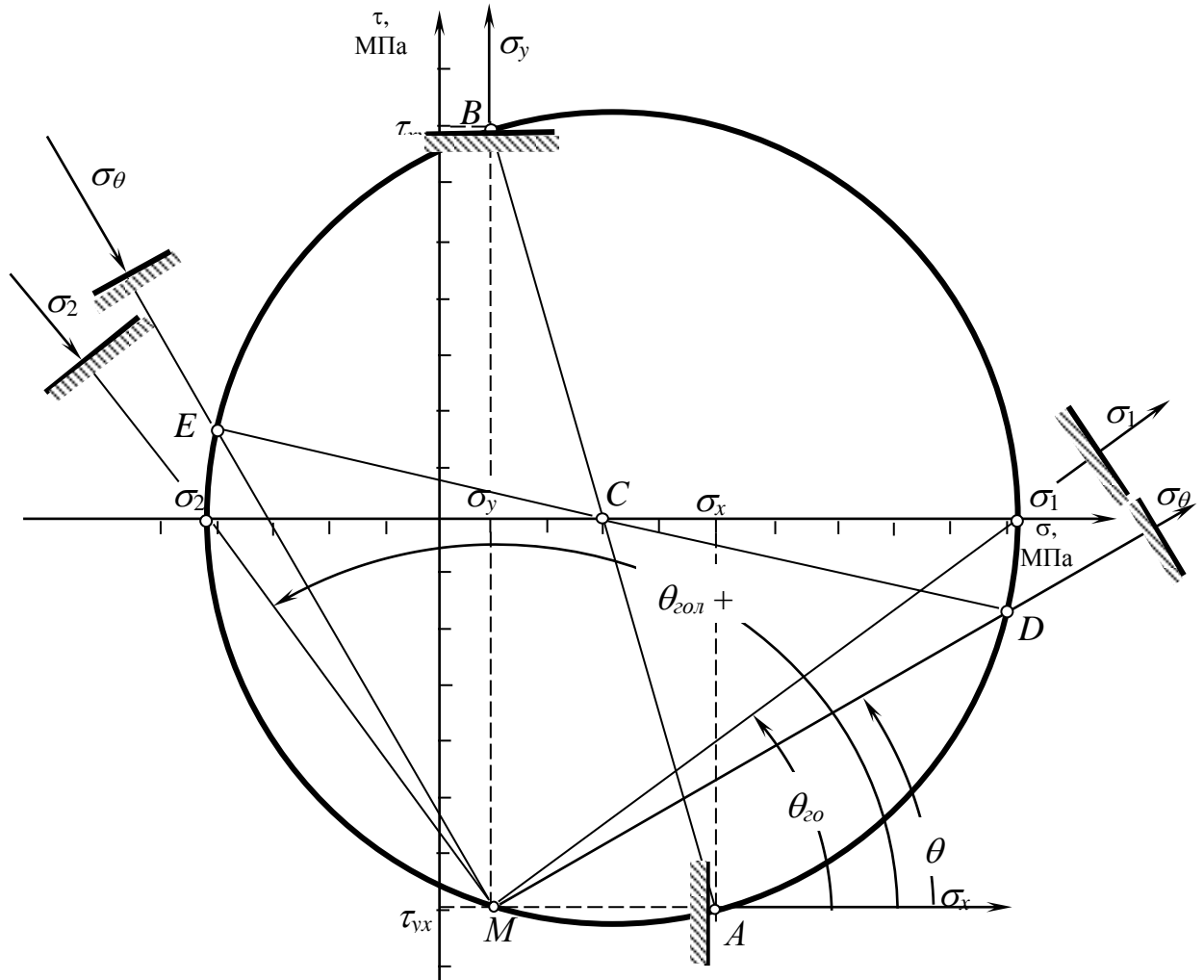
6. Поданий графічний розв'язок задачі за допомогою круга Мора дещо незручний внаслідок того, що приходиться мати справу з подвійними кутами. Становище покращується коли застосовується метод полюса. Знайдемо положення полюса M .



Використовуючи полюс, знайдемо положення головних площадок, з'єднавши полюс і точки перетину кола Мора с віссю абсцис.



Відкладаючи кут θ відносно напрямку σ_x з полюса M , проводимо лінію MD , що на колі Мора визначає положення точки D , координати якої є значеннями напружень на площадці, повернутій відносно вертикальної на кут θ та напруження на площадці, повернутій на кут $\theta + 90^\circ$.



Побудувавши вертикальний діаметр кола Мора, отримаємо положення точок F та G, ординати яких відповідають максимальним дотичним напруженням, а абсциси – нормальним напруженням, що діють на площадках з максимальними дотичними напруженнями. З'єднавши отримані точки з полюсом, отримаємо напрямки дії нормальних напружень на площадках максимальними дотичними напруженнями та положення цих площадок. Кінцевий вигляд кола Мора зі всіма необхідними побудованнями поданий на рисунку.

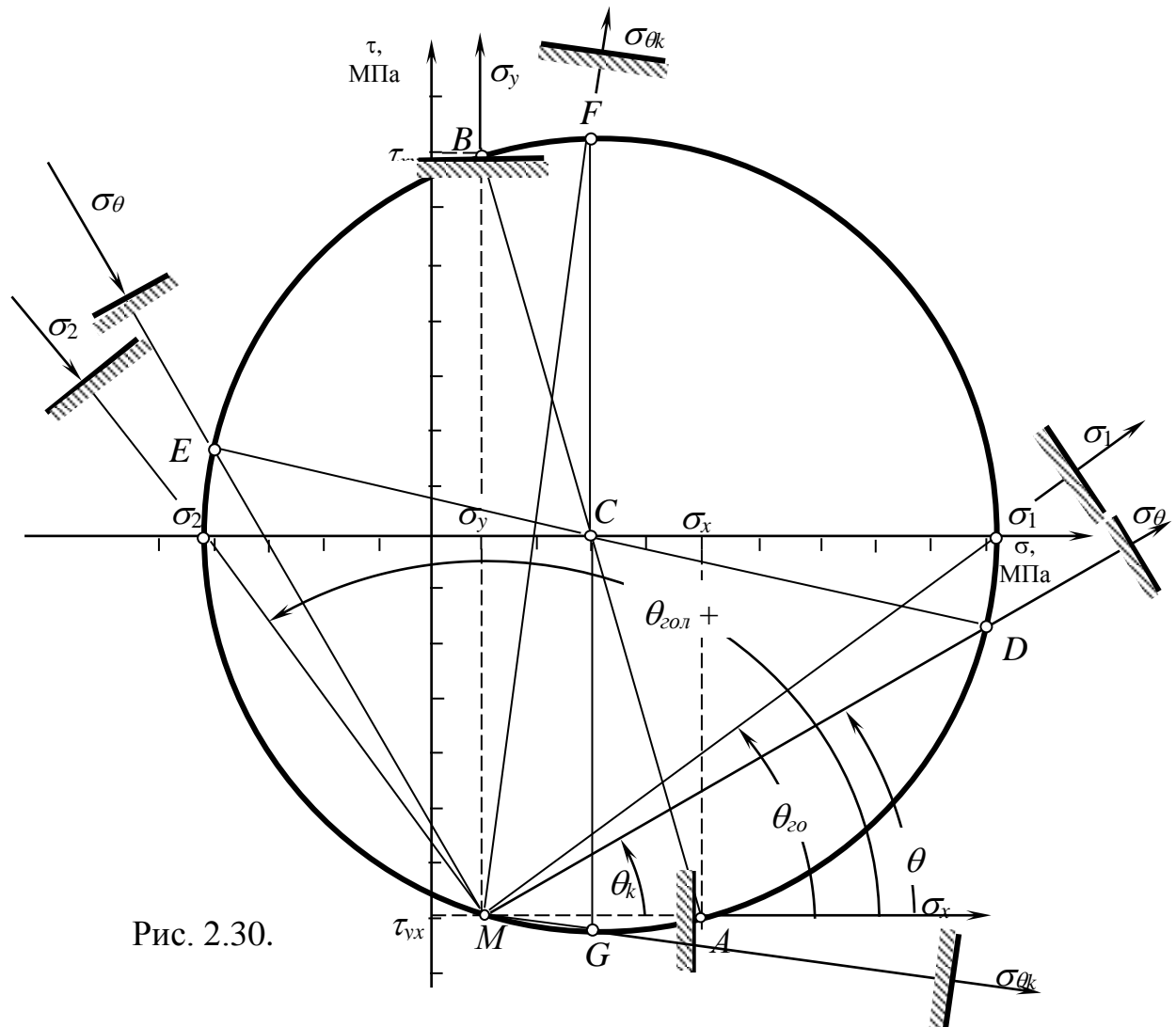


Рис. 2.30.

7. За теоріями міцності перевіримо міцність матеріалу, при цьому визначимо еквівалентні напруження.

За першою теорією міцності

$$\sigma_{\text{еквI}} = \sigma_1 = 102.8 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа.}$$

За першою теорією міцність *забезпечена*.

За другою теорією міцності

$$\sigma_{\text{еквII}} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 = 102.8 - 0.23 \cdot (-42.8) = 112.6 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа.}$$

За другою теорією міцність *забезпечена*.

За третьою теорією міцності

$$\sigma_{\text{еквIII}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 102.8 - (-42.8) = 145.6 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа.}$$

За третьою теорією міцність *забезпечена*.

За четвертою теорією міцності

$$\sigma_{\text{эквVI}} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = 102.8 - 1 \cdot (-42.8) = 145.6 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

За четвертою теорією міцність *забезпечена*.

За п'ятою теорією міцності

$$\sigma_{\text{эквV}} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sqrt{102.8^2 - 102.8 \cdot (-42.8) + (-42.8)^2} = 129.6 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

За п'ятою теорією міцність *забезпечена*.

Таким чином за всіма теоріями міцність *забезпечена*.

Розрахунково-графічна робота №4. Аналіз задачі кручення прямолінійного стержня круглого поперечного перерізу

Завдання

Визначити величину та напрямок крутного моменту M_4 . Побудувати епюру крутних моментів, визначити діаметри окремих ділянок валу за умовами міцності на кручення для суцільного та трубчастого валів. Порівняти ваги цих валів. Коефіцієнт $\alpha = d/D$, де D , d – зовнішній та внутрішній діаметри трубчастого валу.

Визначити кут закручування валу між опорами.

Вихідні дані наведені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1.

№ n/n	M_1 , кНм	M_2 , кНм	M_3 , кНм	$[\tau]$, МПа	a, м	α
0	4	15	5	80	2	0.34
1	6	16	7	80	1.5	0.25
2	8	17	11	100	1.75	0.5
3	10	18	15	100	2.2	0.6
4	12	14	7	80	2.5	0,475
5	9	12	4	80	3	0.4
6	5	11	5	100	1.5	0.75
7	7	10	12	100	1.75	0.8
8	11	15	9	100	2	0.9
9	13	13	8	80	2.3	0.7

Розрахункові схеми до задачі № 3 зображені на рис. 4.1.

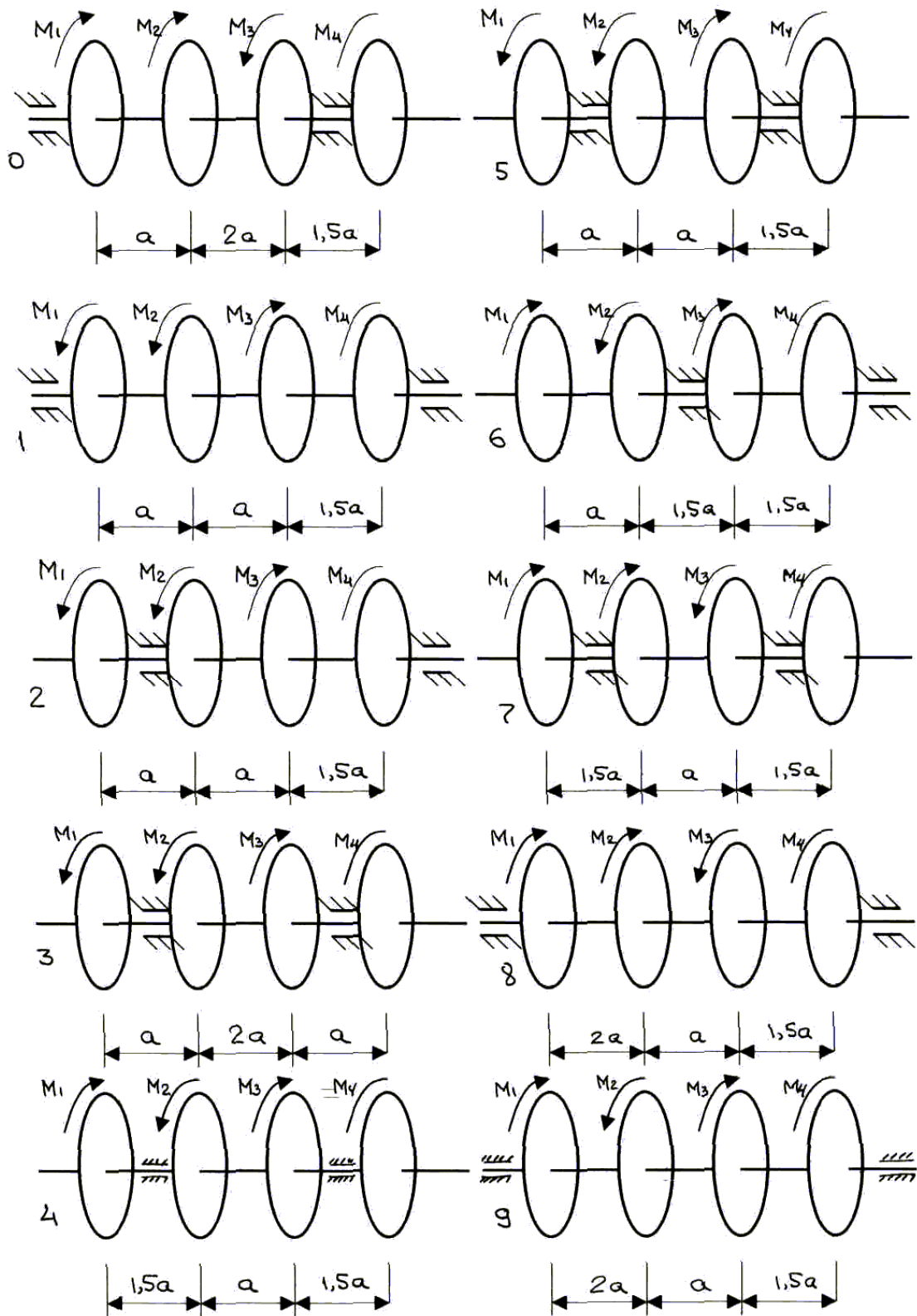


Рис.4.1. Схеми для розрахунково-графічної роботи №4

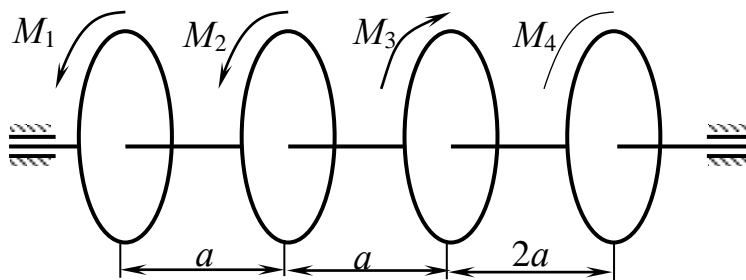
Послідовність виконання

1. Креслиться розрахункова схема до задачі, на якій позначаються напрямки та значення крутних моментів.
2. Визначається крутний момент M_4 за умовою рівноваги.
3. Будується епюра крутних моментів за допомогою метода перерізів.
4. Визначається діаметр суцільного валу на всіх навантажених ділянках.
5. Визначається зовнішній та внутрішній діаметри валу кільцевого перерізу.
6. Визначається кути повороту окремих ділянок стержня і будується епюра кутів закручування.
7. Визначається кут повороту між опорами (вважається, що опори знаходяться точно посередині ділянок).

Приклад виконання

Умови задачі: Визначити величину та напрямки крутного моменту M_4 . Побудувати епюру крутних моментів, визначити діаметри окремих ділянок стержня за умовами міцності на кручення для круглого та кільцевого перерізів. Коефіцієнт $\alpha = d/D$, де D, d – зовнішній та внутрішній діаметри трубчастого валу. Визначити кут закручування валу між опорами.

Розрахункова схема стержня подана на рисунку.



Чисельні дані до задачі

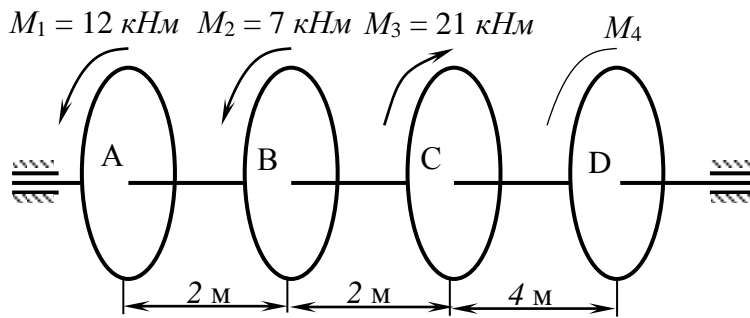
$$M_1 = 12 \text{ кНм}; M_2 = 7 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 21 \text{ кНм}; a = 2 \text{ м};$$

$$\alpha = 0.7; [\tau_{кр}] = 100 \text{ МПа}.$$

Розв'язок

1. На початку розв'язку задачі креслимо розрахункову схему, позначивши на неї зовнішні зусилля і геометричні розміри стержня. На розрахунковій схемі виділяємо характерні точки в місцях прикладення моментів.



2. Визначимо момент M_4 , користуючись умовою рівноваги і враховуючи правило знаків – момент, що крутить за годинниковою стрілкою є додатнім.

$$\sum_i M_{кр i} = 0$$

$$\sum_i M_{кр i} = -M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0$$

$$M_4 = M_1 + M_2 - M_3 = 12 + 7 - 21 = 2 \text{ кНм}$$

Момент M_4 крутить за годинниковою стрілкою, оскільки значення моменту отримано додатнім. Отже момент $M_4 = 2 \text{ кНм}$.

3. Побудуємо епюру крутних моментів, почергово застосовуючи метод перерізів для кожної ділянки.

ділянка АВ:

$$M_{AB} = -M_1 = -12 \text{ кНм}$$

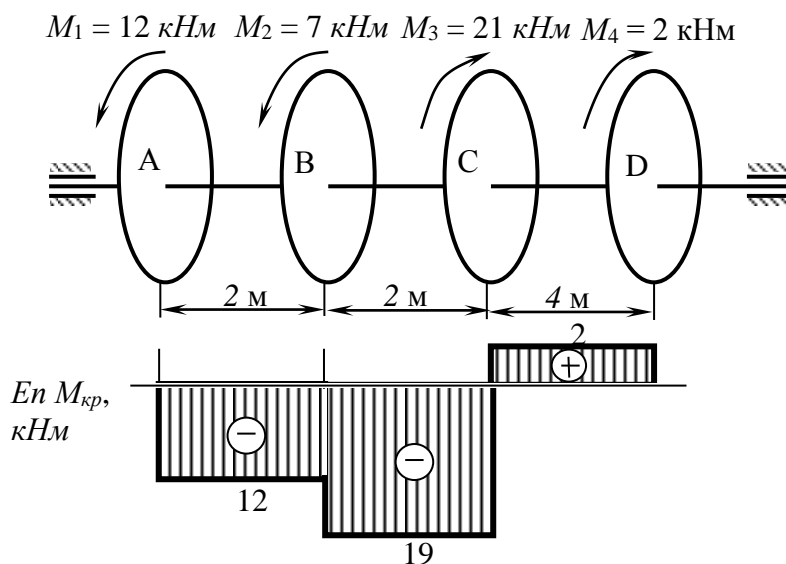
ділянка ВС:

$$M_{BC} = -M_1 - M_2 = -12 - 7 = -19 \text{ кНм}$$

ділянка CD:

$$M_{CD} = -M_1 - M_2 + M_3$$

$$M_{CD} = -12 - 7 + 21 = 2 \text{ кНм}$$



4. Визначимо діаметри ділянок стержня із круглим поперечним перерізом, за формулою:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0.2 \cdot [\tau_{кр}]}}$$

де $M_{кр}$ – крутний момент, який визначається за епюрою на даній ділянці. У формулу підставляється абсолютне значення (модуль) крутного моменту. Таким чином визначаємо діаметри всіх ділянок стержня.

Ділянка AB

$$d_{AB} = \sqrt[3]{\frac{M_{AB}^{кр}}{0.2 \cdot [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 10^3}{0.2 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0.0843 \text{ м} = 84.3 \text{ мм.}$$

Ділянка BC

$$d_{BC} = \sqrt[3]{\frac{M_{BC}^{кр}}{0.2 \cdot [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{19 \cdot 10^3}{0.2 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0.0983 \text{ м} = 98.3 \text{ мм.}$$

Ділянка CD

$$d_{CD} = \sqrt[3]{\frac{M_{CD}^{кр}}{0.2 \cdot [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^3}{0.2 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0.0464 \text{ м} = 46.4 \text{ мм}$$

Таким чином, отримані такі значення діаметрів на ділянках стержня: $d_{AB} = 84.3 \text{ мм}$, $d_{BC} = 98.3 \text{ мм}$, $d_{CD} = 46.4 \text{ мм}$.

5. Визначимо зовнішні діаметри ділянок стержня із кільцевим поперечним перерізом за формулою:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0.2 \cdot [\tau_{кр}] (1 - \alpha^4)}}$$

де α – коефіцієнт, який визначається як відношення внутрішнього діаметра до зовнішнього діаметра кільцевого поперечного перерізу

$$\alpha = d/d_0.$$

Ділянка AB

$$d_{AB} = \sqrt[3]{\frac{M_{AB}^{кр}}{0.2 \cdot (1 - \alpha^4) [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 10^3}{0.2 \cdot (1 - 0.7^4) 100 \cdot 10^6}} = 0.0924 \text{ м} = 92.4 \text{ мм.}$$

Ділянка BC

$$d_{BC} = \sqrt[3]{\frac{M_{BC}^{кр}}{0.2 \cdot (1 - \alpha^4) [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{19 \cdot 10^3}{0.2 \cdot (1 - 0.7^4) 100 \cdot 10^6}} = 0.1077 \text{ м} = 107.7 \text{ мм.}$$

Ділянка CD

$$d_{CD} = \sqrt[3]{\frac{M_{CD}^{кр}}{0.2 \cdot (1 - \alpha^4) [\tau_{кр}]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^3}{0.2 \cdot (1 - 0.7^4) 100 \cdot 10^6}} = 0.0508 \text{ м} = 50.8 \text{ мм}$$

Таким чином, отримані такі значення зовнішніх діаметрів на ділянках стержня: $d_{AB} = 92.4 \text{ мм}$, $d_{BC} = 107.7 \text{ мм}$, $d_{CD} = 50.8 \text{ мм}$.

6. Побудуємо епюру кутів закручування для стержня круглого поперечного перерізу за формулою:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot 0.1d^4},$$

де G – модуль пружності II роду (модуль зсуву), для сталі $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; l – довжина ділянки;

Ділянка AB

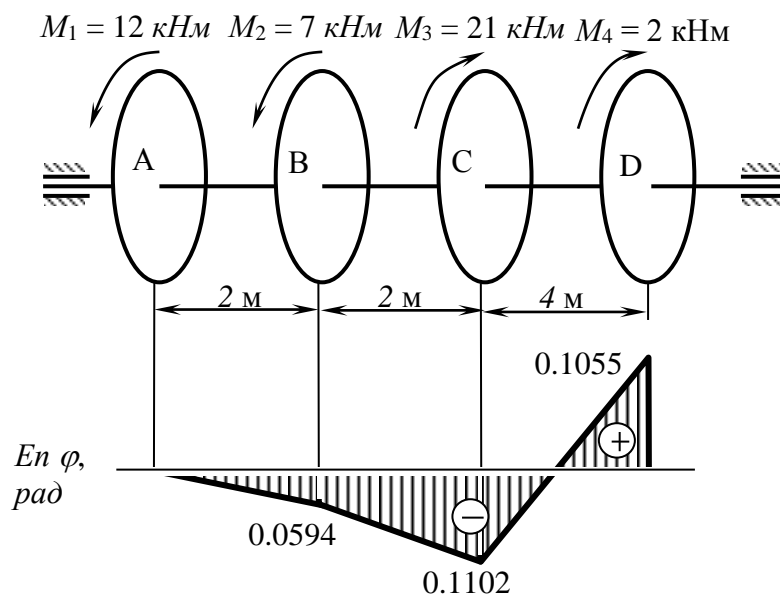
$$\varphi_{AB} = \frac{M_{AB}^{кр} \cdot l_{AB}}{G \cdot 0.1d_{AB}^4} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0.1 \cdot 0.0843^4} = -0.0594 \text{ рад.}$$

Ділянка BC

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{BC}^{кр} \cdot l_{BC}}{G \cdot 0.1d_{BC}^4} = \frac{-19 \cdot 10^3 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0.1 \cdot 0.0983^4} = -0.0508 \text{ рад.}$$

Ділянка CD

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{CD}^{кр} \cdot l_{CD}}{G \cdot 0.1d_{CD}^4} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0.1 \cdot 0.0464^4} = 0.2157 \text{ рад.}$$



Побудуємо епюру переміщень, тобто кутів закручування стержня. Будемо вважати що переріз A має нульовий кут закручування

$$\varphi_A = 0.$$

Тоді переріз B закрутиться відносно перерізу A на кут закручування ділянки AB .

$$\varphi_B = \varphi_{AB} = -0.0594 \text{ рад}$$

Переріз C закрутиться відносно перерізу A на кут що є сумою кутів закручування ділянок AB та BC .

$$\varphi_B = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = -0.0594 + (-0.0508) = -0.1102 \text{ рад}$$

Переріз D закрутиться відносно перерізу A на кут що є сумою кутів закручування ділянок AB , BC та CD .

$$\varphi_D = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = -0.0594 + (-0.0508) + 0.2157 = 0.1055 \text{ рад}$$

Будуємо епюру.

7. Знайдемо кут закручування між опорами. Кут закручування між опорами дорівнює куту закручування між шківками A і D , тобто складає φ_D . Кут закручування між опорами рівний 0.1055 рад .

Розрахунково-графічна робота №5. Аналіз задачі згину консольної балки

Завдання

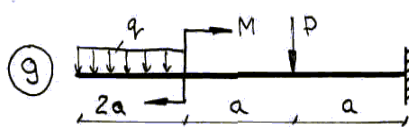
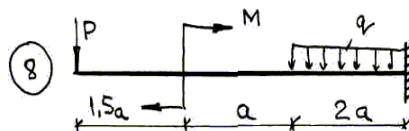
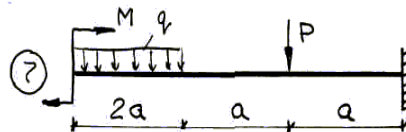
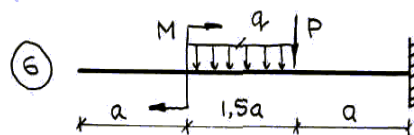
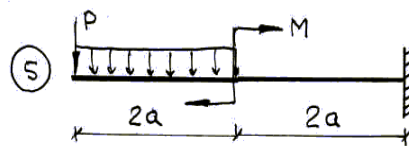
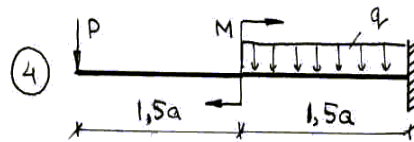
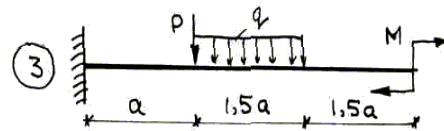
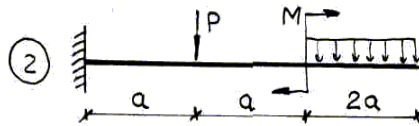
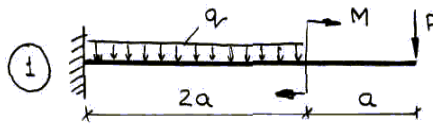
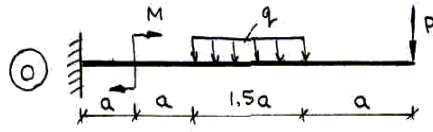
Для консольної балки побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів. Перевірити міцність балки прямокутного перерізу в небезпечних точках, де діють максимальні нормальні напруження σ . Прийняти для балок прямокутний переріз з шириною $b = 30$ см, висотою h . Матеріал балок – Ст. 3. $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Вихідні дані наведені у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Початкові дані

№ n/n	q , кН/м	M , кНм	P , кН	a , м	$n = h/b$
0	2	5	7	2	1
1	4	10	6	3	1.5
2	5	12	4	2.5	2
3	3	7	6	1.75	2.2
4	6	8	3	4	1.8
5	8	6	5	4.5	1.5
6	9	4	8	3.5	2.4
7	7	3	7	5	2.5
8	5	5	2	2.75	2.7
9	4	10	5	3.75	3.0

Розрахункові схеми до задачі № 5.



Приклад виконання

Умови задачі: Для двох типів балок (консольної та двохопорної) побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів. Перевірити міцність балки прямокутного перерізу в небезпечних точках, де діють максимальні нормальні напруження σ . Прийняти для балок прямокутний переріз з шириною $b = 30$ см, висотою h . Матеріал балок - Ст. 3. $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язок

Розглянемо консольну балку, вигляд якої поданий на схемі.

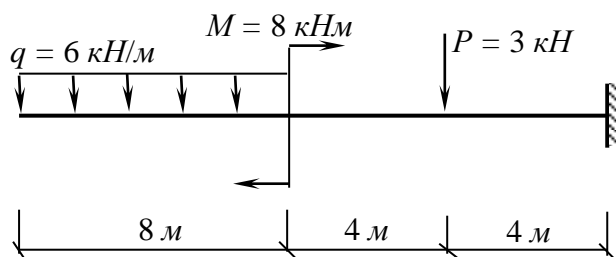
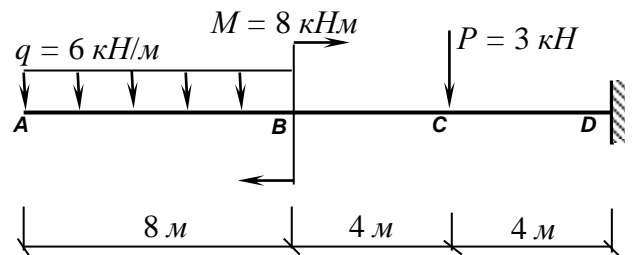


Рис. 4.8

1. Для консольних балок знаходити реакції в жорсткому защемленні не обов'язково. Позначимо характерні точки балки, починаючи з вільного кінця.

2. Побудуємо епюру поперечних сил, використовуючи метод перерізів. Перерізи балки будемо розглядати, рухаючись зліва направо і завжди відкидаючи праву частину балки із жорстким защемленням з невідомими реакціями.



Ділянка АВ:

$$Q_{AB} = -q \cdot z$$

$$Q_A \Big|_{z=0} = -6 \cdot 0 = 0; \quad Q_B \Big|_{z=8} = -6 \cdot 8 = -48 \text{ кН}$$

Ділянка ВС:

$$Q_{BC} = -q \cdot 8 = -6 \cdot 8 = -48 \text{ кН}$$

Ділянка CD:

$$Q_{CD} = -q \cdot 8 - P$$

$$Q_{CD} = -6 \cdot 8 - 3 = -51 \text{ кН}$$

3. Побудуємо епюру згинальних моментів. Послідовність розгляду ділянок залишається такою ж самою.

Ділянка АВ:

$$M_{AB} = -q \cdot z^2 / 2.$$

$$M_A \Big|_{z=0} = \frac{qz^2}{2} = \frac{6 \cdot 0^2}{2} = 0; \quad M_B \Big|_{z=8} = \frac{qz^2}{2} = \frac{6 \cdot 8^2}{2} = 192 \text{ кНм.}$$

Ділянка ВС:

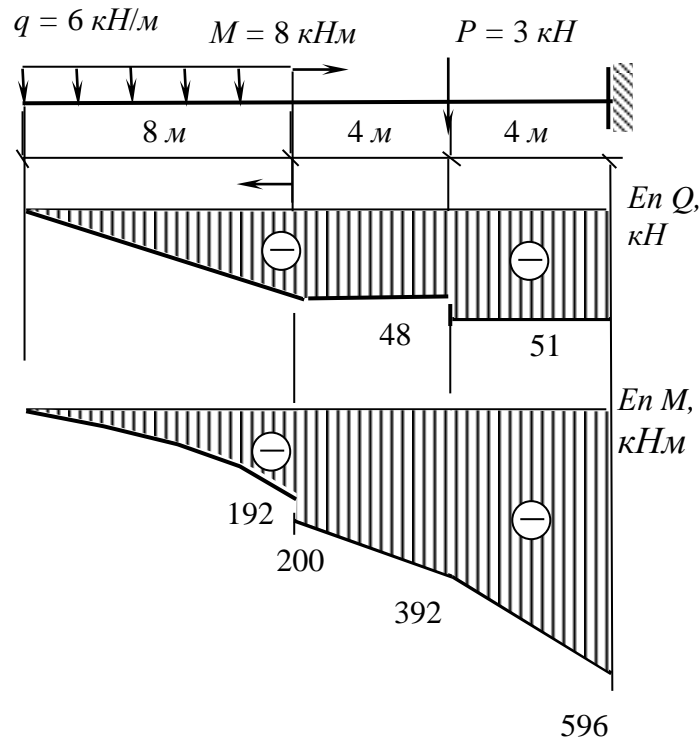
$$M_{BC} = -q \cdot 8(z - 4) - M.$$

$$M_B \Big|_{z=8} = -6 \cdot 8(8 - 4) - 8 = -200 \text{ кНм;}$$

$$M_C \Big|_{z=12} = -6 \cdot 8(12 - 4) - 8 = -392 \text{ кНм;}$$

Ділянка CD: $M_{CD} = -q \cdot 8(z - 4) - M - P(z - 12)$.
 $M_C|_{z=12} = -6 \cdot 8(12 - 4) - 8 - 3 \cdot (12 - 12) = -392 \text{ кНм}$.
 $M_D|_{z=16} = -6 \cdot 8(16 - 4) - 8 - 3 \cdot (16 - 12) = -576 \text{ кНм}$.

Кінцевий вигляд епюр.



Визначимо небезпечну точку (точку з найбільшими зусиллями у відповідному перерізі). Зрозуміло, що це точка D . Визначимо геометричні розміри перерізу за умовою міцності. $\sigma = \frac{12M}{bh^3} \leq [\sigma]$ або $h \geq \sqrt[3]{\frac{12M}{b[\sigma]}}$.

Отже висота прямокутного перерізу балки повинна складати:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12M}{b[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 596 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-2} \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.53 \text{ м} = 53 \text{ см}.$$

Розрахунково-графічна робота №6. Аналіз задачі згину двохпорної балки

Завдання

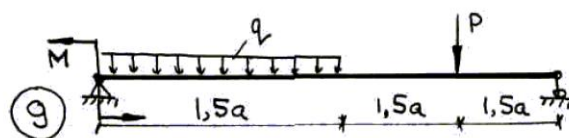
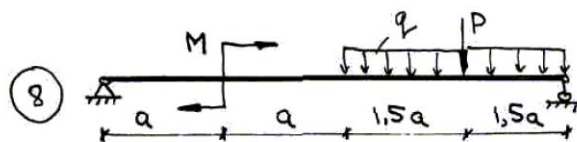
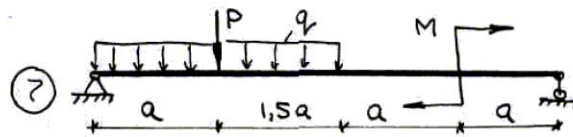
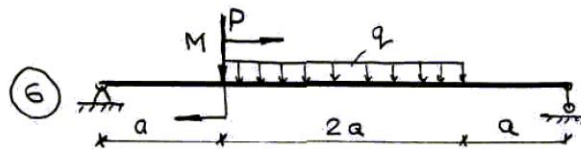
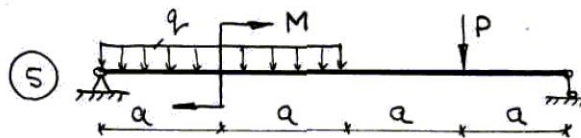
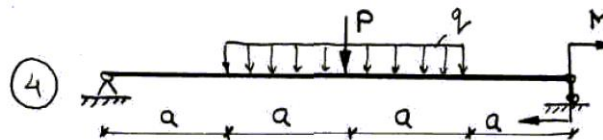
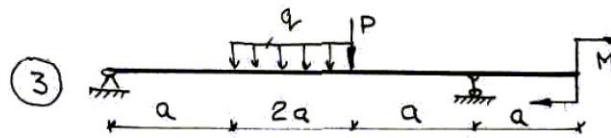
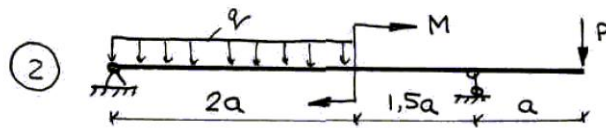
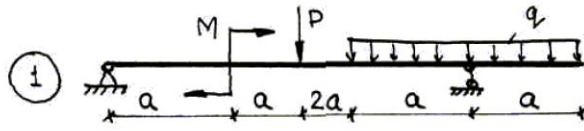
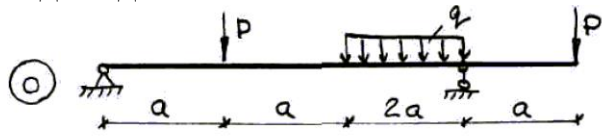
Для двохпорної балки побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів. Перевірити міцність балки прямокутного перерізу в небезпечних точках, де діють максимальні нормальні напруження σ . Прийняти для балок прямокутний переріз з шириною $b = 30$ см, висотою h . Матеріал балок – Ст. 3. $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Вихідні дані наведені у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Початкові дані

№ n/n	q , кН/м	M , кНм	P , кН	a , м	$n = h/b$
0	2	5	7	2	1
1	4	10	6	3	1.5
2	5	12	4	2.5	2
3	3	7	6	1.75	2.2
4	6	8	3	4	1.8
5	8	6	5	4.5	1.5
6	9	4	8	3.5	2.4
7	7	3	7	5	2.5
8	5	5	2	2.75	2.7
9	4	10	5	3.75	3.0

Розрахункові схеми до задачі № 6.

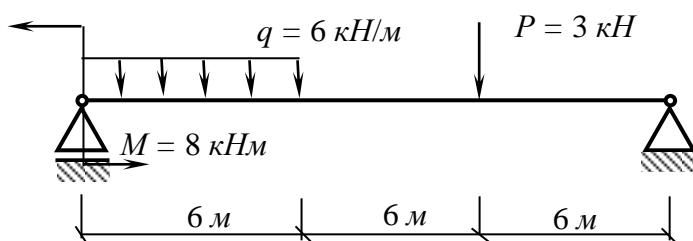


Приклад виконання

Умови задачі: Для двох типів балок (консольної та двохопорної) побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів. Перевірити міцність балки прямокутного перерізу в небезпечних точках, де діють максимальні нормальні напруження σ . Прийняти для балок прямокутний переріз з шириною $b = 30$ см, висотою h . Матеріал балок - Ст. 3. $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа..

Розв'язок

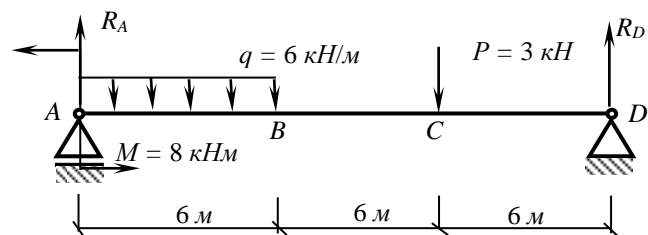
Розглянемо консольну балку, вигляд якої поданий на схемі.



4. Розглянемо двохопорну балку. На даній балці позначимо напрямки реакцій опор та характерні точки.

5. Знайдемо реакції опор, склавши рівняння рівноваги.

Сума моментів відносно опори A:



$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= -R_D \cdot 18 + P \cdot 12 + q \cdot 6 \cdot 3 - M = 0 \\ R_D &= \frac{P \cdot 12 + q \cdot 6 \cdot 3 - M}{18} = \frac{3 \cdot 12 + 6 \cdot 6 \cdot 3 - 8}{18} = 7.56 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Сума моментів відносно опори D:

$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= R_A \cdot 18 - P \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 15 - M = 0, R_A = \frac{P \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 15 + M}{18} = \\ &= \frac{3 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 15 + 8}{18} = 31.44 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Виконаємо перевірку, склавши додаткове рівняння рівноваги. Сума проєкцій всіх сил на вісь у дорівнює:

$$\Sigma Y = R_A + R_D - P - q \cdot 6 = 7.56 + 31.44 - 3 - 6 \cdot 6 = 0.$$

У результаті додавання за даним рівнянням отримуємо нуль, отже реакції знайдені правильно.

6. Побудуємо епюру поперечних сил.

Ділянка АВ: $Q_{AB} = R_A - q \cdot z$.

$$Q_A \Big|_{z=0} = 31 - 6 \cdot 0 = 31.44 \text{ кН};$$

$$Q_B \Big|_{z=6} = 31.44 - 6 \cdot 6 = -4.56 \text{ кН}$$

Ділянка ВС: $Q_{BC} = R_A - q \cdot 6 = 31.44 - 6 \cdot 6 = -4.56 \text{ кН}.$

Ділянка CD: $Q_{CD} = R_A - q \cdot 6 - P = 31.44 - 6 \cdot 6 - 3 = -7.56 \text{ кН}.$

Пристаємо до побудування епюри згинальних моментів.

Ділянка АВ: $M_{AB} = -\frac{q \cdot z^2}{2} + R_A \cdot z - M.$

Парабола на ділянці АВ має максимум, оскільки епюра поперечних сил переходить через нуль. Знайдемо координату переходу, прирівнявши рівняння поперечних сил на цій ділянці до нуля.

$$R_A - q \cdot z = 0;$$

$$z = R_A/q = 31.44/6 = 5.24 \text{ м}$$

Для побудування епюри моментів визначаємо три значення моментів – по краях ділянки і у точці максимуму.

$$M_A \Big|_{z=0} = -6 \cdot 0^2/2 + 31.44 \cdot 0 - 8 = -8 \text{ кНм};$$

$$M_B \Big|_{z=6} = -6 \cdot 6^2/2 + 31.44 \cdot 6 - 8 = 72.64 \text{ кНм};$$

$$M_{max} \Big|_{z=5.17} = -6 \cdot 5.24^2/2 + 31.44 \cdot 6 - 8 = 74.37 \text{ кНм};$$

Ділянка ВС: $M_{BC} = -q \cdot 6(z-3) + R_A \cdot x - M.$

$$M_B \Big|_{z=6} = -6 \cdot 6 \cdot (6-3) + 31.44 \cdot 6 - 8 = 72.08 \text{ кНм};$$

$$M_C \Big|_{z=12} = -6 \cdot 6(12-3) + 31.44 \cdot 12 - 8 = 45.28 \text{ кНм};$$

Ділянка CD: $M_{CD} = -q \cdot 6(z-3) + R_A \cdot x - M - P(z-12).$

$$M_C \Big|_{z=12} = -6 \cdot 6(12-3) + 31.44 \cdot 12 - 8 - 3(12-12) = 45.28 \text{ кНм};$$

$$M_C \Big|_{z=18} = -6 \cdot 6(18-3) + 31.44 \cdot 18 - 8 - 3(18-12) = 0.$$

Визначимо розміри перерізу балки за умовою міцності. Висота прямокутного перерізу балки повинна складати:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12M}{b[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 74.37 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-2} \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.27 \text{ м} = 27 \text{ см}.$$

Таким чином, задача розв'язана.

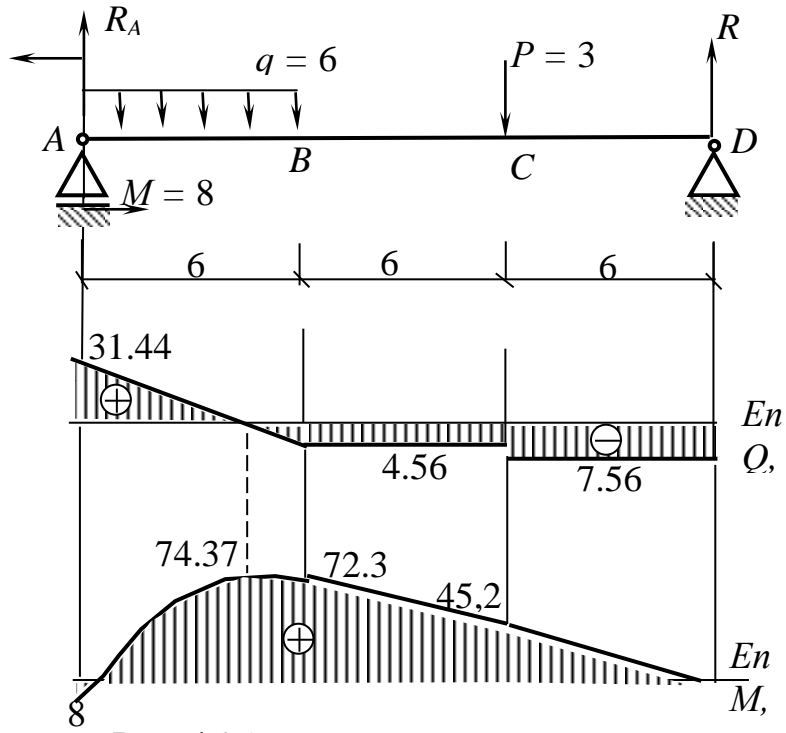


Рис. 4.25.

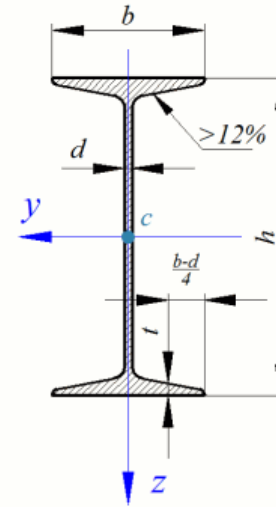
ДОДАТКИ
Додаток 1

Геометричні характеристики перерізів прокату

Двутавр сталевий
(ГОСТ 8239-89)

Позначення:

h - висота двутавра; b - ширина полиці; d - товщина стінки; t - середня товщина полиці; J - момент інерції; W - момент опору; i - радіус інерції; S - статичний момент півперерізу.



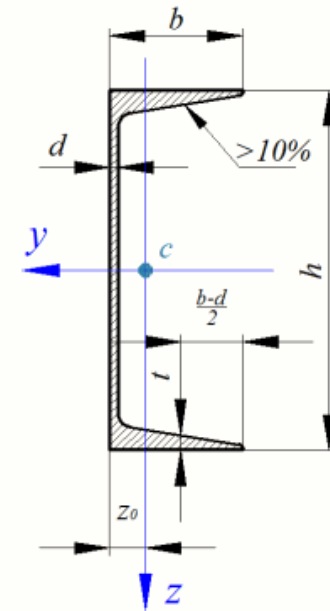
№ профілю	Маса $I_{м}, кг$	Розміри, мм				Площа перерізу $A, см^2$	Довідкові величини для осей						
		h	b	d	t		$y-y$				$z-z$		
							$I_y, см^4$	$W_y, см^3$	$i_y, см$	$S_y, см^3$	$I_z, см^4$	$W_z, см^3$	$i_z, см$
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,0	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12

№ профілю	Маса I м, кг	Розміри, мм				Площа перерізу A , см ²	Довідкові величини для осей						
		h	b	d	t		$y-y$				$z-z$		
							I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	S_y , см ³	I_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,76
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101,0	3,00
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123,0	3,23
55	96,2	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151,0	3,39
60	108,0	600	190	12,0	17,8	138,0	75806	2560	23,6	1491	1725	182,0	3,54

Швелери з нахилом внутрішніх граней полиць
(ГОСТ 8240-72)

Позначення:

h - висота швелера; b - ширина полиці; d - товщина стінки; t - середня товщина полиці; J - момент інерції; W - момент опору; i - радіус інерції; S - статичний момент півперерізу; z_0 - відстань від осі z до зовнішньої грані стінки.



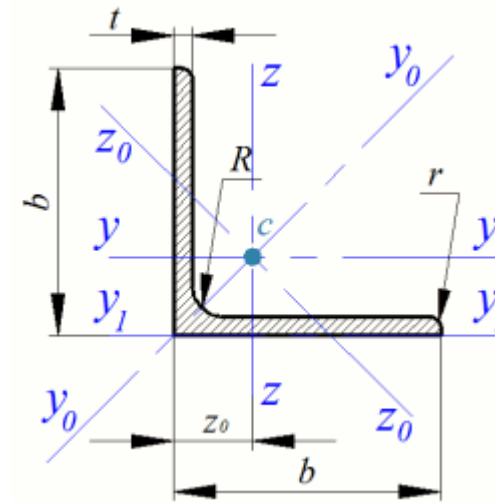
№ профілю	Маса I м, кг	Розміри, мм				Площа перерізу A , $см^2$	Довідкові величини для осей							
		h	b	d	t		у-у				z-z			z_0 , $см$
							I_y , $см^4$	W_y , $см^3$	I_y , $см$	S_y , $см^3$	I_z , $см^4$	W_z , $см^3$	i_z , $см$	
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,6	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,7	1,67

№ профілю	Маса I м, кг	Розміри, мм				Площа перерізу A , см ²	Довідкові величини для осей							
		h	b	d	t		у-у				z-z			z_0 , см
							I_y , см ⁴	W_y , см ³	I_y , см	S_y , см ³	I_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	79,9	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,9
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,1
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,0
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,21
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,2
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Кутник рівнобічний
(ГОСТ 8509-86)

Позначення:

b - ширина полиці; t - товщина полиці; R - радіус внутрішнього заокруглення; r - радіус заокруглення полиць; J - момент інерції; i - радіус інерції; J_{yz} - відцентровий момент інерції; W - момент опору; z_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць.



№ профілю	Розміри, мм				Площа пере-різу A , $см^2$	Маса I м, кг	Довідкові величини для осей										
	b	t	R	r			y-y			y ₀ -y ₀		z ₀ -z ₀			y ₁ -y ₁	I _{yz} $см^4$	z ₀ $см$
							I _y $см^4$	W _y $см^3$	i _y $см$	I _{ymax} , I _{ymax} $см^4$	i _{y0} , i _{ymax} $см$	I _{z0} , I _{z0min} $см^4$	W _{z0} $см^3$	i _{z0} , i _{z0min} $см$			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,4	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,2	0,39	0,81	0,23	0,6
		4			1,46	1,15	0,5	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	1,1	0,28	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	1,57	0,47	0,73
		4			1,86	1,46	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	2,1	0,59	0,76
		5			2,27	1,78	1,22	0,71	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	2,67	0,69	0,8
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	2,2	0,68	0,8
3	30	3	4	1,3	1,74	1,36	1,45	0,67	0,91	2,3	1,15	0,6	0,53	0,59	2,71	0,85	0,85
		4			2,27	1,78	1,84	0,87	0,9	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	3,64	1,08	0,89
		5			2,78	2,18	2,2	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	4,6	1,27	0,93

№ проф ілю	Розміри, мм				Площа пере-різу А, см ²	Маса І м, кг	Довідкові величини для осей										
	b	t	R	r			у-у			У ₀ -У ₀		Z ₀ -Z ₀			У ₁ -У ₁	I _{yz} см ⁴	Z ₀ см
							I _y см ⁴	W _y см ³	i _y см	I _{ymax} , I _{max} см ⁴	i _{y0} , i _{max} см	I _{z0} , I _{min} см ⁴	W _{z0} см ³	i _{z0} , i _{min} см	I _{y1} см ⁴		
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,59	0,63	3,24	1,03	0,89
		4			2,43	1,91	2,26	1	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	4,41	1,32	0,94
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	1,6	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	4,27	1,37	0,97
		4			2,67	2,1	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	5,73	1,75	1,01
		5			3,28	2,58	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	7,23	2,1	1,05
4	40	3	5	1,7	2,35	1,85	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	6,34	2,08	1,09
		4			3,08	2,42	4,58	1,6	1,22	7,26	1,53	1,9	1,19	0,78	8,51	2,68	1,13
		5			3,79	2,98	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,3	1,39	0,78	10,72	3,22	1,17
		6			4,48	3,52	6,41	2,3	1,2	10,13	1,5	2,7	1,58	0,78	12,97	3,72	1,21
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	9,01	3	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	12,25	3,89	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	15,28	4,71	1,3
		6			5,08	3,99	9,35	2,95	1,36	14,8	1,71	3,9	2,06	0,88	18,47	5,45	1,34
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1	12,35	4,16	1,33
		4			3,89	3,05	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,8	1,95	0,99	16,62	5,42	1,38
		5			4,8	3,77	11,2	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,3	0,98	20,88	6,57	1,42
		6			5,69	4,47	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	25,2	7,65	1,46
		7			6,56	5,15	14,84	4,23	1,5	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	29,6	8,63	1,5
		8			7,41	5,82	16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	33,86	9,52	1,53
5,6	56	4	6	2	4,38	3,44	13,1	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	23,22	7,69	1,52
		5			5,41	4,25	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,1	29,31	9,41	1,57
6	60	4	7	2,3	4,72	3,71	16,21	3,7	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	28,6	9,48	1,62
		5			5,89	4,58	19,79	4,56	1,84	31,4	2,32	8,18	3,49	1,18	36,02	11,61	1,66

№ проф ілю	Розміри, мм				Площа пере-різу А, см ²	Маса І м, кг	Довідкові величини для осей										
	b	t	R	r			у-у			У ₀ -У ₀		Z ₀ -Z ₀			У ₁ -У ₁	I _{yz} см ⁴	Z ₀ см
							I _y см ⁴	W _y см ³	i _y см	I _{ymax} , I _{max} см ⁴	i _{y0} , i _{max} см	I _{z0} , I _{min} см ⁴	W _{z0} см ³	i _{z0} , i _{min} см	I _{y1} см ⁴		
		6			6,92	5,43	23,21	5,4	1,83	36,81	2,31	9,6	3,99	1,18	43,21	13,6	1,7
		8			9,04	7,1	29,55	7	1,81	46,77	2,27	12,34	4,9	1,17	58,19	17,22	1,78
		10			11,08	8,7	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15	5,7	1,16	73,24	20,32	1,85
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,9	18,86	4,09	1,95	29,9	2,45	7,81	3,26	1,25	33,03	11	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	5,05	1,94	36,8	2,44	9,52	3,87	1,25	41,66	13,7	1,74
		6			7,28	5,72	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	50,13	15,9	1,78
	70	4	8	2,7	6	4,87	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	50,95	17	1,88
		5			6,86	5,38	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	56,7	18,7	1,9
		6			8,15	6,39	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	68,25	22,1	1,94
		7			9,42	7,39	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	80,28	25,2	1,99
		8			10,67	8,37	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	91,7	28,2	2,02
7		10			13,11	10,29	57,9	11,82	2,1	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	115,72	33,6	2,1
7,5	75	5	9	3	7,39	5,8	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	69,68	23,1	2,02
		6			8,78	6,89	46,57	8,57	2,3	73,87	2,9	19,28	6,62	1,48	83,83	27,3	2,06
		7			10,15	7,96	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	98,1	31,2	2,1
		8			11,5	9,02	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,8	8,16	1,47	113	35	2,15
		9			12,83	10,07	66,1	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	127,07	38,6	2,18
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,8	7,1	1,59	93,32	30,9	2,17
		6			9,38	7,36	56,97	9,8	2,47	90,4	3,11	23,54	7,6	1,58	101,96	33,4	2,19
		7			10,85	8,51	65,31	11,32	2,45	103,66	3,09	26,97	8,55	1,58	119,27	38,3	2,23
		8			12,3	9,65	73,36	12,8	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	136,74	43	2,27
		10			15,14	11,88	88,58	15,67	2,42	140,31	3,04	36,85	11,09	1,56	172,19	56,7	2,35
		12			17,9	14,05	102,74	18,42	2,4	162,27	3,01	43,21	12,62	1,55	207,57	59,5	2,42

№ проф ілю	Розміри, мм				Площа пере-різу А, см ²	Маса І м, кг	Довідкові величини для осей										
	b	t	R	r			у-у			У ₀ -У ₀		Z ₀ -Z ₀			У ₁ -У ₁	I _{yz} см ⁴	Z ₀ см
							I _y см ⁴	W _y см ³	i _y см	I _{ymax} , I _{ymax} см ⁴	i _{y0} , i _{ymax} см	I _{z0} , I _{zmin} см ⁴	W _{z0} см ³	i _{z0} , i _{zmin} см	I _{y1} см ⁴		
9	90	6	10	3,3	10,61	8,33	82,1	12,49	2,78	130	3,5	33,97	9,88	1,79	144,75	48,1	2,43
		7			12,28	9,64	94,3	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	169,22	55,4	2,47
		8			13,93	10,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,8	12,34	1,77	193,87	62,3	2,51
		9			15,6	12,2	118	18,29	2,75	186	3,46	48,6	13,48	1,77	219,44	68	2,55
		10			17,17	13,48	128,6	20,07	2,74	203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	243,78	75,3	2,59
		12			20,33	15,96	149,67	23,85	2,71	235,88	3,41	62,4	16,53	1,75	294,6	86,2	2,67
10	100	6,5	12	4	12,82	10,06	122,1	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	214,18	71,4	2,68
		7			13,75	10,79	130,59	17,9	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	231,57	76,4	2,71
		8			15,6	12,25	147,19	20,3	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	265,16	86,3	2,75
		10			19,24	15,1	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	333,04	110	2,83
		12			22,8	17,9	208,9	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,1	1,95	401,97	122	2,91
		14			26,28	20,63	237,15	33,83	3	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	472,1	138	2,99
		15			27,99	21,97	250,68	35,95	2,99	395,87	3,76	105,48	24,62	1,94	507,65	145	3,03
		16			29,68	23,3	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	541,73	152	3,06
11	110	7	12	4	15,15	11,89	175,61	21,83	3,4	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	308,35	106	2,96
		8			17,2	13,5	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	352,97	116	3
12	120	8	12	4,6	18,8	14,76	259,75	29,68	3,72	412,45	4,68	107,04	23,29	2,39	458,33	153	3,25
		10			23,24	18,24	317,16	36,59	3,69	503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	574,87	187	3,33
		12			27,6	21,67	371,8	43,3	3,67	590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	692,74	218	3,41
		15			33,99	26,68	448,9	52,96	3,63	711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	872,45	262	3,53
12,5	125	8	14	4,6	19,69	15,46	294,36	32,2	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	516,65	172	3,36
		9			22	17,3	327,48	36	3,86	520	4,86	135,88	28,26	2,48	581,8	192	3,4
		10			24,33	19,1	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	649,41	211	3,45

№ проф ілю	Розміри, мм				Площа пере-різу А, см ²	Маса І м, кг	Довідкові величини для осей										
	b	t	R	r			у-у			У ₀ -У ₀		Z ₀ -Z ₀			У ₁ -У ₁	I _{yz} см ⁴	Z ₀ см
							I _y см ⁴	W _y см ³	i _y см	I _{ymax} , I _{max} см ⁴	i _{y0} , i _{max} см	I _{z0} , I _{min} см ⁴	W _{z0} см ³	i _{z0} , i _{min} см	I _{y1} см ⁴		
		12			28,89	22,68	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	782,23	248	3,53
		14			33,37	26,2	481,76	54,17	3,8	763,9	4,78	199,62	39,1	2,45	916,64	282	3,61
		16			37,77	29,65	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,1	2,44	1050,06	315	3,68
14	140	9	14	4,6	24,72	19,41	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	818,93	274	3,78
		10			27,33	21,45	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	911,1	301	3,82
		12			32,49	25,5	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	1096,66	354	3,9
15	150	10	14	4,6	29,33	23,02	634,76	58,07	4,65	1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	1120,61	374	4,07
		12			34,89	27,39	747,48	68,9	4,63	1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	1348,37	440	4,15
		15			43,08	33,82	908,38	84,66	4,59	1442,6	5,79	374,17	61,96	2,95	1693,85	534	4,27
		18			51,09	40,11	1060,08	99,86	4,56	1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	2040,21	621	4,38
16	160	10	16	5,3	31,43	24,67	774,24	66,19	4,96	1229,1	6,25	319,38	52,52	3,19	1355,38	455	4,3
		11			34,42	27,02	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	1495,52	496	4,35
		12			37,39	29,35	912,89	78,62	4,94	1450	6,23	375,78	60,53	3,17	1633,47	537	4,39
		14			43,57	33,97	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,2	430,81	68,15	3,16	1917,04	615	4,47
		16			49,07	38,52	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	2191,06	690	4,55
		18			54,79	43,01	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	2464,77	771	4,63
		20			60,4	47,44	1418,85	125,6	4,85	2248,26	6,1	589,43	90,02	3,12	2753,09	830	4,7
18	180	11	16	5,3	38,8	30,47	1216,44	92,47	5,6	1933,1	7,06	499,78	72,86	3,59	2129,11	716	4,85
		12			42,19	33,12	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	2325,47	776	4,89
		15			52,18	40,96	1607,36	123,74	5,55	2554,99	7	659,73	93,11	3,56	2917,08	948	5,01
		18			61,99	48,66	1884,07	146,36	5,51	2992,69	6,95	775,44	106,88	3,54	3515,45	1108	5,13
		20			68,43	53,72	2061,11	161,07	5,49	3271,31	6,91	850,92	115,71	3,53	3911,46	1210	5,2
20	200	12	18	6	47,1	36,97	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,4	98,68	3,99	3181	1073	5,37

№ проф ілю	Розміри, мм				Площа пере-різу А, см ²	Маса І м, кг	Довідкові величини для осей										
	b	t	R	r			у-у			У ₀ -У ₀		Z ₀ -Z ₀			У ₁ -У ₁	I _{yz} см ⁴	Z ₀ см
							I _y см ⁴	W _y см ³	i _y см	I _y max, I _y max см ⁴	i _{y0} , i _y max см	I _{z0} , I _{z0} min см ⁴	W _{z0} см ³	i _{z0} , i _{z0} min см	I _{y1} см ⁴		
		13			50,85	39,92	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	3454,56	1156	5,42
		14			54,6	42,8	2097	144,17	6,2	3333	7,81	861	111,5	3,97	3724,71	1236	5,46
		16			61,98	48,65	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	4264,84	1393	5,54
		18			69,3	54,4	2620,64	182,22	6,15	4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	4809,44	1544	5,62
		20			76,54	60,08	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	5358,25	1689	5,7
		24			90,78	71,25	3350,66	236,77	6,08	5313,5	7,65	1387,73	167,74	3,91	6457,38	1963	5,85
		25			94,29	74,02	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	6737,33	2028	5,89
		30			111,54	87,56	4019,6	288,57	6	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	8129,28	2332	6,07
22	220	14	21	7	60,38	47,4	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,6	1158,56	138,62	4,38	4923,32	1655	5,91
		16			68,58	53,83	3175,44	198,71	6,8	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	5660,81	1869	6,02
25	250	16	24	8	78,4	61,55	4717,1	258,43	7,76	7492,1	9,78	1942,09	203,45	4,98	8289,2	2775	6,75
		18			87,72	68,86	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	223,39	4,96	9339,28	3089	6,83
		20			96,96	76,11	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	10394,5	3395	6,91
		22			106,12	83,31	6270,32	348,26	7,69	9961,6	9,69	2579,04	260,52	4,93	11470,2	3691	7
		25			119,71	93,97	7006,39	391,72	7,65	11125,5	9,64	2887,26	287,14	4,91	13058	4119	7,11
		28			133,12	104,5	7716,86	434,25	7,61	12243,8	9,59	3189,89	311,98	4,9	14675,4	4527	7,23
		30			141,96	111,4	8176,51	462,11	7,59	12964,7	9,56	3388,98	327,82	4,89	15762,3	4788	7,31

Ступак Д.О., Отрош Ю.А., Поздєєв С.В.

С-88 Прикладна механіка: Посібник до виконання розрахунково-графічних робіт з розділу «Опір матеріалів». Для студентів і курсантів вищих навч. закл., які навч. за напрямом підготовки 6.170203 «Пожежна безпека» та 6.170201 «Цивільний захист». / Упор. Ступак Д.О., Отрош Ю.А., Поздєєв С.В. – Черкаси: ЧПБ, - 2015. – 54 с.