

УДК 625.032

ВРАХУВАННЯ ПОЗИЦІЙНИХ УМОВ ПРИ РОЗРАХУНКУ ЕЛІПТИЧНИХ ВІДБИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Куценко Л.М., д.т.н.,

Шевченко С.М.

*Національний університет цивільного захисту України**(м. Харків, Україна)*

Наведено спосіб розрахунку еліптичних відбивальних систем з врахуванням кількості відбиттів від границі, після яких рухома точка досягне ε - околу наперед заданої точки .

Ключові слова: геометричне моделювання, еліптичні відбивальні системи, розрахунок відбивачів, функція відбиття.

Постановка проблеми. Розрахунок відбивачів геометричної оптики, акустики чи теплотехніки [1-3] передбачає врахування ряду позиційних умов. При цьому необхідно розв'язувати задачі багатократних відбиттів (у розумінні математичних більярдів) з врахуванням таких позиційних умов [4]. А саме, визначення кількості відбиттів від границі, після яких рухома точка досягне ε - околу наперед заданої точки; визначення кількості відбиттів від границі, після яких рухома точка досягне ε - околу стартової точки; а також визначення кількості напрямків руху зі стартової точки, яка після заданої кількості відбиттів досягне ε - околу наперед заданої точки. Розв'язання цих питань дозволить аналізувати результати дії відбивальних систем і сприятиме їх поліпшенню.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [5 - 7] наведено приклади трасування математичних більярдів. Для опису траси точки в межах кола одиничного радіуса зі стартовою точкою $A(-d, 0)$ необхідно визначити всі напрямки початкового руху точки, яка після заданої кількості відбиттів досягла ε -околу точки $B(x_B; y_B)$ (рис. 1) Обчислювати параметри відбиття слід за формулами:

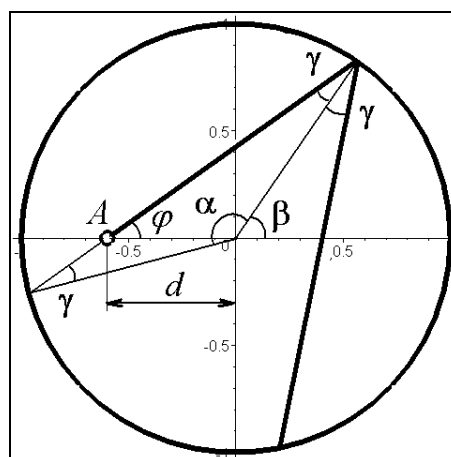


Рис. 1. Параметри відбиття

$$\gamma = \arcsin(d \sin \varphi); \quad \alpha = \pi - 2\gamma; \quad \beta = \varphi + \gamma. \quad (1)$$

На колі координати точки N -того відбиття слід обчислювати так:

$$x_N = \cos(\beta - (N-1)\alpha); \quad y_N = \sin(\beta - (N-1)\alpha). \quad (2)$$

На рис. 2. наведено варіанти досягнення відбитим променем точки $B(0,5; 0,7)$ за умови чотирьох відбиттів від кола, і коли джерелом променів є точка $A(-0,6; 0)$ (всього існує 8 варіантів відбиття).

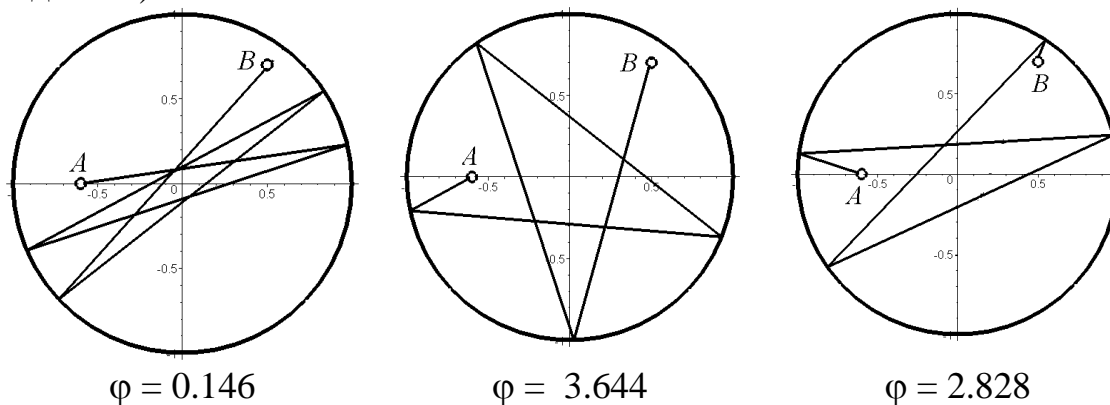


Рис. 2. Приклади досягнення відбитим променем точки $B(0,5 ; 0,7)$ після чотирьох відбиттів від кола

Більш загальним є алгоритм, складений на основі поняття функції відбиття [8, 9]. Тоді ознакою того, що траєкторія більярду пройде

ε - околі точки (p, q) , є задовольняння умові нерівності:

$$\left| \frac{p - \cos v}{\cos f(u, v) - \cos v} - \frac{q - \sin v}{\sin f(u, v) - \sin v} \right| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

де $f(u, v)$ – функція відбиття границі більярду. На практиці для деяких впроваджень інтерес викликає границя у вигляді еліпса.

Формулювання цілей статті. Розробити схему розрахунку еліптичних відбивальних систем з використанням функції відбиття для еліпса.

Основна частина. Функція відбиття для еліпса з півосями a і b має вигляд [5,6]:

$$f(u, v) = -v - 2 \arctan \left(\frac{U(u, v)}{V(u, v)} \right),$$

де
$$U(u, v) = ((a^2 + b^2) \cos 2v - a^2 + b^2) \tan \frac{u+v}{2} - 2b^2 \sin 2v;$$

$$V(u, v) = (a^2 + b^2) \cos 2v - a^2 + b^2 + 2a^2 \sin 2v \tan \frac{u+v}{2}.$$

Тоді полярні кути p і q для першої ланки більярду можна визначити за допомогою формул:

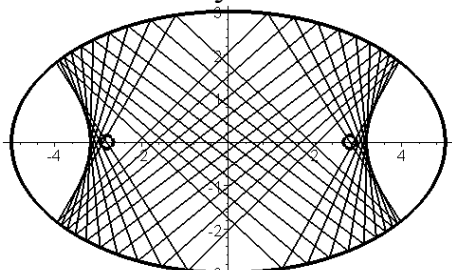
$$f_1(p, q) = \tan \alpha - \frac{b(\sin q - \sin p)}{a(\cos q - \cos p)};$$

$$f_2(p, q) = (x_N - a \cos p)(y_N - b \sin q) - (x_N - a \cos q)(y_N - b \sin p).$$

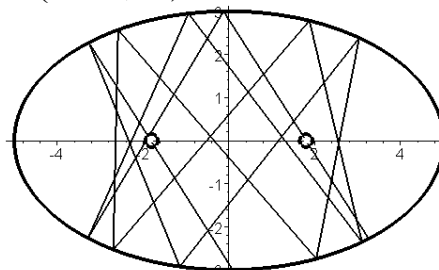
Для цього необхідно відносно полярних кутів p і q розв'язати систему рівнянь $f_1(p, q) = 0$; $f_2(p, q) = 0$.

Ланки подальших відбиттів визначаються аналогічно.

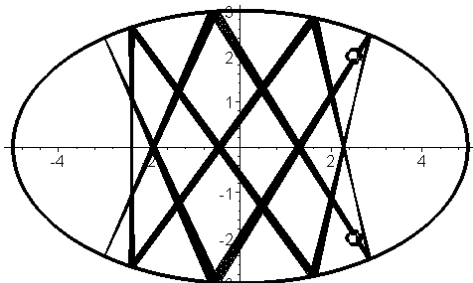
На рис. 3 зображено приклади більярдів, які виходять з точки A і досягають ε -околу точки B за N відбиттів ($\varepsilon = 0,01$).



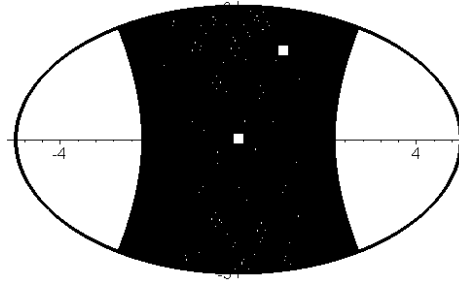
$A(-2,8; 0)$; $B(2,8; 0)$; $N = 39$



$A(-1,8; 0)$; $B(1,8; 0)$; $N = 12$



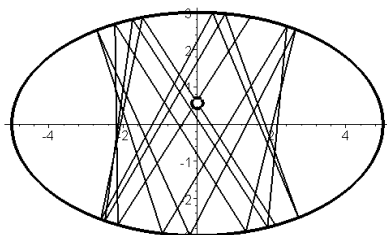
$A(2,5; 2)$; $B(2,5; -2)$; $N = 67$



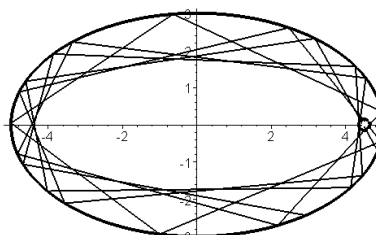
$A(0; 0)$; $B(1; 2)$; $N = 437$

Рис. 3. Більярди, які сполучають точки A і B за N відбиттів

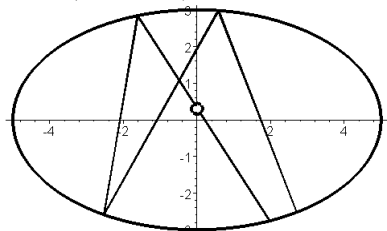
На рис. 4 зображено варіанти розрахунків, коли точка A співпадає з положенням точки B .



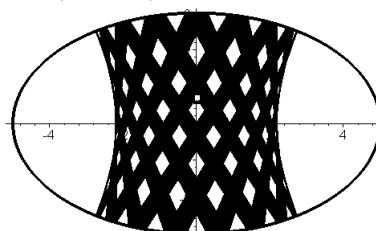
$A(0; 0,56)$ $N = 17$



$A(4,5; 0)$ $N = 21$



$A(0; 0,3)$ $N = 8$

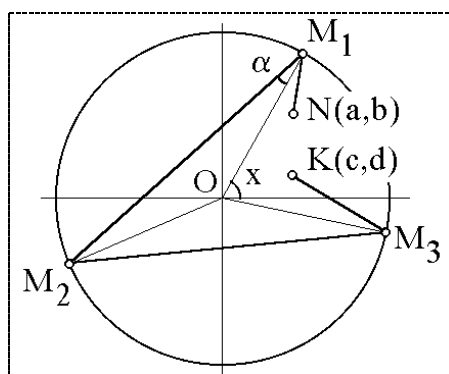


$A(0; 0,7071)$ $N = 1669$

Рис. 4. Циклічні більярди відносно точки A і N відбиттів

Нехай задані точки N і K . Необхідно оцінити кількість можливих напрямків початкових прямолінійних рухів із точки N , при яких після k - кратних відбиттів від кола промінь пройде через точку K .

Розглянемо коло одиничного радіуса і точку $N(a,b)$ (рис. 5). Задамо початковий промінь, що виходить із точки N . Нехай перше відбиття променя від кола відбудеться в точці M_1 . За допомогою центрального кута x ($0 \leq x \leq 2\pi$) визначимо координати точки M_1 ($\cos x$, $\sin x$).



На характер траси при різних багатократних відбиттях променя істотний вплив має кут α , утворений відрізками OM_1 і NM_1 . Має місце

Рис. 5. Схема променів трикратного відбиття

$$\cos \alpha = \frac{\cos x(a - \cos x) + \sin x(b - \sin x)}{\sqrt{(a - \cos x)^2 + (b - \sin x)^2}} \quad (4)$$

Оскільки відбиття променя від кола відбувається за нормальним законом (тобто кут падіння дорівнює куту відбиття відносно нормалі дотичної до кривої у точці відбиття), то вираз (4) доцільно прийняти в якості *інваріанта трасування* відбитих променів у колі.

Припустимо, що $K(c, d)$ є кінцевою точкою трасування, у яку промінь прийшов після k -того відбитка від кола в точці з координатами $M_k(\cos(x+(k-1)(\pi-2\alpha)), \sin(x+(k-1)(\pi-2\alpha)))$. Розглянемо кут, утворений відрізками OM_k і KM_k . Косинус цього кута визначається виразом

$$\frac{A(c - A) + B(d - B)}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{(c - A)^2 + (d - B)^2}}, \quad (5)$$

де $A = \cos(x+(k-1)(\pi-2\alpha))$; $B = \sin(x+(k-1)(\pi-2\alpha))$.

За умови пружного відбиття маємо, що чисельне значення виразу (5) повинно дорівнювати значенню інваріанта (4)

$$\frac{\cos x(a - \cos x) + \sin x(b - \sin x)}{\sqrt{(a - \cos x)^2 + (b - \sin x)^2}} = \frac{A(c - A) + B(d - B)}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{(c - A)^2 + (d - B)^2}} \quad (6)$$

Нехай після k -го відбитка від кола промінь, що виходить із точки $N(a, b)$, досягає положення точки $K(c, d)$. Тоді кількість початкових напрямків руху точки N можна оцінити кількістю коренів функції

$$F(x) = \frac{\cos x(a - \cos x) + \sin x(b - \sin x)}{\sqrt{(a - \cos x)^2 + (b - \sin x)^2}} - \frac{A(c - A) + B(d - B)}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{(c - A)^2 + (d - B)^2}}, \quad (7)$$

де $A = \cos(x+(k-1)(\pi-2\alpha))$; $B = \sin(x+(k-1)(\pi-2\alpha))$.

Кількість коренів функції (7), взаємне розташування і наближене значення кожного з них можна визначити з графіка цієї функції.

Приклад. Розглянемо випадок, коли промені відбиваються два рази ($k = 2$) і точки мають координати $N(-0,7; -0,1)$ і $K(0,6; 0,4)$. Графік відповідної функції подано на рис. 6 а.

Функція $F(x)$ має чотири корені $x_1 = 0.15464$; $x_2 = 1.42935$; $x_3 = 3.16874$; $x_4 = 4.64984$. Отже, існує чотири варіанта початкових напрямків руху з точки N таких, що після двохкратного відбиття від кола промінь, який вийшов з точки $N(-0,7, -0,1)$ досягне положення точки $K(0,6; 0,4)$. Для графічного зображення цих напрямків необхідно на колі побудувати чотири точки, для яких центральний кут відповідав би значенням знайдених коренів функції $F(x)$.

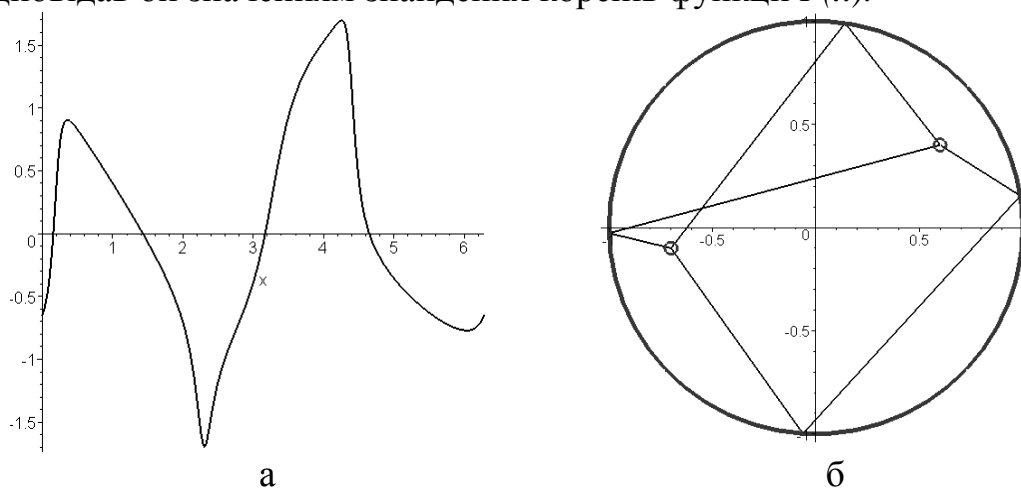


Рис. 6. Графік функції (а) F для визначення напрямку початкового руху з точки $N(0.5, 0.5)$ та схема трасування (б)

Далі необхідно скомбінувати сполучення одержаних точок. Цей етап побудови погано формалізується. В нашому випадку після аналізу можна одержати один напрям з двократним відбиттям, і два напрями руху точки «з поверненням». Схема варіантів відбиттів подана на рис.6 б.

Висновок. Використання функції відбиття дозволяє спростити алгоритми розрахунку багатократних відбиттів еліптичних відбивальних систем.

Література

1. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы / Л. А. Вайнштейн. – М.: Советское радио, 1996. – 475 с.
2. Подгорный А. Л. К анализу первых отражений звука при криволинейных формах залов / А. Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К: Будівельник, 1980. – Вып. 30. – с.7-10.
3. Билецкий С. В. Моделирование эффекта «теплового резонанса» при конструировании жарочных шкафов / С. В. Билецкий, Б. Б. Ситабдиев // Системні технології. – Дніпропетровськ, 2006. –

- Вип. 2(43). – С. 29 – 33.
4. Гальперин Г. А. Математические бильярды, бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики / Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков // Библ. “Квант”. – М.: Наука, 1990. – Вып.77. – 288 с.
 5. Білецький С.В. Геометричне моделювання циклічних траєкторій математичного б'їльярда в колі / С.В. Білецький // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 9. – С. 142–149.
 6. Серета Н. І. Геометричне моделювання перебігу променів в еліптичних та параболічних відбивальних системах: автореф. дис. на соискание учен. степени канд. техн. наук: 05.01.01 / Н. І. Серета. – Київ, 1999. – 20 с.
 7. Білецький С. В. Геометричне моделювання багатократних відбиттів світлових і теплових променів в еліптичних областях: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.01.01 // С. В. Білецький. – Київ, 2006. – 20 с.
 8. Найденов С. В. Геометро-динамический подход к бильярдным системам. Проективная инволюция бильярда. Прямая и обратная задачи / С. В. Найденов, В. В. Яновский // Теоретическая и математическая физика. –2001. – № 1. – Том 127. – С. 110 – 124.
 9. Куценко Л. М. Розрахунок відбивальної системи на основі функції відбиття / Л.М. Куценко, Л.В. Ушаков // Геометричне та комп'ютерне моделювання. –Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип. 15. – С. 3–10.

УЧЕТ ПОЗИЦИОННЫХ УСЛОВИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТРАЖАЮЩИХ СИСТЕМ

Куценко Л.Н., Шевченко С.Н.

Приведен способ расчета эллиптических отражающих систем с учетом количества отражений от границы, после которых подвижная точка достигнет ε -окрестности заведомо заданной точки.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, эллиптические отражающие системы, расчет отражателей, функция отражения.

ACCOUNTING POSITION CONDITIONS AT CALCULATION OF ELLIPTIC REFLECTIVE SYSTEMS

Kutsenko L., Shevchenko S.

A method is given for calculating elliptical reflecting systems with allowance for the number of reflections from the boundary, after which the mobile point reaches the ε -neighborhood of a known point.

Keywords: geometric modeling, elliptical reflecting systems, calculation of reflectors, reflection function.