

# Математичні моделі та методи

УДК 519.85

DOI: 10.30748/soi.2019.156.06

О.А. Антошкін<sup>1</sup>, О.В. Панкратов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Національний університет цивільного захисту України, Харків

<sup>2</sup> Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків

## УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ПОКРИТТЯ ОБЛАСТІ ІДЕНТИЧНИМИ КОЛАМИ ТА ЇЇ ОСНОВНІ РЕАЛІЗАЦІЇ

*Розглянуто задачу покриття довільної області ідентичними колами. На основі формалізації критеріїв повноти покриття побудовано узагальнену математичну модель задачі кругового покриття у вигляді задачі негладкої оптимізації. Область допустимих розв'язків задачі описано системою нерівностей, що виникає при запису функцій належності для формування умов покриття і додатковою системою нерівностей для врахування технологічних обмежень, що записується за допомогою  $\rho$ -функцій. Негладкість моделі виникає внаслідок мінімаксного характеру деяких  $\rho$ -функцій та функцій належності. Розроблено засоби генерації множини реалізацій узагальненої математичної моделі покриття для широкого класу прикладних задач. Запропоновано стратегію розв'язку виникаючих задач нелінійного програмування.*

**Ключові слова:** кругове покриття, критерій повноти,  $\rho$ -функції, функції належності, математична модель, нелінійна оптимізація.

### Вступ

**Постановка проблеми.** На сучасному етапі стрімко зростає інтерес до задач покриття кругами областей  $R^2$ , що пояснюється різноманітністю практичних застосувань, які варіюються від безпеки музеїв до захисту природи. Останнім часом цей напрямок стає все більш перспективним. До таких задач відносяться: проектування систем пожежної сигналізації, захист лісових масивів від пожеж, визначення необхідної кількості і розміщення станцій стільникового зв'язку, побудова мережі призначених для контролювання кругових орбіт штучних супутників Землі та ін.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Задачі оптимального кругового покриття областей складної форми відносяться до класу NP-складних і для їх вирішення використовуються, як правило, евристичні алгоритми [1]. Це пояснюється як складністю формалізації задач покриття, так і відсутністю ефективних методів для їх розв'язання.

Тільки кілька робіт присвячені побудові математичних моделей задачі покриття колами. В роботі [2] використовується математична модель задачі, побудована на основі діаграм Вороного. Однак метод, запропонований в [2], можна застосувати тільки до покриття багатокутників однаковими колами.

В [3] розглянуто підхід до покриття квадрата одиничними колами, заснований на теорії температурних розширень і стиснень стрижневих структур.

Основна ідея запропонованого в [4] алгоритму полягає в ітераційній побудові покриттів Діріхле-Вороного. Результати представлені лише для одиничного квадрата, і реалізація алгоритму істотно залежить від форми області, що покривається.

Для безперервної задачі оптимального покриття колами компактної множини в [5] запропоновано алгоритм, заснований на теорії оптимального розбиття множин і застосуванні алгоритму Шора.

В роботі [6] запропоновано чисельні методи побудови покриттів, що базуються на розбитті множини на області Діріхле і знаходженні так званих характерних точок.

В [7] приводиться математична модель задачі покриття багатокутної множини колами різних радіусів, при цьому радіуси й координати центрів кіл задаються за допомогою сплайнів для моделювання залежності радіуса від рельєфу місцевості.

З результатами аналізу можна зробити висновок, що переважна більшість робіт, що розглядають задачу кругового покриття, присвячені дослідженню евристичних методів розв'язку. Наявні аналітичні моделі і методи розв'язку мають, як правило, недоліки і обмежені областю застосування, що не дозволяє використовувати їх для побудови кругового покриття складних областей.

Таким чином, **метою роботи** є побудова адекватної узагальненої математичної моделі задачі покриття ідентичними колами довільної області, реалізації якої охоплюють основні задачі кругового покриття, що виникають на практиці.

## Виклад основного матеріалу

Нехай задана множина кіл  $C = \{C_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  і замкнута обмежена область  $\Omega \subset R^2$  із кусочно-гладкою межею, сформованою  $L$  фрагментами аналітично описаних кривих, причому гладкість межі порушується у точках  $p_k, k = 1, 2, \dots, K$ . Далі вважаємо, що  $C_i = C_i(u_i)$ , де  $(u_i) = (x_i, y_i)$  – змінні координати центру круга  $C_i$ . Об'єднання  $\Upsilon = \bigcup_{i=1}^n C_i(u_i)$

називається круговим покриттям області  $\Omega$ , якщо  $\Omega \subseteq \Upsilon$ .

Постановка **узагальненої задачі кругового покриття**: знайти покриття  $\Upsilon$  області  $\Omega$ , що задовольняє системі технологічних обмежень, які накладаються на вектор параметрів розміщення кіл, оптимальне відповідно до заданого критерію якості  $F(u), u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , де  $F(u)$  – гладка функція.

Сформуємо множину  $P$  точок  $p_k$ , у яких порушується гладкість меж  $\Omega$ .

Виключимо надалі з розгляду покриття, у яких є надлишкові кола. Надалі також вважаємо, що кривизна границі області в будь-якій її точці, крім точок з  $P$ , менше кривизни кіл з множини  $C$ . Для ділянок межі з порушенням цієї умови будується зовнішня апроксимація фрагментами кривих меншої кривизни.

Критерій повноти покриття може бути сформульований у вигляді: для того, щоб множина  $\Upsilon$  була невідродженим круговим покриттям множини  $\Omega$ , необхідно й достатньо, щоб [8]:

1) для кожної точки  $p_k \in P$  знайшлося хоча б одне коло  $C_i, i \in I_n$  таке, що  $p_k \in \text{int } C_i$ ;

2) для будь-якої точки  $t_{ik}^* \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } \Omega, i \in I_n, k \in \{1, 2\}$  знайшлося хоча б одне коло  $C_{j_k}, j \in I_n, i \neq j$ , таке, що  $t_{ik}^* \in \text{int } C_{j_k}$  й, відповідно, точка  $t_{ijk} \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j$  належить  $\Omega^* = R^2 \setminus \text{int } \Omega$ ;

3) для будь-якої точки  $t_{ijk} \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j, i, j \in I_n, i \neq j, t_{ijk} \in \text{int } \Omega, k \in \{1, 2\}$ , існує  $C_{s_k}, s \neq i, s \neq j$ , таке що,  $t_{ijk} \in \text{int } C_{s_k}$ .

Побудуємо індексні множини  $\Xi_1, \Xi_2$  та  $\Xi_3$ , елементами яких є усі двійки, трійки та четвірки індексів, що задовольняють відповідно першому, другому і третьому критерію повноти покриття  $\Upsilon$ .

При побудові математичної моделі виконання першого критерію забезпечується додаванням у систему обмежень задачі нерівностей виду  $\varphi^{p_k C_i} \geq 0$ ,

другого критерію – нерівностей виду  $\varphi^{t_{ik}^*} \geq 0$ , третього критерію – нерівностей виду  $\varphi^{t_{ijk}} \geq 0$ , де  $\varphi^{p_k C_i}, \varphi^{t_{ijk}}$  – функції належності, а  $\varphi^{t_{ik}^*}$ , залежно від виду області  $\Omega^*$ , може бути функцією належності або квазі-функцією належності [8].

Таким чином, **узагальнена математична модель задачі покриття** може бути записана у вигляді

$$\underset{u \in W \subset R^\delta}{extr} F(u), \quad (1)$$

$$W = \{u \in R^\delta : \varphi^{p_k C_i} \geq 0 \forall (i, k) \in \Xi_1,$$

$$\varphi^{t_{ijk}^*} \geq 0, \Phi_{-}^{C_i C_j} \geq 0 \forall (i, j, k) \in \Xi_2, \quad (2)$$

$$\varphi^{t_{ijk} C_{s_k}} \geq 0, \Phi_{-}^{C_i C_j} \geq 0 \forall (i, j, s, k) \in \Xi_3, \Psi \geq 0\},$$

де

$$\sigma = 2n + l;$$

$l$  – кількість додаткових змінних, що залежить від постановки задачі, обраних засобів моделювання відносин між геометричними об'єктами й виду технологічних обмежень задачі;

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n, t)$  – вектор змінних задачі;

$t$  – вектор додаткових змінних задачі;

$u_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$  – параметри розміщення  $i$ -го кола;

$\varphi^{p_k C_i}, \varphi^{t_{ijk} C_{s_k}}$  – функції належності;

$\varphi^{t_{ik}^*}$  – функції (або квазі-функції) належності (залежно від виду області  $\Omega$  й обраних засобів моделювання відносин між геометричними об'єктами);

$t_{ijk} = f(u_i, u_j, k), k \in \{1, 2\}$  – точка перетинання окружностей  $C_i$  і  $C_j$ ;

$f(u_i, u_j, k), k \in \{1, 2\}$  – функція, яка розраховує координати точок перетинання окружностей  $C_i$  і  $C_j$ ;

$\Phi_{-}^{C_i C_j} = 4r^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2$  – псевдонормалізована phi-функція, що формалізує умови розміщення пари кіл на максимально припустимій відстані  $\rho = 0$ ;

$\Psi(u)$  – система допоміжних обмежень (наприклад, умов належності центрів кіл області  $\Omega$ ).

Нижче виділені й досліджені важливі із практичної точки зору реалізації узагальненої моделі (1–2).

**Задача мінімізації довжини провідної мережі** виникає, наприклад, при оптимізації сенсорної мережі системи пожежної сигналізації. До моделі (1–2) вносяться наступні зміни:

1. У систему додаткових обмежень вносяться умови належності сенсорів області з урахуванням мінімально припустимих відстаней до границі області.

2. У систему додаткових обмежень вносяться умови неналежності центрів сенсорів областям заборони.

3. У систему додаткових обмежень задачі вносяться мінімально припустимі відстані між центрами сенсорів.

4. Функція цілі представляє собою довжину траси. Для кільцевого типу провідних з'єднань функція цілі може бути записана у вигляді

$$\rho(u_0, u_{m_1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho(u_{m_i}, u_{m_{i+1}}) + \rho(u_{m_n}, u_0), \quad \text{де}$$

$m_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  – номери кіл,  $m_i \neq m_j$ ,  $i \neq j$ ; доданок

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(u_{m_i}, u_{m_{i+1}}) – \text{сума відстаней між центрами кіл,}$$

узятих у певній послідовності  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ;

$\rho(u_0, u_{m_1})$  і  $\rho(u_{m_n}, u_0)$  – відстані від точки початку

траси  $u_0$  до центра першого й останнього в обраній послідовності кола відповідно. Для радіального типу провідних з'єднань функція цілі може бути предста-

$$\text{влена у вигляді } \sum_{q=1}^Q (\rho(u_0, u_{m_1^q}) + \sum_{i=1}^{n_q-1} \rho(u_{m_i^q}, u_{m_{i+1}^q})),$$

де  $Q$  – кількість шлейфів;  $m_i^q \in \{1, 2, \dots, n\}$  – номери

кіл,  $m_i^q \neq m_j^q$ ,  $i \neq j$ ,  $q = 1, 2, \dots, Q$ ,

$m_1^{q_1} \neq m_2^{q_2}, q_1 \neq q_2, q_1, q_2 = 1, 2, \dots, Q$ ,  $\sum_{q=1}^Q n_q = n$ ; до-

данок  $\sum_{i=1}^{n_q-1} \rho(u_{m_i^q}, u_{m_{i+1}^q})$  – сума відстаней між

центрами кіл, узятих у певній  $q$ -й послідовності

$m_1^q, m_2^q, \dots, m_{n_f}^q$ ;  $\rho(u_0, u_1^q)$  – відстань від точки поча-

тку траси  $u_0$  до центра першого в  $q$ -й послідовнос-

ті кола. Тут  $\rho(u_1, u_2)$  – відстань між точками  $u_1$  й

$u_2$ . Для пошуку послідовності кіл розв'язуються

допоміжні задачі дискретної оптимізації: задача комівояжера для кільцевого типу провідних з'єднань та задача маршрутизації для радіального типу провідних з'єднань, які виникають, наприклад, при проектуванні систем пожежної сигналізації з урахуванням технологічних вимог і вимог нормативних документів [9–10].

**Задача мінімізації радіуса кіл, що формують покриття** – одна з найвідоміших оптимізаційних задач для кругових покриттів і її розв'язанню присвячена значна кількість робіт у світовій літературі. У тому числі використовуються для підвищення надійності сенсорних покриттів. Оскільки реальний радіус сенсорних зони не змінюється, то після розв'язання задачі збільшується їх взаємне пере-

криття і таким чином розв'язується **задача оптимізації щільності покриття**. У модель виду (1–2) вноситься дуже проста зміна – радіус кіл  $r$  оголошується змінним, розмірність задачі збільшується на 1 і мінімізується функція  $F(u) = r$ .

**Задача корегування покриття** виникає при проектуванні сенсорних мереж у випадку, якщо необхідно виправити розміщення кіл, що не задовольняє критерію повноти покриття. Подібні ситуації можуть виникати при розв'язанні задачі формування покриття наближеними методами або в інтерактивному режимі. Позначимо через  $r_0$  радіус сенсорної зони. На першому етапі з малим наперед заданим кроком послідовно збільшується радіус покриваючих кіл доти, поки покриття не стане припустимим. Ця задача завжди має розв'язок, якщо у формуванні покриття бере участь хоча б одне коло. На другому етапі вирішуємо задачу мінімізації радіуса кіл при допоміжному обмеженні  $r \geq r_0$ . Якщо у результаті досягнуто глобальний мінімум задачі ( $r = r_0$ ), то побудовано припустиме покриття.

**Задача корегування неприпустимого розміщення сенсорів** виникає при розміщенні сенсорів в області, що отримана наближеними методами або в інтерактивному режимі. У математичну модель задачі виду (1–2) водиться додаткова змінна  $\lambda$ . При генерації системи технологічних обмежень на положення сенсорів в області визначається, чи виконуються додаткові обмеження задачі виду  $\psi(u) \geq 0$

для стартової точки  $u = u^0$ . Якщо виконуються, то вони включаються в систему обмежень задачі, у протилежному випадку в систему обмежень задачі включається обмеження виду  $\lambda \leq \psi(u)$ . Максимізується функція цілі  $F(u) = \lambda$  за умови  $\lambda \leq 0$ . Якщо додаткова змінна  $\lambda$  досягає 0, то отримана точка  $u^*$  є припустимою для вихідної задачі, оскільки всі обмеження у  $u^*$  виконуються.

**Задача мінімізації кількості кіл, що покривають область** має досить велику практичну значимість, тому що дуже часто виникає при оптимізації покриттів, побудованих наближеними методами або отриманих в інтерактивному режимі. У рамках даного дослідження розглядався наступний підхід: вибирається одне з кіл (випадково або оператором) і виконується спроба зменшення його радіуса до 0 зі збереженням покриття області. Якщо операція завершилася успішно, коло викреслюється з множини кіл, що формують покриття, і здійснюється перехід до оптимізації нового покриття. У протилежному випадку здійснюється спроба видалити інше коло з покриття. Процедура повторюється певне число раз.

**Дослідження властивостей побудованої моделі** показує, що задача (1–2) являє собою задачу негладкої оптимізації, бо функція  $\varphi^{t_{ijk}\Omega^*}$  в загальному випадку є мінімаксною, область припустимих розв'язків  $W$  у загальному випадку є незв'язною множиною, при цьому кожний компонент зв'язності  $W$  може бути багатозв'язним. Задача (1–2) нестійка, тобто яка завгодно мала зміна початкових даних може привести до значної зміни функції цілі.

Оскільки область  $W$  незв'язна і кожний компонент зв'язності може бути багатозв'язним, то задача (1–2) у загальному випадку є багатоекстремальною. За способом побудови область припустимих розв'язків  $W$  може бути представлена у вигляді

$$W = \bigcup_{k=1}^{\eta} W_k, \text{ де } W_k \text{ описується системою нерівностей}$$

теї з гладкими функціями, що дозволяє звести розв'язання задачі (1–2) до розв'язання набору задач нелінійного програмування виду

$$F(u) = \min\{F(u^{*1}), \dots, F(u^{*k}), \dots, F(u^{*\eta})\}, \quad (3)$$

$$F(u^{*k}) = \min_{u \in W_k \subset R^{\sigma}} F(u). \quad (4)$$

Кожна з  $\eta$  підзадач (4) у загальному випадку багатоекстремальна.

Пропонується **стратегія розв'язання задачі**, заснована на методі мультістарту, що є основним методом випадкового пошуку глобального екстремуму багатомірних функцій.

Нижче для прикладу наведена принципова схема пошуку локального мінімуму для оптимізаційної задачі побудови дротяної сенсорної мережі для системи пожежної сигналізації:

1. Генерується початкове покриття (одним з наближених методів чи у інтерактивному режимі).

2. Аналізуються повнота покриття області колами. Якщо умови покриття порушуються, то виконується перехід до кроку 3, інакше – перехід до кроку 4.

3. Будується припустиме покриття на основі неприпустимого шляхом збільшення радіуса кіл, що покривають область.

4. Генерується система обмежень і цільова функція задачі корекції неприпустимого покриття виду (1–2). Технологічні обмеження на даному етапі ігноруються. Цільова функція – мінімізація радіуса кіл, що покривають, до значення, заданого у вихідній постановці задачі.

5. Розв'язується задача, яка побудована на попередньому кроці. Якщо в результаті вдалося побудувати припустиме покриття, то побудована точка приймається в якості стартової й здійснюється перехід до кроку 6, інакше аварійне завершення роботи.

6. Аналізується виконання системи технологічних та інших обмежень. Якщо технологічні обмеження порушуються, перехід до кроку 7, інакше перехід до кроку 9.

7. Генерується система обмежень і цільова функція для задачі корекції порушення технологічних обмежень виду (1–2).

8. Розв'язується побудована на попередньому кроці задача. Якщо в результаті вдалося виправити порушення технологічних обмежень при збереженні допустимості покриття, то побудована точка приймається в якості стартової й здійснюється перехід до кроку 9, інакше аварійне завершення роботи.

9. Генерується система обмежень і цільова функція для однієї з оптимізаційних задач виду (1–2), описаних вище. Конкретний вид моделі визначається постановкою вихідної практичної задачі.

10. Вирішується побудована на попередньому кроці задача нелінійного програмування.

## Висновки

Задачі оптимального покриття областей довільної форми колами важко формалізуються і для їх вирішення відсутній єдиний підхід. Ситуація ускладнюється можливою наявністю технологічних обмежень на взаємне розташування кіл і положення кіл щодо області. Тому більшість методів, запропонованих в літературі для розв'язку задачі, є наближеними. Це призводить до втрати оптимальних і локально оптимальних рішень, в результаті чого знижується ефективність отриманих розв'язків. Доступні точні методи реалізовані для окремих випадків задачі. Запропоновані засоби формалізації умов покриття та побудована на їх основі узагальнена математична модель задачі покриття однаковими колами довільної області, реалізація якої охоплює основні задачі кругового покриття, що виникають на практиці, представляють безперечний практичний інтерес.

На базі побудованої математичної моделі запропоновано ефективну стратегію розв'язання задачі, засновану на поєднанні методі мультістарту з набором генераторів обмежень та цільових функцій для основних реалізацій узагальненої моделі.

## Список літератури

1. Wang B. Coverage problems in sensor networks: A survey / B. Wang // ACM Comput. Surv. – 2011. – 43. – P. 1-56.
2. Стоян Ю.Г. Покриття многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса / Ю.Г. Стоян, В.Н. Пацук // Доп. НАН України. – 2006. – Вип. 3. – С. 74-77.
3. Tarnai T. Covering a square by equal circles / T. Tarnai, Zs. Gaspar // Elem. Math. – 1995. – V. 50. – P. 167-170.

4. Бруссов В.С. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В.С. Бруссов, С.А. Пиявский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1971. – Вып. 2 (11). – С. 304-312.
5. Киселева Е.М. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Л.И. Лозовская, Е.В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – Вып. 3. – С. 98-117.
6. Ушаков В. Н. Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости  $R^2$  / В.Н. Ушаков, П.Д. Лебедев // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2016. – Вып. 3 (26). – С. 258-270.
7. The problem of covering the fields by the circles in the task of optimization of observation points for ground video monitoring systems of forest fires / V. Komyak, A. Pankratov, V. Patsuk, A. Prikhodko // An international quarterly journal – 2016. – No. 2 (5). – P. 133-138.
8. Antoshkin O. Construction of optimal wire sensor network for the area of complex shape / O. Antoshkin, A. Pankratov // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2016. – Вып. 6(4). – С. 45-53.
9. Системи протипожежного захисту: ДБН В.2.5–56–2014 [Чинний від 2015-07-01]. – К.: ДП “Укрархбудінформ”, 2014. – 127 с.
10. Системи пожежної сигналізації та оповіщення. Частина 14. Настанови щодо побудови, проектування, монтажування, введення в експлуатацію, експлуатування і технічного обслуговування (CEN/TS 54-14:2004, IDT): ДСТУ-Н CEN/TS 54-14:2009. [Чинний від 2010-01-01]. – К.: Держспоживстандарт України, 2009. – 68 с.

## References

1. Wang, B. (2011), Coverage problems in sensor networks: A survey, *ACM Comput. Surv.*, 43, pp. 1-56.
2. Stoyan, Yu.G. and Patcuk, B.H. (2006), “Pokrytie mnogougol'noj oblasti minimal'nym kolichestvom odinakovykh krugov zadannogo radiusa” [Covering a polygonal area with a minimum number of identical circles of a given radius], *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, No. 3, pp. 74-77.
3. Tarnai, T. and Gaspar, Zs. (1995), Covering a square by equal circles, *Elem. Math.*, Vol. 50, pp. 167-170.
4. Brusov, B.C. and Piyavskij, S.A. (1971), “Vychislitel'nyj algoritm optimal'nogo pokrytiya oblastej ploskosti” [Computational algorithm for optimal coverage of plane areas], *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, No. 2 (11), pp. 304-312.
5. Kiseleva, E.M., Lozovskaya, L.I. and Timoshenko, E.V. (2009), “Reshenie nepreryvnykh zadach optimal'nogo pokrytiya sharami s ispol'zovaniem teorii optimal'nogo razbieniya mnozhestv” [Solving continuous problems of optimal ball coverage using the theory of optimal partitioning of sets], *Cybernetics and Systems Analysis*, No. 3, pp. 98-117.
6. Ushakov, V.N. and Lebedev, P.D. (2016), “Algoritmy optimal'nogo pokrytiya mnozhestv na ploskosti  $R^2$ ” [Algorithms for optimal coverage of sets on the plane in  $R^2$ ], *Vestn. Udmurtsk. in-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki*, No. 3 (26), pp. 258-270.
7. Komyak, V., Pankratov, A., Patsuk, V. and Prikhodko, A. (2016), The problem of covering the fields by the circles in the task of optimization of observation points for ground video monitoring systems of forest fires, *An international quarterly journal*, No. 2 (5), pp. 133-138.
8. Antoshkin, O. and Pankratov, A. (2016), Construction of optimal wire sensor network for the area of complex shape, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, No. 6(4), pp. 45-53.
9. Ukrarhbudinform (2014), “Systemy protypozhezhnoho zakhystu: DBN V.2.5–56–2014, Chynnyi vid 2015-07-01” [Fire protection systems: DBN V.2.5-56-2014, Effective from 2015-07-01], Kyiv, 127 p.
10. Derzhspozhyvstandart of Ukraine (2009), “Systemy pozhezhnoi syhnalizatsii ta opovishchuvannia. Chastyna 14. Nastanovy shchodo pobudovy, proektuvannia, montuvannia, vvedennia v ekspluatatsiiu, ekspluatuvannia i tekhnichnoho obsluhovuvannia (CEN/TS 54-14:2004, IDT): DSTU-N CEN/TS 54-14:2009, Chynnyi vid 2010-01-01” [Fire alarm and warning systems. Part 14. Guidelines for the construction, design, installation, commissioning, operation and maintenance (CEN / TS 54-14: 2004, IDT): DSTU-N CEN / TS 54-14, Effective from 01/01/2010], Kyiv, 68 p.

Надійшла до редколегії 28.12.2018

Схвалена до друку 22.01.2019

### Відомості про авторів:

**Антошкін Олексій Анатолійович**

викладач

Національного університету цивільного захисту України,

Харків, Україна

<https://orcid.org/0000-0003-2481-2030>

### Information about the authors:

**Oleksiy Antoshkin**

Instructor of National University

of Civil Protection of Ukraine,

Kharkiv, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0003-2481-2030>

**Панкратов Олександр Вікторович**  
доктор технічних наук  
старший науковий співробітник Інституту проблем  
машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,  
Харків, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-2958-8923>

**Olexander Pankratov**  
Senior Research  
Senior Research Associate of A.N. Podgorny Institute  
for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine,  
Kharkiv, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-2958-8923>

## ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ ОБЛАСТИ ИДЕНТИЧНЫМИ КРУГАМИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

А.А. Антошкин, А.В. Панкратов

*Рассмотрена задача покрытия произвольной области идентичными кругами. На основе формализации критериев полноты покрытия построена математическая модель задачи кругового покрытия в виде задачи негладкой оптимизации. Область допустимых решений задачи описана системой неравенств, которая возникает при записи функций принадлежности для формирования условий покрытия и дополнительной системой неравенств для учета технологических ограничений, записывается с помощью  $\phi$ -функций. Негладкость модели возникает вследствие минимаксного характера некоторых  $\phi$ -функций и функций принадлежности. Разработаны средства генерации множества реализаций обобщенной математической модели покрытия для широкий класс прикладных задач. Предложена стратегия решения возникающих задач нелинейного программирования.*

**Ключевые слова:** круговое покрытие, критерий полноты,  $\phi$ -функции, функции принадлежности, математическая модель, нелинейная оптимизация.

## A GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF THE PROBLEMS OF COVERING THE AREA BY IDENTICAL CIRCLES AND ITS MAJOR IMPLEMENTATIONS

O. Antoshkin, O. Pankratov

*There is a rapidly growing interest in an effective solution to the problems of optimal coverage of regions of arbitrary shape by circles at the present stage. This is due to the variety of practical applications, the difficult formalizability of the conditions of the problem and the lack of a common approach for its solution. The situation is complicated by the presence of technological limitations on the mutual position of the circles and the position of the circles relative to the region. Most of the approaches proposed in the literature are heuristic for the reasons listed above. This leads to the loss of optimal and locally optimal solutions. The efficiency of solving the problem decreases as a result. The available exact approaches are implemented for particular cases of the problem. Thus, it seems relevant to build an adequate mathematical model of the problem of covering with identical circles of an arbitrary area, whose implementation covers the main tasks of a circular covering that arises in practice. The problem of covering an arbitrary region with identical circles is considered in the paper. A generalized mathematical model of the circular coverage problem is constructed in the form of a nonsmooth optimization problem based on the formalization of the criteria for completeness of the coverage. The feasible region of the problem is described by a system of inequalities consisting of two subsystems. The first of them occurs when writing membership functions for the formation of coating conditions. The second, an additional system of inequalities, serves to take into account technological constraints and is written using  $\phi$ -functions. The model is nonsmooth due to the minimax nature of some  $\phi$ -functions and membership functions. The tools for generating a set of implementations of a generalized mathematical model have been developed, covering a wide class of applied problems, including such problems: minimizing the length of wires; minimizing the radius of the circles; minimizing the number of laps; adjusting invalid coverage and adjusting invalid sensor placement. An effective strategy for solving the problem is proposed, based on the combination of the multi-start method with a set of constraint generators and objective functions for the basic implementations of the generalized model.*

**Keywords:** circular coverage, completeness criterion,  $\phi$ -functions, membership functions, mathematical model, nonlinear optimization.