

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ  
УКРАЇНИ**

**Мурін М.М., Бондаренко С.М., Антошкін О.А., Литвяк О.М.  
Дерев'янка О.А., Христич В.В.**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ  
СИСТЕМ БЕЗПЕКИ**

**Конспект лекцій**

**Харків 2019**

## ЗМІСТ

Вступ

Лекція №1 **Загальні відомості про математичне моделювання.**

Лекція № 2 **Особливості побудови математичних моделей.**

Лекція № 3 **Методи розв'язання задач нелінійного програмування**

Лекція № 4 **Марківські процеси та основні поняття планування експерименту.**

Лекція № 5 **Повнофакторний експеримент та дрібні репліки**

Лекція № 6 **Методи обробки результатів експериментів**

Лекція № 7 **Методи перебору та алгоритми побудови n-перестановок**

Лекція № 8 **Побудова сітьових графіків**

Лекція № 9 **Математичне моделювання та оптимізація систем пожежної сигналізації**

Лекція № 10 **Математичні методи визначення параметрів систем водяного та пінного пожежогасіння**

Лекція № 11 **Оптимізація вибору елементів систем водяного пожежогасіння**

Лекція № 12 **Математична модель розподілу обмежених ресурсів при виконанні монтажних робіт систем пожежної автоматики**

Лекція № 13 **Оптимізаційні методи рішення задач розподілу обмежених ресурсів**

## Вступ

Модель - ефективний засіб наукового пізнання. Вона приходить на допомогу досліднику тоді, коли досліджуваний об'єкт не може бути вивчений безпосередньо через громіздкість, віддаленість, в силу притаманних йому надмірно високих або низьких температур, тисків та ін.; в силу того, що безпосереднє вивчення може привести до порушення функціонування об'єкта або навіть до його руйнування. Гідність моделювання полягає також в тому, що воно дозволяє вивчати об'єкти, яких ще немає і які повинні бути створені. У цьому випадку спочатку будується модель, а потім, після того як вона успішно пройде теоретичну і експериментальну перевірку, на її основі створюється сам об'єкт.

До допомоги моделей вдаються в численних і різноманітних випадках. Їх основна функція - пізнавальна - не є єдиною. Наступні п'ять функцій стали вже звичними:

- 1) засіб осмислення дійсності;
- 2) засіб спілкування (креслення, схема);
- 3) засіб навчання і тренаж (тренажери льотчиків, космонавтів);
- 4) засіб прогнозування (наприклад, погоди);
- 5) засіб постановки експериментів не тільки фізичних, а й численних на ЕОМ.

## Лекція №1

### Загальні відомості про математичне моделювання.

1. Моделювання як інструмент дослідження об'єктів.
2. Класифікація моделей.
3. Форма і принципи побудови математичних моделей.

#### **Питання 1. Моделювання як інструмент дослідження об'єктів.**

Слово "Модель" походить від латинського *modus* (копія, образ, обрис). Моделювання - це заміщення деякого об'єкта А іншим об'єктом Б. Заміщений об'єкт А називається оригіналом чи об'єктом моделювання, а заміщаючий Б - моделлю. Іншими словами, модель - це об'єкт-замінник об'єкта-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу.

Метою моделювання є одержання, опрацювання, подання і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; а модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірності поведінки об'єкта.

Моделювання широко використовується в різних сферах людської діяльності, особливо в сферах проектування та управління, де особливими є процеси прийняття ефективних рішень на основі отриманої інформації.

Модель завжди будується з певною метою, яка надає вплив на те, які властивості об'єктивного явища виявляються суттєвими, а які - ні. Модель являє собою проекцію об'єктивної реальності під певним кутом зору. Іноді, в залежності від цілей, можна отримати ряд проекцій об'єктивної реальності, що вступають у протиріччя. Це характерно, як правило, для складних систем, у яких кожна проекція виділяє суттєве для певної мети з безлічі несуттєвого.

Теорією моделювання є розділ науки, що вивчає способи дослідження властивостей об'єктів-оригіналів, на основі заміщення їх іншими об'єктами-моделями. В основі теорії моделювання лежить теорія подібності. При моделюванні абсолютна подібність не має місця і лише прагне до того, щоб модель досить добре відображала досліджувану сторону функціонування об'єкта. Абсолютна подібність може мати місце лише при заміні одного об'єкта іншим точно таким же.

Під *моделлю* будемо розуміти певний матеріальний чи подумки представлений об'єкт, який у процесі дослідження заміщає об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про об'єкт-оригінал. Для одного і того ж об'єкта можуть існувати різні моделі, класи моделей, які відповідають різним цілям його вивчення.

#### **Питання 2. Класифікація моделей**

У загальному випадку всі моделі, незалежно від областей і сфер їх застосування, бувають трьох типів: пізнавальні, прагматичні і інструментальні.

**Пізнавальна модель** - форма організації і представлення знань, засіб з'єднання нових і старих знань. Пізнавальна модель зазвичай підганяється під реальність і є теоретичною моделлю.

**Прагматична модель** - засіб організації практичних дій, робочого уявлення цілей системи для її управління. Реальність в них підганяється під певну прагматичну модель. Це, як правило, прикладні моделі.

**Інструментальна модель** - засіб побудови, дослідження і використання прагматичних або пізнавальних моделей.

Пізнавальні відображають існуючі, а прагматичні - хоч і не існуючі, але бажані і, можливо, виконані відносини і зв'язку.

Вся інша класифікація моделей вибудовується по відношенню до об'єкта-оригіналу, методам вивчення і т.п.

**Класифікація моделей за ступенем абстрагування моделі від оригіналу.**

За ступенем абстрагування від оригіналу моделі можуть бути розділені на матеріальні (фізичні) і ідеальні. До матеріальних належать такі способи, при яких дослідження ведеться на основі моделі, що відтворює основні геометричні, фізичні, динамічні і функціональні характеристики досліджуваного об'єкта. Основними різновидами фізичних моделей є:

- натурні;
- квазінатурні;
- масштабні;
- аналогові.

**Натурні** - це реальні досліджувані системи, які є макетами та досвідченими зразками. Натурні моделі мають повну адекватність з системою-оригіналом, що забезпечує високу точність і достовірність результатів моделювання; іншими словами, модель натурна, якщо вона є матеріальна копія об'єкта моделювання.

**Квазінатурне** (від лат. «Квазі» - майже) - це сукупність натурних і математичних моделей. Цей вид моделей використовується у випадках, коли математична модель частини системи не є задовільною або коли частина системи повинна бути досліджена у взаємодії з іншими частинами, але їх ще не існує або їх включення в модель ускладнено або дорого.

**Масштабні моделі** - це системи тієї ж фізичної природи, що і оригінал, але відрізняються від нього розмірами. В основі масштабних моделей лежить математичний апарат теорії подібності, який передбачає дотримання геометричної подоби оригіналу і моделі і відповідних масштабів для їх параметрів. Прикладом масштабного моделювання є будь-які розробки макетів будинків, а часом і цілих районів, при проведенні проектних робіт при будівництві. Також масштабне моделювання використовується при проектуванні великих об'єктів в літакобудуванні і суднобудуванні.

**Аналогове моделювання** ґрунтується на аналогії процесів і явищ, мають різну фізичну природу, але однаково описуваних формально (одними і тими ж математичними рівняннями, логічними схемами і т.п.). Як аналогових

моделей використовуються механічні, гідравлічні, пневматичні системи, але найбільш широке застосування отримали електричні та електронні аналогові моделі, в яких сила струму або напругу є аналогами фізичних величин має іншу природу.

**Ідеальне моделювання** носить теоретичний характер. Розрізняють два типи ідеального моделювання: інтуїтивне і знакова.

Під **інтуїтивним** будемо розуміти моделювання, засноване на інтуїтивному уявленні про об'єкт дослідження, що не піддається формалізації або не є потрібним. У цьому сенсі, наприклад, життєвий досвід кожної людини може вважатися його інтуїтивною моделлю навколишнього світу.

**Знаковим** називається моделювання, що використовує в якості моделей знакові перетворення різного виду: схеми, графіки, креслення, формули, набори символів і т.п., що включають сукупність законів, за якими можна оперувати з вибраними знаковими елементами. Знакова модель може ділитися на лінгвістичну, візуальну, графічну і математичну моделі.

**Модель лінгвістична**, якщо вона представлена деякими лінгвістичним об'єктом, формалізованою мовною системою або структурою. Іноді такі моделі називають вербальними.

**Модель візуальна**, якщо вона дозволяє візуалізувати відносини і зв'язку модельованої системи, особливо в динаміці. Наприклад, на екрані комп'ютера часто користуються візуальною моделлю об'єктів, клавіатури в програмі-тренажері з навчання роботі на клавіатурі.

**Модель графічна**, якщо вона представлена геометричними образами і об'єктами.

Найважливішим видом знакового моделювання є математичне моделювання, класичним прикладом математичного моделювання є опис і дослідження основних законів механіки І. Ньютона засобами математики.

Математичні моделі класифікуються за:

- приналежності до ієрархічного рівня;
- характером відображуваних властивостей об'єкта;
- способом подання властивостей об'єкта;
- способу отримання моделі;
- формою подання властивостей об'єкта;
- змістом імовірнісних компонентів.

За належністю до ієрархічним рівнем математичні моделі діляться на моделі мікрорівня, макрорівня, метауровня.

Математичні моделі на мікрорівні процесу відображають фізичні процеси, що протікають, наприклад, в напівпровідникових приладах. Вони описують процеси на рівні переходу (проходу).

Математичні моделі на макрорівні процесу описують технологічні процеси.

Математичні моделі на метауровне процесу описують технологічні системи (ділянки, цехи, підприємство в цілому).

За характером відображуваних властивостей об'єкта моделі можна класифікувати на структурні і функціональні.

Модель структурна, якщо вона представлена структурою даних або структурами даних і відносинами між ними; наприклад, структурною моделлю може служити опис (табличне, графові, функціональне або інше) трофічної структури екосистеми.

У наведеній класифікації деякі моделі мають подвійне тлумачення (наприклад - аналогові). Всі моделі, крім натурних, можна об'єднати в один клас уявних моделей, тому що вони є продуктом абстрактного мислення людини.

### **Питання 3. Форма і принципи побудови математичних моделей.**

Зупинимося на одному з найбільш універсальних видів моделювання - математичному, які ставлять у відповідність моделюваному фізичному процесу систему математичних співвідношень, рішення якої дозволяє отримати відповідь на питання про поведінку об'єкта без створення фізичної моделі, часто опиняються дорогою і неефективною.

Математичне моделювання - це засіб вивчення реального об'єкта, процесу або системи шляхом їх заміни математичною моделлю, більш зручною для експериментального дослідження за допомогою ЕОМ.

Математична модель є наближенням представленням реальних об'єктів, процесів або систем, вираженим в математичних термінах і зберігає суттєві риси оригіналу.

*Математичною моделлю* будемо називати сукупність понять і відносин, виражених за допомогою системи математичних символів і позначень, які відображають найбільш істотні (характерні) властивості досліджуваного об'єкта (системи).

Застосування математичних методів при вивченні реально існуючих або мислимих систем буде ефективним, якщо властивості математичної моделі задовольняють вимогам. Розглянемо основні з цих властивостей [1,2].

*Повнота математичної* моделі дозволяє відобразити в достатній мірі саме ті характеристики і особливості системи, які цікавлять нас з точки зору поставленої мети проведення моделювання. Наприклад, модель може досить повно описувати протікають в системі процеси, але не відобразити її габаритні, масові та вартісні характеристики.

*Точність математичної* моделі дає можливість забезпечити прийнятне збіг реальних і знайдених за допомогою математичної моделі значень вихідних змінних систем, складаючих вектор

$$Y = y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Нехай  $y_i^M$  та  $y_i^P$  - знайдене за допомогою математичної моделі і реальне значення  $i$ -й вихідної змінної. Тоді відносна похибка математичної моделі по відношенню до цієї змінної при одних і тих же значеннях вхідних змінних буде визначатися співвідношенням:

$$\varepsilon_i = \frac{|y_i^M - y_i^P|}{y_i^P}, \quad i = \overline{1, n}.$$

У якості скалярної оцінки вектора похибки моделі  $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  можна прийняти будь-яку його норму, наприклад:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad \text{або} \quad \varepsilon = \max_i |\varepsilon_i|.$$

Для моделей, призначених для приблизних розрахунків, задовільною вважається точність 10-15%, а для моделей, призначених для використання в керуючих і контролюючих системах, задовільною вважається точність 1-2%.

**Адекватність математичної моделі** відображає ступінь відповідності результатів, отриманих за розробленою моделлю, даними експерименту або тестового завдання. Якщо система, для якої розробляється модель, існує, то порівнюють вихідні дані моделі і цієї системи. У тому випадку, коли два набори даних виявляються подібними, модель існуючої системи вважається адекватною. Чим більше спільного між існуючою системою і її моделлю, тим більше впевненість у правильності моделі системи.

При цьому адекватність математичної моделі залежить від мети моделювання і прийнятих критеріїв. Перевірка адекватності моделі необхідна для того, щоб переконатися в справедливості сукупності гіпотез, сформульованих на першому етапі розробки моделі, і точності отриманих результатів, необхідних технічного завдання.

**Економічність математичної моделі** оцінюють витратами на обчислювальні ресурси, необхідні для проведення обчислювального експерименту з математичною моделлю на комп'ютері.

Очевидно, що вимоги до економічності, точності та адекватності математичної моделі суперечливі і на практиці можуть бути задоволені лише на основі розумного компромісу.

**Робастність математичної моделі** характеризується її стійкістю по відношенню до погрешностей вихідних даних, здатність нівелювати ці похибки і не допускати їх надмірного впливу на результат обчислювального експерименту.

**Продуктивність математичної моделі** пов'язана з можливістю розташовувати досить достовірними даними. Якщо вони є результатами вимірювань, то точність їх вимірів не повинна бути нижче, ніж для тих змінних, які виходять при використанні математичної моделі. В іншому випадку математична модель буде не продуктивною і її застосування для аналізу конкретної системи втрачає сенс.



Математичні моделі в кількісній формі, за допомогою логіко-математичних конструкцій, описують основні властивості об'єкта, процесу або системи, його параметри, внутрішні та зовнішні зв'язки.

У загальному випадку математична модель реального об'єкта, процесу або системи представляється у вигляді системи функціоналів

$$\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0,$$

де  $X$  – вектор вхідних змінних,  $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]^t$ ,

$Y$  – вектор вихідних змінних,  $Y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_N]^t$ ,

$Z$  – вектор зовнішніх впливів,  $Z = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_N]^t$ ,

$t$  - координата часу.

Побудова *математичної моделі* полягає у визначенні зв'язків між тими чи іншими процесами і явищами, створення математичного апарату, що дозволяє висловити кількісно і якісно зв'язок між тими чи іншими процесами і явищами, між важливими фахівця фізичними величинами, і факторами, що впливають на кінцевий результат.

Зазвичай їх виявляється настільки багато, що ввести в модель всю їх сукупність не вдається.

При побудові математичної моделі перед дослідженням виникає завдання виявити і виключити з розгляду фактори, несуттєво впливають на кінцевий результат (математична модель зазвичай включає значно менше число факторів, ніж в реальній дійсності). На основі даних експерименту висувуються гіпотези про зв'язок між величинами, що виражають кінцевий результат, і факторами, введеними в математичну модель. Такий зв'язок найчастіше виражається системами диференціальних рівнянь в приватних похідних (наприклад, в задачах механіки твердого тіла, рідини і газу, теорії фільтрації, теплопровідності, теорії електростатичного та електродинамічного полів).

Кінцевою метою цього етапу є формулювання математичної задачі, рішення якої з необхідною точністю виражає результати, що цікавлять фахівця.

Форма і принципи подання математичної моделі залежить від багатьох факторів.

За принципам побудови математичні моделі поділяють на:

1. аналітичні;
2. імітаційні.

В *аналітичних моделях* процеси функціонування реальних об'єктів, процесів або систем записуються у вигляді явних функціональних залежностей.

Аналітична модель розділяється на типи в залежності від математичної проблеми:

1. рівняння (алгебраїчні, трансцендентні, диференціальні, інтегральні), апроксимаційні завдання (інтерполяція, екстраполяція, чисельне інтегрування і диференціювання),
2. задачі оптимізації,
3. стохастичні проблеми.

Однак по міру ускладнення об'єкта моделювання побудова аналітичної моделі перетворюється в важковирішувану проблему. Тоді дослідник змушений використовувати імітаційне моделювання.

В *імітаційному моделюванні* функціонування об'єктів, процесів або систем описується набором алгоритмів. Алгоритми імітують реальні елементарні явища, що становлять процес або систему зі збереженням їх логічної структури і послідовності протікання в часі. Імітаційне моделювання дозволяє по вихідним даним отримати відомості про стани процесу або системи в певні моменти часу, проте прогнозування поведінки об'єктів, процесів або систем тут важко. Можна сказати що імітаційні моделі - це що проводяться на ЕОМ обчислювальні експерименти з математичними моделями, що імітують поведінку реальних об'єктів, процесів або систем.

Залежно від характеру досліджуваних реальних процесів і систем математичні моделі можуть бути:

1. детерміновані,
2. стохастичні.

У *детермінованих моделях* передбачається відсутність будь-яких випадкових впливів, елементи моделі (змінні, математичні зв'язку) досить точно встановлені, поведінка системи можна точно визначити.

При побудові детермінованих моделей найчастіше використовуються алгебраїчні рівняння, інтегральні рівняння, матрична алгебра.

*Стохастична модель* враховує випадковий характер процесів в досліджуваних об'єктах і системах, який описується методами теорії ймовірності та математичної статистики.

По виду вхідної інформації моделі поділяються на:

1. безперервні,
2. дискретні.

Якщо інформація і параметри є безперервними, а математичні зв'язку стійкі, то модель - безперервна. І навпаки, якщо інформація і параметри - дискретні, а зв'язки нестійкі, то і математична модель - дискретна.

За поведінки моделей в часі вони поділяються на:

1. статичні,
2. динамічні.

Статичні моделі описують поведінку об'єкта, процесу або системи в будь-який момент часу.

Динамічні моделі відображають поведінку об'єкта, процесу або системи в часі.

За ступенню відповідності між математичною моделлю і реальним об'єктом, процесом або системою математичні моделі поділяють на:

1. Ізоморфні (однакові за формою),
2. Гомоморфні (різні за формою).

Модель називається ізоморфною, якщо між нею і реальним об'єктом, процесом або системою існує повне поелементна відповідність.

Гомоморфною - якщо існує відповідність лише між найбільш значними складовими частинами об'єкта і моделі.

Надалі для короткого визначення виду *математичної моделі* в наведеної класифікації будемо користуватися наступними позначеннями:

Перша буква:

Д - детермінована,

З - стохастична.

Друга літера:

Н - безперервна,

Д - дискретна.

Третя буква:

А - аналітична,

І - імітаційна.

**Висновки:** на лекції були розглянуті питання щодо загальних понять математичного моделювання. Наведена класифікація математичних моделей у подальшому дозволить визначати форму і принципи подання математичної моделі.

## Лекція № 2

### Особливості побудови математичних моделей.

1. Етапи розробки моделі
2. Модельний час.
3. Типові математичні схеми моделювання.

#### 1. Етапи розробки моделі

Процес моделювання має ітераційний характер, проводиться в рамках раніше сформульованих цілей і з дотриманням меж моделювання. Побудова починається з вивчення (обстеження) реальної системи, її внутрішньої структури і змісту взаємозв'язків між її елементами, а також зовнішніх впливів, і завершується розробкою моделі.

Моделювання - від постановки завдання до отримання результатів - проходить наступні етапи.

#### ***Етап I. Аналіз вимог і проектування.***

Даний етап включає:

1. Постановку і аналіз завдання і цілі моделювання.
2. Збір і аналіз вихідної інформації про об'єкт моделювання.
3. Побудова концептуальної моделі.
4. Перевірку достовірності концептуальної моделі.

#### ***Етап II. Розробка моделі, включає:***

1. Вибір середовища моделювання.
2. Складання логічної моделі.
3. Призначення властивостей модулів моделі.
4. Завдання модельного часу.
5. Верифікація моделі.

#### ***Етап III. Проведення експерименту, включає:***

1. Запуск моделі, прогін моделі.
2. Варіювання параметрів моделі і збір статистики.
3. Аналіз результатів моделювання.

Заключний етап - підведення підсумків моделювання відповідно до поставленої мети і завдання моделювання.

Схема етапів моделювання представлена на рис. 1.1.

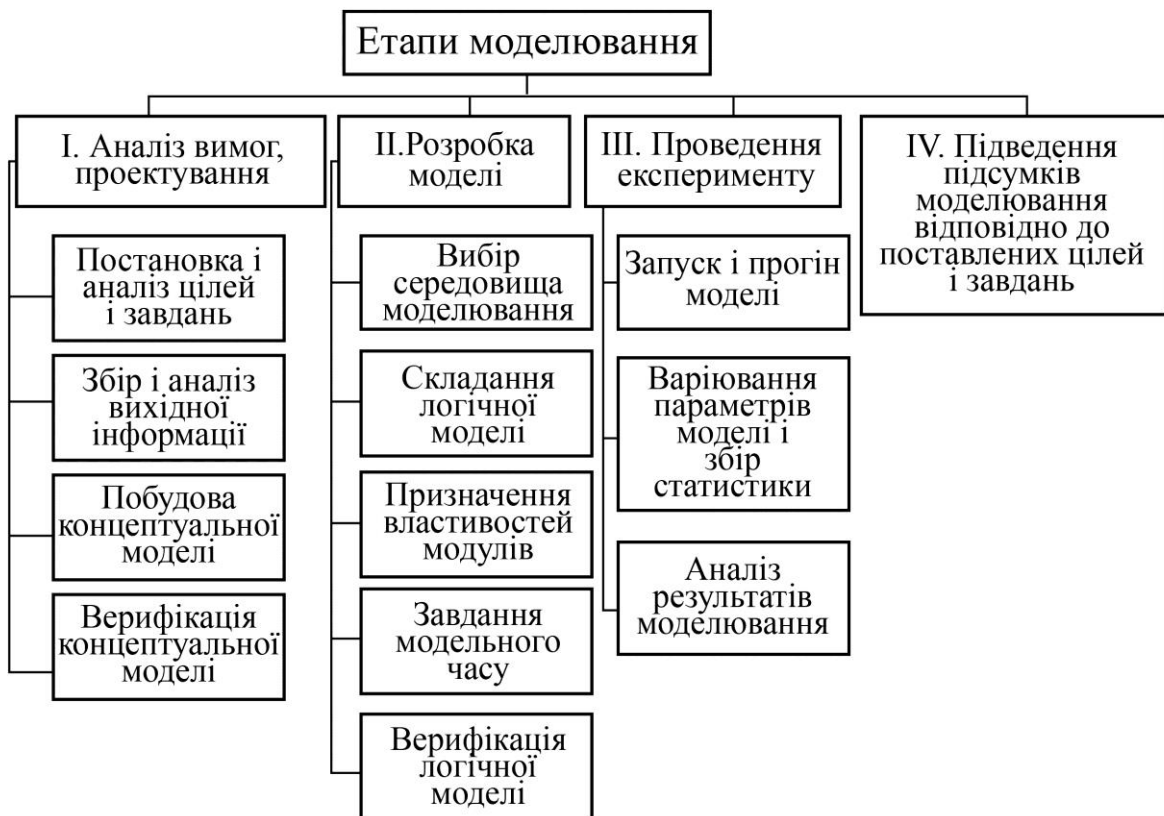


рис. 1.1. Схема етапів моделювання

При розробці конкретних моделей з певними цілями і кордонами моделювання необов'язково все підетапи повинні виконуватися.

На першому етапі моделювання формулюється концептуальна модель, будується її формальна схема і вирішується питання про ефективність і доцільність моделювання системи.

Концептуальна модель (КМ) - це абстрактна модель, яка визначає склад і структуру системи, властивості елементів і причинно-наслідкові зв'язки, властиві аналізованій системі і суттєві для досягнення цілей моделювання. У таких моделях зазвичай в словесній формі наводяться відомості про природу і параметрах (характеристиках) елементарних явищ досліджуваної системи, про вид і ступеня взаємодії між ними, про місце і значення кожного елементарного явища в загальному процесі функціонування системи. При створенні КМ практично паралельно формується область вихідних даних (інформаційний простір системи) - етап підготовки вихідних даних. На даному етапі виявляються кількісні характеристики (параметри) функціонування системи і її елементів, чисельні значення яких складуть вихідні дані для моделювання. Очевидно, що значна частина параметрів системи - це випадкові величини, тому особливе значення при формуванні вихідних даних мають вибір законів розподілу випадкових величин, апроксимація функцій і т.д. В результаті виявлення

властивостей моделі та побудови концептуальної моделі необхідно перевірити адекватність моделі.

На другому етапі моделювання відбувається уточнення або вибір програмного пакета моделювання. Вибір засобів моделювання: програмні і технічні засоби вибираються з урахуванням ряду критеріїв. Неодмінна умова при цьому - достатність і повнота засобів для реалізації концептуальної моделі. Серед інших критеріїв можна назвати доступність, простоту і легкість освоєння, швидкість і коректність створення програмної моделі.

Після вибору середовища проектування концептуальна модель, сформульована на попередньому етапі, втілюється в комп'ютерну модель, тобто вирішується проблема алгоритмізації і деталізації моделі.

Модель системи представляється у вигляді сукупності частин (елементів, підсистем). У цю сукупність включаються всі частини, які забезпечують збереження цілісності системи, з одного боку, а, з іншого, - досягнення поставлених цілей моделювання (отримання необхідної точності і достовірності результатів при проведенні комп'ютерних експериментів над моделлю). Надалі проводиться остаточна деталізація, локалізація (виділення системи з навколишнього середовища), структуризація (вказівка і загальний опис зв'язків між виділеними елементами системи), укрупненне опис динаміки функціонування системи і її можливих станів.

На етапі вибору математичної моделі встановлюються: лінійність і нелінійність об'єкта, процесу або системи, динамічність або статичність, стаціонарність або нестаціонарність, а також ступінь детермінованості досліджуваного об'єкта або процесу. При математичному моделюванні свідомо відволікаються від конкретної фізичної природи об'єктів, процесів або систем і, в основному, зосереджуються на вивченні кількісних залежностей між величинами, що описують ці процеси.

Математична модель ніколи не буває повністю тотожна даного об'єкту, процесу або системі. Заснована на спрощенні, ідеалізації, вона є наближеним описом об'єкта. Тому результати, отримані при аналізі моделі, носять наближений характер. Їх точність визначається ступенем адекватності (відповідності) моделі і об'єкта.

Побудова математичної моделі зазвичай починається з побудови та аналізу найпростішої, найбільш грубої математичної моделі розглянутого об'єкта, процесу або системи. Надалі, в разі необхідності, модель уточнюється, робиться її відповідність об'єкту повнішим.

Візьмемо простий приклад. Потрібно визначити площу поверхні письмового столу. Зазвичай для цього вимірюють його довжину і ширину, а потім перемножують отримані числа. Така елементарна процедура фактично позначає наступне: реальний об'єкт (поверхня столу) замінюється абстрактною математичною моделлю - прямокутником. Прямокутнику приписуються розміри, отримані в результаті вимірювання довжини і ширини поверхні столу, і площа такого прямокутника наближено приймається за шукану площу столу.

Однак модель прямокутника для письмового столу - це найпростіша, найбільш груба модель. При більш серйозному підході до задачі перш, ніж скористатися для визначення площі столу моделлю прямокутника, цю модель потрібно перевірити. Перевірки можна здійснити в такий спосіб: виміряти довжини протилежних сторін столу, а також довжини його діагоналей і порівняти їх між собою. Якщо, з необхідним ступенем точності, довжини протилежних сторін і довжини діагоналей попарно рівні між собою, то поверхню столу дійсно можна розглядати як прямокутник. В іншому випадку модель прямокутника доведеться відкинути і замінити моделлю чотирикутника загального вигляду. При більш високій вимозі до точності може виникнути необхідність піти в уточненні моделі ще далі, наприклад, врахувати закруглення кутів столу.

За допомогою цього простого прикладу було показано, що математична модель не визначається однозначно досліджуваним об'єктом, процесом або системою. Для одного і того ж столу ми можемо прийняти або модель прямокутника, або складнішу модель чотирикутника загального вигляду, або чотирикутника із закругленими кутами. Вибір тієї чи іншої моделі визначається вимогою точності. З підвищенням точності модель доводиться ускладнювати, враховуючи нові і нові особливості досліджуваного об'єкта, процесу або системи.

Виходячи з того, що математичне моделювання застосовується для дослідження, оптимізації та проектування реальних технологічних об'єктів (систем), можна виділити наступні етапи цього процесу:

- 1) визначення об'єкта - встановлення меж, обмежень і вимірників ефективності функціонування об'єкта;
- 2) формалізацію об'єкта (побудова моделі) - перехід від реального об'єкта до деякої логічної схемою (абстрагування);
- 3) підготовку даних - відбір даних, необхідних для побудови моделі, і подання їх у відповідній формі;
- 4) розробку моделює алгоритму і програми ЕОМ;
- 5) оцінку адекватності - підвищення до прийняттого рівня ступеня впевненості, з якою можна судити щодо коректності висновків про реальний об'єкт, отриманих на підставі звернення до моделі;
- 6) стратегічне планування - планування обчислювального експерименту, який повинен дати необхідну інформацію;
- 7) тактичне планування - визначення способу проведення кожної серії випробувань, передбачених планом експерименту;
- 8) експериментування - процес здійснення імітації з метою отримання бажаних даних і аналізу чутливості;
- 9) інтерпретацію - побудова висновків за даними, отриманим шляхом імітації;
- 10) реалізацію - практичне використання моделі та результатів моделювання;
- 11) документування - реєстрація ходу здійснення процесу математичного моделювання та його результатів, а також документування

цього процесу. Перераховані етапи математичного моделювання визначено в припущенні, що сформульована задача може бути вирішена щонайкраще саме цим методом.

Сукупність понять і відносин, виражених за допомогою системи математичних символів і позначень і відображають найбільш істотні (характерні) властивості досліджуваного об'єкта, називають математичною моделлю цього об'єкта.

Адекватність ММ - це здатність ММ відображати вихідні змінні ТО з відносною похибкою не більше деякого заданого значення  $d$ .

Економічність ММ оцінюють витратами на обчислювальні ресурси (машинний час і пам'ять), необхідні для проведення обчислювального експерименту з ММ на ЕОМ.

Робастність ММ характеризує її стійкість по відношенню до погрешностей вихідних даних, здатність нівелювати ці похибки і не допускати їх надмірного впливу на результат обчислювального експерименту.

Продуктивність ММ пов'язана з можливістю розташовувати досить достовірними вихідними даними.

Структурні ММ ділять на топологічні і геометричні, складові два рівня ієрархії ММ цього типу. Перші відображають склад ТО і зв'язку між його елементами. Топологічну ММ доцільно застосовувати на початковій стадії дослідження складного за структурою ТО, що складається з великого числа елементів, перш за все для з'ясування і уточнення їх взаємозв'язку. Такі ММ мають форму графів, таблиць, матриць, списків і т.п.; її побудови звичайно передуює розробка структурної схеми ТО. Геометричні ММ додатково до інформації, представленій в топологічній ММ, містять відомості про форму та розміри ТО і його елементів, про їх взаємне розташування. Геометричні моделі знаходять застосування при проектуванні ТО, розробці технічної документації та технологічних процесів виготовлення його елементів (наприклад, на верстатах з числовим програмним управлінням).

Сформулюємо тепер конкретні критерії, яким повинна задовольняти «хороша» модель. Така модель повинна бути:

- 1) простою і зрозумілою користувачеві;
- 2) цілеспрямованою;
- 3) надійною в сенсі гарантії від абсурдних відповідей;
- 4) зручною в управлінні і обігу;
- 5) повної з точки зору можливостей вирішення поставлених завдань;
- 6) адаптивної, тобто що дозволяє легко переходити до інших модифікацій або оновлювати дані;

7) допускає поступові зміни в тому сенсі, що будучи спочатку простою, вона може у взаємодії з користувачем ставати все більш складною і точною.



## 2. Модельний час.

Введемо поняття модельного часу. У комп'ютерній моделі змінна, що забезпечує поточне значення модельного часу, називається годинами модельного часу.

Існує два основні підходи до просування модельного часу:

- просування часу від події до події;
- просування часу з постійним кроком.

Підхід, який використовує просування часу в моделі від події до події, застосовується всіма основними комп'ютерними програмами і більшістю розробників, що створюють свої моделі на універсальних мовах (рис. 2).

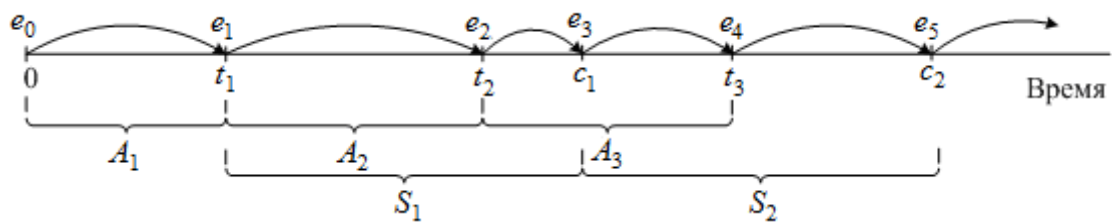


рис. 2. Механізм просування модельного часу від події до події

При використанні просування часу від події до події годинник модельного часу в початковому стані встановлюються в 0, і визначається час виникнення майбутніх подій. Після цього годинник модельного часу переходять на час виникнення найближчого події, і в цей момент оновлюються стан системи, з урахуванням події, що сталася, а також відомості про час виникнення майбутніх подій. Потім годинник модельного часу просуваються до часу виникнення наступного нового найближчого події, оновлюється стан системи і визначається час майбутніх подій і т.д. Процес просування модельного часу від часу виникнення однієї події до часу виникнення іншого триває до тих пір, поки не буде виконано будь-яка умова зупинки, вказане заздалегідь. Оскільки в дискретно-подієвої імітаційної моделі всі зміни відбуваються тільки під час виникнення подій, періоди бездіяльності системи просто пропускаються, і годинник переводиться з часу виникнення однієї події на час виникнення іншого. При просуванні часу з постійним кроком такі періоди бездіяльності не пропускаються, що призводить до великих витрат комп'ютерного часу. Слід зазначити, що тривалість інтервалу просування модельного часу від однієї події до іншої може бути різною [1].

При просуванні часу з постійним кроком  $\Delta t$  годинник модельного часу просуваються точно на  $\Delta t$  одиниць часу для будь-якого відповідного вибору значення  $\Delta t$ . Після кожного оновлення годин виконується перевірка, щоб визначити, відбулися які-небудь події протягом попереднього інтервалу часу  $t$  чи ні. Якщо на цей інтервал заплановані одне або кілька подій, вважається, що дані події відбуваються в кінці інтервалу, після чого стан системи і статистичні лічильники відповідним чином оновлюються.

Просування часу за допомогою постійного кроку показано на рис.3, де вигнуті стрілки показують просування годин модельного часу, а  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) – це дійсне час виникнення події і будь-якого типу, а не значення годин модельного часу. На інтервалі  $0, \Delta t$  подія відбувається в момент часу  $e_1$ , але воно розглядається як те, що сталося в момент часу  $\Delta t$ . На інтервалі  $\Delta t, 2\Delta t$  події не відбуваються, але все ж модель виконує перевірку, щоб переконатися в цьому. На інтервалі  $2\Delta t, 3\Delta t$  події відбуваються в моменти часу  $e_2$  і  $e_3$ , проте вважається, що вони відбулися в момент часу  $3\Delta t$  і т.д.

У ситуаціях, коли прийнято вважати, що два або кілька подій відбуваються в один і той же час, необхідне застосування ряду правил, що дозволяють визначати, в якому порядку обробляти події.

Таким чином, просування часу за допомогою постійного кроку має два недоліки: виникнення помилок, пов'язаних з обробкою подій в кінці інтервалу, протягом якого вони відбуваються, а також необхідність вирішувати, яка подія обробляти першим, якщо події, в дійсності відбуваються в різний час, розглядаються як одночасні.

Подібного роду проблеми можна частково вирішити, зробивши інтервали  $t$  менш тривалими, але тоді зростає число перевірок виникнення подій, що призводить до збільшення часу виконання завдання. Беручи до уваги цю обставину, просування часу за допомогою постійного кроку не використовують в дискретно-подієвих імітаційних моделях, коли інтервали часу між послідовними подіями можуть значно відрізнятись за своєю тривалістю [1]

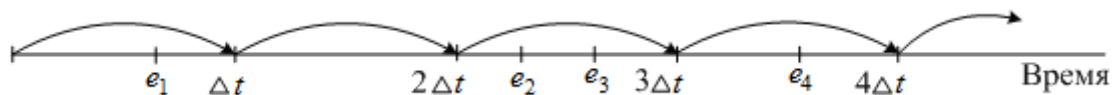


Рис.3. Приклад просування модельного часу за допомогою постійного кроку

В основному цей підхід призначений для систем, в яких можна допустити, що всі події в дійсності відбуваються в один з моментів  $n$  часу  $t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) для відповідно обраного  $t$ . Слід зауважити, що просування часу за допомогою постійного кроку може бути виконано за допомогою механізму просування часу від події до події, якщо планувати час виникнення подій через  $t$  одиниць часу, тобто даний підхід є різновидом механізму просування часу від події до події.

Третій етап є вирішальним, на якому, завдяки процесу імітації модельованої системи, відбувається збір необхідної інформації, її статистичної обробки в інтерпретації результатів моделювання, в результаті чого приймається рішення: або дослідження буде продовжено, або закінчено. Якщо відомий результат, то можна порівняти його з отриманим результатом моделювання. Отримані висновки часто сприяють проведенню додаткової серії експериментів, а іноді і зміни моделі.

Основою для вироблення рішення є результати тестування і експериментів. Якщо результати не відповідають цілям моделювання

(реальному об'єкту або процесу), значить допущені помилки на попередніх етапах або вхідні дані не є кращими параметрами у досліджуваній області, тому розробник повертається до одного з попередніх етапів.

На заключному етапі моделювання проводять оцінку виконаної роботи, зіставляють поставлені цілі з отриманими результатами і створюють остаточний звіт про виконану роботу.

### **3. Типові математичні схеми моделювання.**

У процесі створення математичної моделі, яка реалізується на комп'ютері, відбувається перехід від змістовного опису до формального алгоритму. Проміжною ланкою між ними може служити математична схема.

Існує ряд типових математичних схем, які можуть лягти в основу розроблюваного конкретного моделюемого алгоритму.

До них належать такі схеми (моделі) :

- безперервно-детерміновані моделі (D-схеми);
- дискретно-детерміновані моделі (F-схеми);
- дискретно-стохастичні моделі (P-схеми);
- безперервно-стохастичні моделі (Q-схеми).

До безперервно-детермінованим моделей належать моделі, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь в приватних похідних. В якості незалежної змінної, від якої залежать невідомі шукані функції, зазвичай служить час. Тоді вектор-функція шуканих змінних буде безперервною. Математичні схеми такого виду відображають динаміку досліджуваної системи і тому називаються D-схемами (англ. Dynamic).

До дискретно-детермінованим моделей належать так звані кінцеві автомати. Автомат можна уявити як якийсь пристрій, на яке подаються вхідні сигнали і знімаються вихідні і яке може мати деякі внутрішні стану. У кінцевого автомата безліч вхідних сигналів і внутрішніх станів є кінцевим безліччю. Назва F-схема походить від англійських слів finite automata.

До дискретно-стохастическим моделей належать імовірнісні (стохастичні) автомати або по-англійськи probabilistic automat. Звідси назва - P-схема. У загальному вигляді імовірнісний автомат можна визначити як дискретний потактний перетворювач інформації з пам'яттю, функціонування якого в кожному такті залежить тільки від стану пам'яті в ньому і може бути описано стохастически.

**Висновки:** на лекції були розглянуті питання щодо формування вимог, які необхідно виконати на кожному етапі розробки моделі, визначення модельного часу для проведення дослідження. Розглянуті питання щодо типових математичних схем моделювання.

## Лекція № 3

### Методи розв'язання задач нелінійного програмування

1. Загальні свідомості про численні методи рішення нелінійних рівнянь.
2. Методи уточнення наближених значень дійсних коренів.

#### 1. Загальні свідомості про численні методи рішення нелінійних рівнянь.

У завданнях проектування або дослідження поведінки реальних об'єктів, процесів або систем математичні моделі, як правило, нелінійні, тому що вони повинні відображати реальні фізичні нелінійні процеси, що протікають в них. При цьому параметри (змінні) цих процесів пов'язані між собою фізичними нелійними законами. Тому в задачах проектування або дослідження поведінки реальних об'єктів, процесів або систем найчастіше використовуються математичні моделі типу ДНА.

Відповідно до класифікації наведеної в "лекції 1":

Д - модель детермінована, відсутній (точніше не враховується) вплив випадкових процесів.

Н - модель безперервна, інформація та параметри неперервні.

А - модель аналітична, функціонування моделі описується в вигляді рівнянь (лінійних, нелінійних, систем рівнянь, диференціальних та інтегральних рівнянь).

І так, ми побудували математичну модель даного об'єкту, процесу або системи, тобто представили прикладну задачу як математичну. Після цього настає другий етап рішення прикладної задачі - пошук або розробка методу вирішення сформульованої математичної задачі. Метод повинен бути зручним для його реалізації на ЕОМ, забезпечувати необхідну якість рішення.

Всі методи розв'язування математичних задач можна розділити на 2 групи:

1. точні методи вирішення завдань;
2. чисельні методи розв'язання задач.

У точних методах вирішення математичних задач відповідь вдається отримати у вигляді формул.

Наприклад, обчислення коренів квадратного рівняння:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

або, наприклад, обчислення похідних функцій:

$$y = \sin(x), \quad y' = \cos(x)$$

$$y = x^n, \quad y' = nx^{n-1}$$

або обчислення певного інтеграла:

$$\int_a^b \cos(x) dx = \sin(b) - \sin(a)$$

Однак, підставляючи числа в формулу у вигляді кінцевих десяткових дробів, ми все одно отримуємо наближені значення результату.

Для більшості завдань, що зустрічаються на практиці, точні методи рішення або невідомі, або дають дуже громіздкі формули. Однак, вони не завжди є необхідними. Прикладну задачу можна вважати практично вирішеною, якщо ми зуміємо її вирішити з потрібним ступенем точності.

Для вирішення таких завдань розроблені чисельні методи, в яких рішення складних математичних задач зводиться до послідовного виконання великого числа простих арифметичних операцій. Безпосередня розробка чисельних методів відноситься до обчислювальної математики.

Прикладом чисельного методу є метод прямокутників для наближеного інтегрування, що не вимагає обчислення первісної для підінтегральної функції. Замість інтеграла обчислюється кінцева квадратурна сума:

$$\int_a^b f(x_i) dx \approx f(x_i) \Delta x_i;$$

де

$x_1 = a$  – нижня межа інтегрування;

$x_{n+1} = b$  – верхня межа інтегрування;

$n$  – число відрізків, на які розбитий інтервал інтегрування  $(a, b)$ ;

$\Delta x_i$  – довжина елементарного відрізка;

$f(x_i)$  – значення підінтегральної функції на кінцях елементарних відрізків інтегрування.

Чим більше число відрізків  $n$ , на які розбитий інтервал інтегрування, тим ближче наближений розв'язок до істинного, тобто тим точніше результат.

Таким чином, в прикладних задачах і при застосуванні точних методів рішення, і при застосуванні чисельних методів розв'язання результати обчислень носять наближений характер. Важливо тільки домогтися того, щоб помилки уклалися в рамки необхідної точності.

Якщо закони функціонування моделі нелінійні, а моделюються процес або система володіють однією ступенем свободи (тобто мають одну

незалежну змінну), то така модель, як правило, описується одним нелінійним рівнянням.

Необхідність відшукування коренів нелінійних рівнянь зустрічається в розрахунках систем автоматичного управління і регулювання, власних коливань машин і конструкцій, в задачах кінематичного аналізу та синтезу, плоских і просторових механізмів і інших завданнях.

Дано нелінійне рівняння:

$$f(x) = 0$$

Необхідно вирішити це рівняння, тобто знайти його корінь  $\bar{x}$ .

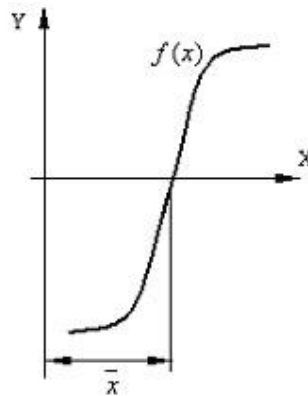


Рис. 1.

Якщо функція має вигляд многочлена ступеня  $m$ ,

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m$$

де  $a_i$  – коефіцієнти многочлена  $i = \overline{1, m}$ , то рівняння  $f(x) = 0$  має  $m$  коренів (рис. 2).

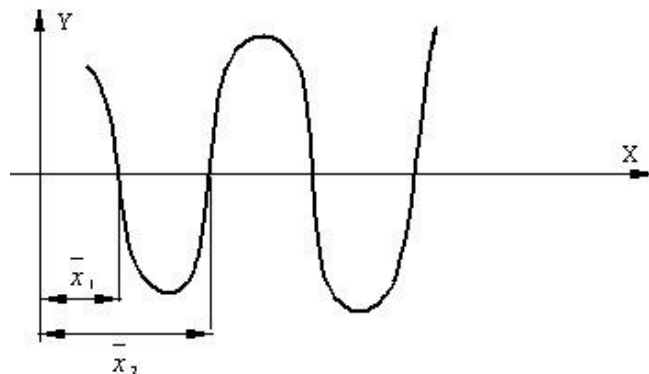


Рис. 2.

Якщо функція  $f(x)$  включає в себе тригонометричні або експоненціальні функції від деякого аргументу  $x$ , то рівняння (1) називається трансцендентним рівнянням.

Приклади:

$$\operatorname{arctg} x + 1 - x = 0,$$

$$x - e^{\frac{-x}{10}} = 0$$

Такі рівняння зазвичай мають безліч рішень.

Як відомо, не всяке рівняння може бути вирішено точно. В першу чергу це відноситься до більшості трансцендентних рівнянь.

Доведено також, що не можна побудувати формулу, по якій можна було б вирішувати довільні алгебраїчні рівняння ступеня, вище четвертої.

Однак точне рішення рівняння не завжди є необхідним. Завдання відшукування коренів рівняння можна вважати практично вирішеною, якщо ми зуміємо знайти корені рівняння з заданим ступенем точності. Для цього використовуються наближені (чисельні) методи вирішення.

Більшість вживаємих наближених методів рішення рівнянь є, по суті, способами уточнення коренів. Для їх застосування необхідно знання інтервалу ізоляції  $[a, b]$ , в якому лежить уточнюєий корінь рівняння (рис. 3).

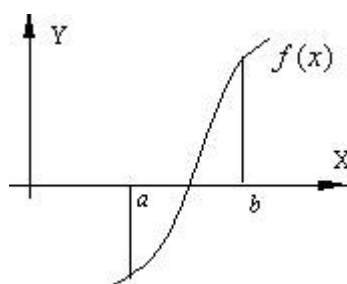


Рис. 3.

Процес визначення інтервалу ізоляції  $[a, b]$ , який містить тільки один з коренів рівняння, називається відділенням цього кореня.

Процес відділення коренів проводять виходячи з фізичного змісту прикладної задачі, графічно, за допомогою таблиць значень функції  $f(x)$  або за допомогою спеціальної програми відділення коренів. Процедура відділення коренів заснована на відомій властивості неперервних функцій: якщо функція неперервна на замкненому інтервалі  $[a, b]$  і на його кінцях має різні знаки, тобто  $f(a) f(b) < 0$ , то між точками  $a$  і  $b$  є хоча б один корінь рівняння (1). Якщо при цьому знак функції  $f'(x)$  на відрізку  $[a, b]$  не змінюється, то корінь є єдиним на цьому відрізку.

Процес визначення коренів алгебраїчних і трансцендентних рівнянь складається з 2 етапів:

1. відділення коренів, - тобто визначення інтервалів ізоляції  $[a, b]$ , всередині якого лежить кожен корінь рівняння;

2. уточнення коренів, - тобто звуження інтервалу  $[a, b]$  до величини рівної заданій ступеня точності  $\epsilon$ .

Для алгебраїчних і трансцендентних рівнянь придатні одні і ті ж методи уточнення наближених значень дійсних коренів:

1. метод половинного ділення (метод дихотомії);
2. метод простих ітерацій;
3. метод Ньютона (метод дотичних);
4. модифікований метод Ньютона (метод січних);
5. метод хорд і ін.

## 2. Методи уточнення наближених значень дійсних коренів:

### Метод половинного ділення

Дано нелінійне рівняння:

$$f(x) = 0$$

Знайти корінь рівняння, що належить інтервалу  $[a, b]$ , із заданою точністю  $\epsilon$ .

Для уточнення кореня методом половинного ділення послідовно здійснюємо такі операції:

1. Ділимо інтервал навпіл :

$$t = \frac{a+b}{2} \text{ – координати середини відрізка } [a, b]$$

2. В якості нового інтервалу ізоляції приймаємо ту половину інтервалу, на кінцях якого функція має різні знаки (рис.4).

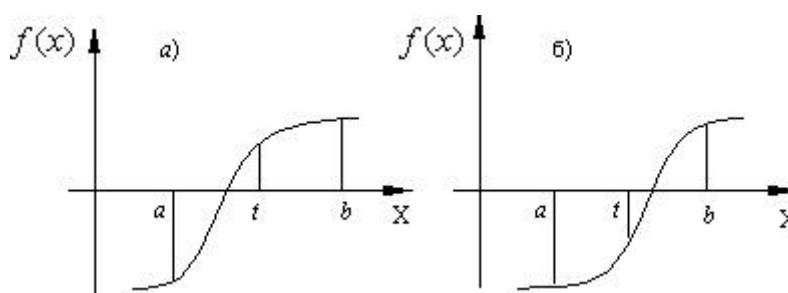


Рис. 4.

Для цього:

- а) Обчислюємо значення функції  $f(x)$  в точках  $a$  і  $t$ .



б) Перевіряємо: якщо  $f(a) f(t) < 0$ , то корінь знаходиться в лівій половині інтервалу  $[a, b]$  (рис.4.а). Тоді відкидаємо праву половину інтервалу і робимо переприсвоєнню  $b = t$ .

с) Якщо  $f(a) f(t) < 0$  не виконується, то корінь знаходиться в правій половині інтервалу  $[a, b]$  (рис.4.б). Тоді відкидаємо ліву половину і робимо переприсвоєнню  $a = t$ . В обох випадках ми отримуємо новий інтервал  $[a, b]$  в 2 рази менший за попередній.

1. Процес, починаючи з пункту 1, циклічно повторюємо до тих пір, поки довжина інтервалу  $[a, b]$  не стане рівною або меншою заданої точності, тобто

$$|b - a| \leq \varepsilon$$

Схема алгоритму уточнення коренів за методом половинного ділення представлена на рис. 5.

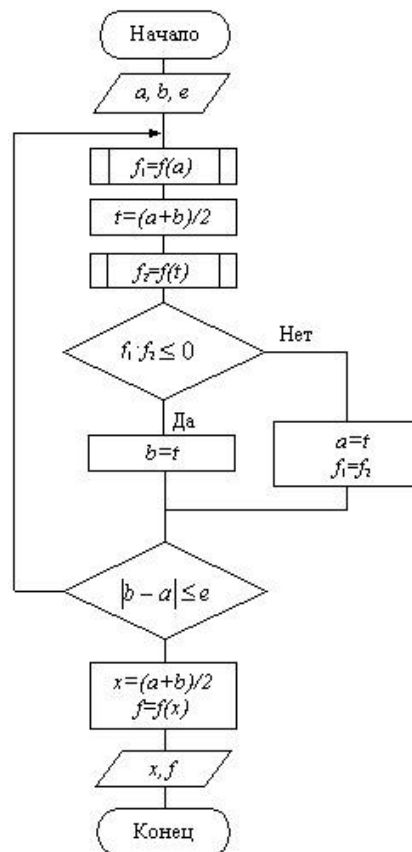


Рис. 5. Схема алгоритму уточнення коренів за методом половинного ділення

### Метод простих ітерацій.

У ряді випадків досить зручним прийомом уточнення кореня рівняння є метод послідовних наближень (метод ітерацій).

Нехай з точністю  $\varepsilon$  необхідно знайти корінь рівняння  $f(x) = 0$ , що належить інтервалу ізоляції  $[a, b]$ . Функція  $f(x)$  і її перша похідна неперервні на цьому відрізку.

Для застосування цього методу вихідне рівняння  $f(x) = 0$  має бути приведене до вигляду

$$x = \varphi(x)$$

В якості початкового наближення  $x_0$  вибираємо будь-яку точку інтервалу  $[a, b]$ .

Далі ітераційний процес пошуку кореня будується за схемою:

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi(x_0) \\x_2 &= \varphi(x_1) \\&\dots \\x_n &= \varphi(x_{n-1})\end{aligned}\quad (6)$$

В результаті ітераційний процес пошуку реалізується рекуррентною формулою (6). Процес пошуку припиняється, як тільки виконується умова

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$$

або число ітерацій перевищить задане число  $N$

Для того, щоб послідовність  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наближалася до шуканого кореня, необхідно, щоб виконувалася умова збіжності  $|\varphi'(x)| < 1$

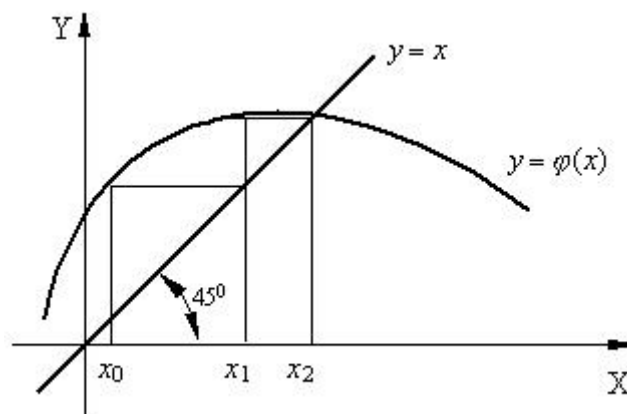


Рис. 6. Геометричний сенс методу

Переходимо до побудови схеми алгоритму (рис.7). Обчислення функції оформимо у вигляді підпрограми.

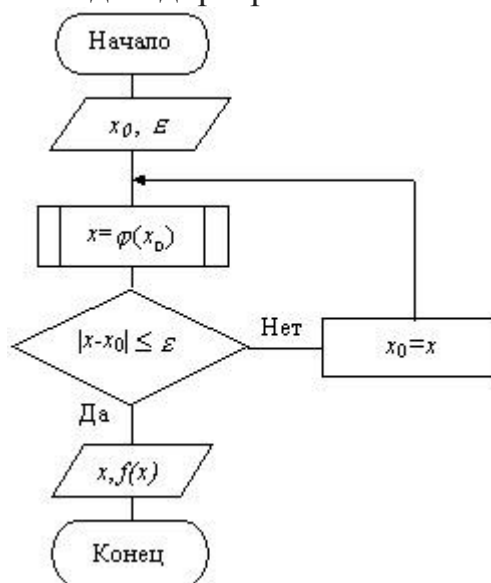


Рис. 7. Схема алгоритму уточнення кореня методом ітерацій

### Метод Ньютона (метод дотичних)

Розглянуті раніше методи вирішення нелінійних рівнянь є методами прямого пошуку. У них для знаходження кореня використовується знаходження значення функції в різних точках інтервалу  $[a, b]$ .

Метод Ньютона відноситься до градієнтних методів, в яких для знаходження кореня використовується значення похідної.

Дано нелінійне рівняння:

$$f(x)=0$$

Знайти корінь на інтервалі  $[a, b]$  з точністю  $\epsilon$ .

Метод Ньютона заснований на заміні вихідної функції  $f(x)$ , на кожному кроці пошуку дотичній, проведеної до цієї функції. Пересеченієкасательной з віссю  $X$  дає наближення кореня (Рис. 8).

Виберемо початкову точку  $x_0 = b$  (кінець інтервалу ізоляції). Знаходимо значення функції в цій точці і проводимо до неї дотичну, перетин якої з віссю  $X$  дає нам перше наближення кореня  $x_1$ .

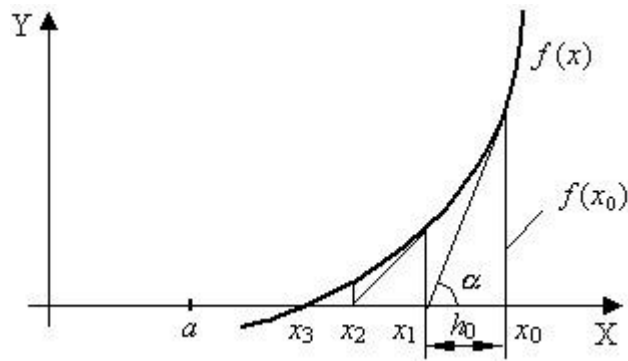


Рис. 8.

$$x_1 = x_0 - h_0,$$

де

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Тому

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

В результаті ітераційний процес сходження до кореня реалізується рекуррентною формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6)$$

Процес пошуку продовжуємо до тих пір, поки не виконається умова:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \quad (7)$$

Спростимо умову (7), виходячи з (6). отримаємо

$$\left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \leq \varepsilon$$

Метод забезпечує швидку збіжність, якщо виконується умова:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

тобто першу дотичну рекомендується проводити в тій точці інтервалу  $[a, b]$ , де знаки функції  $f(x_0)$  і її кривизни  $f''(x_0)$  збігаються.

Схема алгоритму уточнення кореня метод Ньютона наведена на рис.9

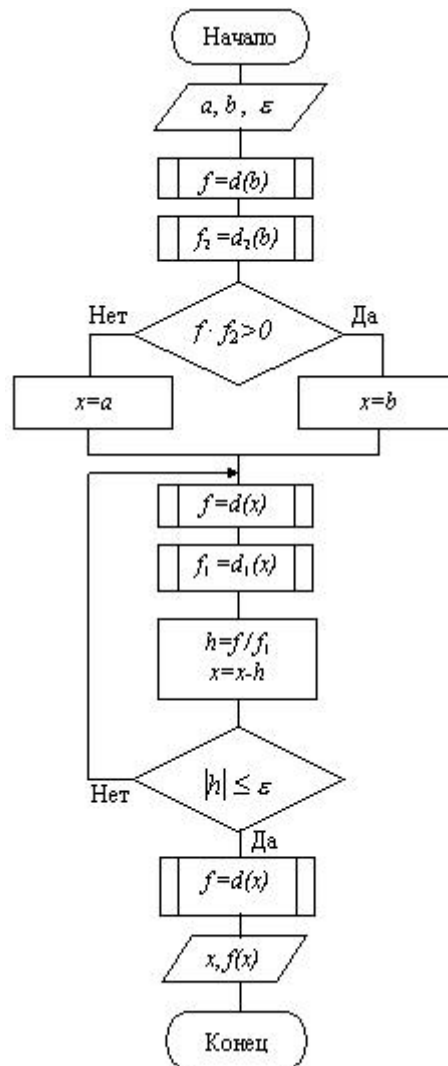


Рис. 9. Схема алгоритму уточнення кореня методом Ньютона наведена на

**Висновки:** На лекції розглянуті численні методи рішень нелінійних рівнянь, які можуть застосовуватися при аналізі систем протипожежного захисту.

## Лекція № 4

### Марківські процеси та основні поняття планування експерименту.

1. Моделювання за схемою марківських процесів
2. Основні поняття планування експериментів

#### 1. Моделювання за схемою марківських процесів

Найбільш повне дослідження процесу функціонування систем виходить, якщо відомі явні математичні залежності, що зв'язують шукані показники з початковими умовами, параметрами і змінними досліджуваної системи. Для багатьох сучасних систем, які є об'єктами моделювання, такі математичні залежності відсутні або малопридатні, і слід застосовувати інше моделювання, як правило, імітаційне. Однак є ряд конкретних математичних схем, перевірених практикою і які довели ефективність моделюванням. Метою вивчення даної теми є освоєння таких математичних моделей.

В інженерній практиці часто виникає завдання моделювання процесів випадкової зміни станів в досліджуваному об'єкті. Стосовно до обчислювальних систем нас цікавлять, перш за все, дискретні стану.

Випадковий процес називається марковским, якщо ймовірність переходу системи в новий стан залежить тільки від стану системи в даний момент і не залежить від того, коли і яким чином система перейшла в цей стан [1-5].

Практично будь-який випадковий процес є марковским або може бути зведений до Марковський. В останньому випадку досить в поняття стану включити всю передісторію змін станів системи.

Марківські процеси діляться на два основні класи:

***дискретні марківські процеси*** (марківські ланцюга);

***безперервні марківські процеси.***

Дискретним марковським ланцюгом називається випадковий процес, при якому зміна дискретних станів відбувається в певні моменти часу. Безперервним марковским процесом називається випадковий процес, при якому зміна дискретних станів відбувається в випадкові моменти часу.

Розглянемо ситуацію, коли моделюється володіє наступними особливостями. Система  $S$  має  $n$  можливих станів:  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Взагалі кажучи, число станів може бути нескінченним.

Однак модель, як правило, будується для кінцевого числа станів. Зміна станів відбувається, будемо вважати, миттєво і в строго певні моменти часу  $t_i, i=1,2$ . Відомі ймовірності переходу  $p_{ij}$  системи за один крок зі стану  $S_i$

в стан  $S_j$ . Потрібно визначити ймовірності станів системи після  $k$ -го кроку. Позначимо ці ймовірності  $p_j(k)$ ,  $j = \overline{1, n}$

Марковський ланцюг називається однорідним, якщо перехідні ймовірності іноді не залежать, тобто від кроку до кроку не змінюються. В протилежному випадку, тобто якщо перехідні ймовірності  $p_{ij}(t)$  залежать від часу, марковський ланцюг називається неоднорідним.

Значення  $p_{ij}$  зазвичай зводяться в матрицю перехідних ймовірностей:

$$\|p_{ij}\| = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Математичною моделлю знаходження ймовірностей станів однорідного марковського ланцюга є рекуррентна залежність:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1)p_{ij},$$

де  $p_j(k)$  - ймовірність  $j$ -го стану системи після  $k$ -го кроку,  $j = \overline{1, n}$ ;

$p_i(k-1)$  - ймовірність  $i$ -го стану системи після  $(k-1)$ -го кроку,  $i = \overline{1, n}$ ;

$n$  - число станів системи.

Для неоднорідного марковського ланцюга ймовірності станів системи знаходяться за формулою:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1) \cdot p_{ij}^{(k)}$$

$p_{ij}^{(k)}$  - значення перехідних ймовірностей для  $k$ -го кроку.

Сформулюємо методику моделювання по схемі дискретних марковських процесів (марковських ланцюгів).

1. Зафіксувати досліджувану властивість системи. Визначення якості залежить від мети дослідження. Наприклад, якщо досліджується завантаження системи, то в якості властивості вибирається зайнятість.
2. Визначити кінцеве число можливих станів системи і переконатися в правомірності моделювання по схемі дискретних марковських процесів.
3. Скласти і розмітити граф станів.
4. Визначити початковий стан.
5. За рекуррентної залежності визначити шукані ймовірності.

В рамках викладеної методики моделювання вичерпної характеристикою поведінки системи є сукупність ймовірностей  $p_j(k)$ . При неоднорідному марковському процесі перехідна ймовірність  $p_{ij}^{(k)}$  являє собою умовну ймовірність переходу  $p_{ij}^{(k)} = PS_j^{(k)} | S_i^{(k)}$  залежну від  $k$  - чергового тимчасового кроку.

Системи протипожежного захисту, як правило, змінюють свої статки в випадкові моменти часу  $t$ . Як і в попередньому випадку в цих системах розглядається процес з дискретними станами  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

Щоб визначити ймовірності стану системи  $p_i(t)$  для будь-якого моменту часу  $t$  необхідно скористатися математичними моделями марковських процесів з безперервним часом (безперервних марковських процесів).

При моделюванні стану систем з безперервними марковськими процесами ми вже не можемо скористатися перехідними ймовірностями  $p_{ij}$ , тому що ймовірність "перескоку" системи з одного стану в інший точно в момент часу  $t$  дорівнює нулю (як ймовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини).

Тому замість перехідних ймовірностей вводяться в розгляд інтенсивність переходів:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$
 де  $p_{ij}(\Delta t)$  - ймовірність того, що система, яка перебувала в момент часу  $t$  в стані  $S_i$  за час  $t$ , перейде в стан  $S_j$ .

З точністю до нескінченно малих другого порядку з наведеної формули можна уявити:

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t$$

Безперервний марковський процес називається однорідним, якщо щільності ймовірностей переходів  $ij$  не залежать від часу  $t$  (від моменту початку проміжку  $t$ ). В іншому випадку безперервний марковський процес називається неоднорідним.

Метою моделювання, як і в разі дискретних процесів, є визначення ймовірностей станів системи  $p_i(t)$ . Ці ймовірності знаходяться інтеграцією системи диференціальних рівнянь Колмогорова.

Сформулюємо методику моделювання за схемою безперервних марковських процесів:

1. Визначити стану системи і щільності ймовірностей переходів  $\lambda_{ij}$



2. Скласти і розмітити граф станів.

3. Скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова. Число рівнянь в системі дорівнює числу станів. В лівій частині рівняння записується похідна ймовірності  $i$ -го стану  $\frac{dp_i(t)}{dt}$ . У правій частині записується алгебраїчна сума добутків  $\lambda_{ij}p_j(t)$  та  $-\lambda_{ij}p_j(t)$ .

4. Визначити початкові умови і вирішити систему диференціальних рівнянь.

Однорідний марковський процес з безперервним часом можна трактувати як процес зміни станів під впливом деякого потоку подій. Тобто щільність ймовірності переходу можна трактувати як інтенсивність потоку подій, що переводять систему з  $i$ -го стану в  $j$ -е.

Такими потоками подій є відмови техніки, спрацювання систем пожежної сигналізації, пожежогасіння та ін.

При дослідженні складних об'єктів завжди цікавить: чи можливий в досліджуваній системі усталеною (стаціонарний) режим? Тобто, як поводить ся система при  $k \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$ ? Чи існують граничні значення  $p_i(k)$ ,  $p_i(t)$ ? Як правило саме ці граничні значення цікавлять дослідника.

Відповідь на це питання дає теорема Маркова. Якщо для однорідного дискретного марківського процесу з кінцевим або рахунковим числом станів усі  $p_{ij} > 0$ , то граничні значення  $p_i(k)$  існують і їх значення не залежать від обраного початкового стану системи. Стосовно до безперервним марковским процесам теорема Маркова трактується так: якщо процес однорідний і з кожного стану можливий перехід за кінцеве час в будь-який інший стан і число станів лічильно або звичайно, то граничні значення  $p_i(t)$  існують і їх значення не залежать від обраного початкового стану. Наприклад (див. Рис. 1), в системі А стаціонарний режим є, а в системі В стаціонарного режиму немає, тобто, якщо система виявиться в стані стан.

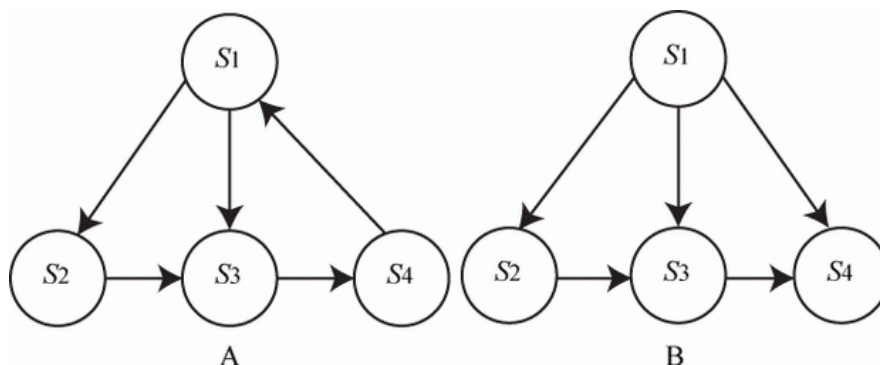


Рис. 1. Приклад графів сстану систем с різноманітними режимами

Розглянемо ілюструючий приклад застосування марковських моделей до моделювання ешелонованих систем захисту інформації в системах пожежної безпеки. Аналіз фізичної сутності процесів подолання системи ешелонованої захисту інформації дозволяє зробити висновок, що даний процес відноситься до імовірнісних, має кінцеве число дискретних станів (яка дорівнює кількості перешкод плюс одиниця), час подолання кожної з перешкод є випадковою величиною (в загальному випадку розподіленої по невідомому закону). Всі події в процесі подолання захисту відбуваються в деякі дискретні моменти часу (кроки), причому обмежень на тривалість кроку не накладається. Перехід з одного стану в інший відбувається з певною ймовірністю, яка залежить тільки від того, в якому стані система перебувала на попередньому кроці. Таким чином, процес подолання ешелонованої системи захисту інформації, в загальному випадку немарковського, можна уявити марковським процесом.

Будемо вважати, що засоби захисту різних ешелонів неоднорідні, спроби подолання одного і того ж засоби захисту в одному ешелоні незалежні.

Проста марковська модель ешелонованої системи захисту (див. Рис. 2.) будується виходячи з таких обмежень:

- подолання чергового ешелону захисту можливо тільки після подолання попереднього;
- подолані засоби захисту не відновлюються.

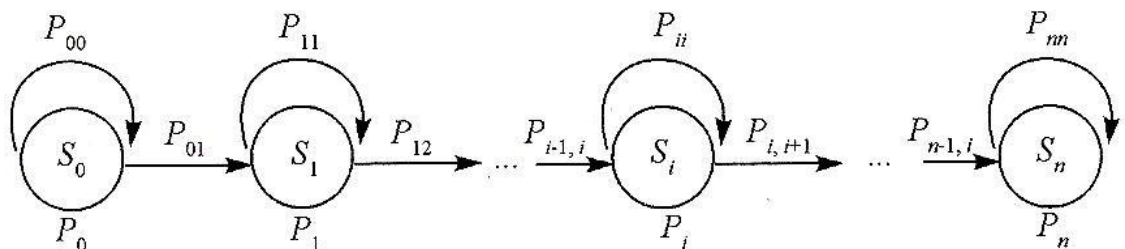


Рис. 2. Проста марковська модель ешелонованої системи захисту

Стану, зазначені на графі, мають такий зміст:

$S_0$  - зловмисник здійснює спробу подолання зовнішньої перешкоди (зовнішнього ешелону);

$S_1$  - зловмисник подолав зовнішню перешкоду і робить спробу подолання другого ешелону захисту;  $S_i$  - зловмисник подолав  $i$ -й ешелон захисту і робить спробу подолання  $i+1$  го ешелону захисту;  $S_n$  - зловмисник подолав останній ешелон захисту (поглинаючий стан).

Матриця ймовірностей переходу марковської моделі, представленої на рис. 2 має вигляд:

$$\|P_{ij}\| = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & & & & & & \\ 0 & P_{11} & P_{12} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & P_{ii} & P_{ii+1} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix}$$

Якщо в системі захисту інформації реалізована можливість відновлення подоланих ешелонів захисту, то розглянута модель перетвориться в марковську модель ешелонованої системи захисту з відновленням (див. рис. 3)

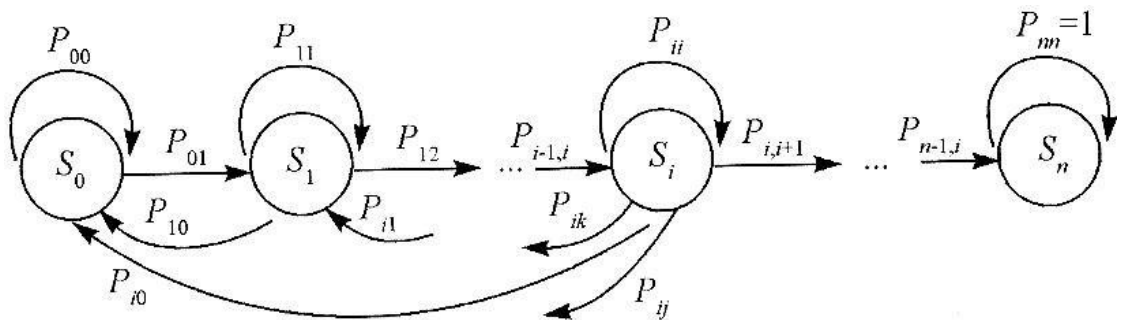


Рис.3 Марковська модель ешелонованої системи захисту з відновленням

Потік подій в однорідних неперервних марківських процесах характеризується експоненціальним законом розподілу випадкових інтервалів часу між подіями. Такий потік називають **найпростішим** або **стаціонарним пуассоновским**. Найпростіший потік має властивості:

- **стаціонарності**, що означає незалежність характеристик потоку від часу;
- **ординарності**, що означає практичну неможливість появи двох і більше подій одночасно;
- **відсутність післядії**, про це йшлося на початку теми.

## 2. Основні поняття планування експериментів

Розглянемо основні поняття теорії планування експериментів .

У зв'язку з тим що математичні методи планування експериментів засновані на кібернетичному поданні процесу проведення експерименту, найбільш підходящою моделлю останнього є абстрактна схема, яка називається «чорним ящиком». При такому кібернетичному підході розрізняють вхідні і

вихідні змінні:  $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_j$ . Залежно від того, яку роль відіграє кожна змінна в проведеному експерименті, вона може бути або **фактором**, або **реакцією**.

Нехай, наприклад, мають місце тільки дві змінні:  $x$  і  $y$ . Тоді, якщо мета експерименту - вивчення впливу змінної  $x$  на змінну  $y$ , то  $x$  - фактор, а  $y$  - реакція. В експериментах з машинними моделями  $S$  м системи  $S$  фактор є керованою (вхідний) змінною, а реакція - вихідною змінною.

Кожний фактор  $x_j = \overline{1, k}$  може приймати в експерименті одно з декількох значень, які називаються рівнями. Фіксований набір рівнів факторів визначає одне з можливих станів даної системи. Одночасно цей набір являє собою умови проведення одного з можливих експериментів. Кожному фіксованому набору рівнів чинників відповідає певна точка в багатовимірному просторі, званому факторним простором. Експерименти не можуть бути реалізовані у всіх точках факторного простору, а лише в належних допустимій області, як, наприклад, це показано для випадку двох факторів  $x_1$  і  $x_2$  на рис. 1 (площину  $x_1 O_1 x_2$ ).

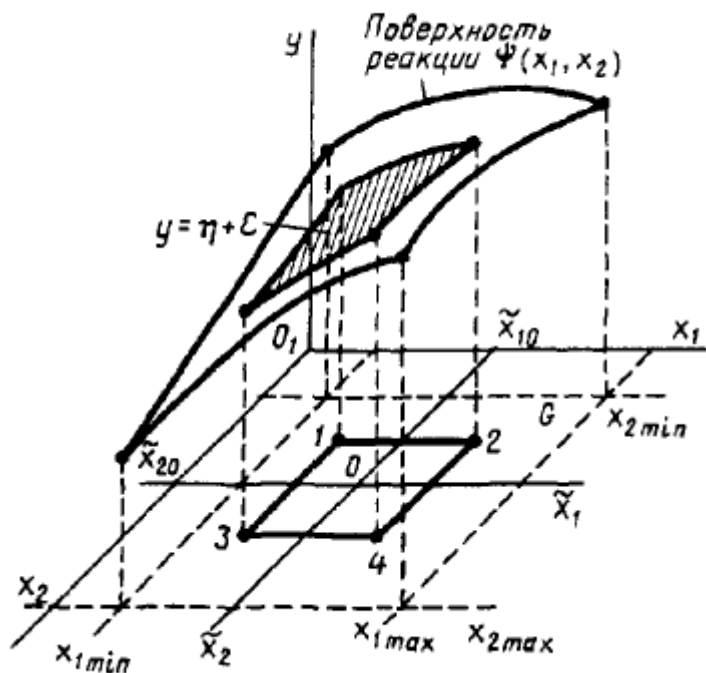


Рис. 1. Геометричне представлення поверхні реакції

Існує цілком певний зв'язок між рівнями факторів і реакцією (відгуком) системи, яку можна представити у вигляді співвідношення:

$$y_l = f_l(x_1, x_2, \dots, x_k), l = \overline{1, m}$$

Функцію  $f_l$ , яка зв'язує реакцію з факторами, називають функцією реакції, а геометричний образ, відповідний функції реакції - поверхнею реакції. Досліднику заздалегідь не відомий вид залежностей  $f_l, l = \overline{1, m}$ , тому використовують наближені співвідношення:

$$y_l = \varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_k), l = \overline{1, m}$$

Залежності  $\varphi$  знаходяться за даними експерименту. Останній необхідно поставити так, щоб при мінімальних витратах ресурсів (наприклад, мінімальну кількість випробувань), варіюючи по спеціально сформульованим правилам значення вхідних змінних, побудувати математичну модель системи і оцінити її характеристики.

При плануванні експериментів необхідно визначити основні властивості чинників. Фактори при проведенні експериментів можуть бути керованими і некерованими, що спостерігаються і неспостережний, що вивчаються і невивчаються, кількісними і якісними, фіксованими і випадковими.

Фактор називається керованим, якщо його рівні цілеспрямовано вибираються дослідником в процесі експерименту. При машинної реалізації моделі  $S_M$  дослідник приймає рішення, керуючи зміною в допустимих межах різних факторів. Фактор називається спостережуваним, якщо його значення спостерігаються і реєструються. зазвичай в машинному експерименті з моделлю  $S_M$  спостерігаються чинники збігаються з керованими, так як нераціонально управляти фактором, що не спостерігаючи його. Але некерований фактор також можна спостерігати. Наприклад, на етапі проектування конкретної системи  $S$  неможливо керувати заданими впливами зовнішнього середовища  $E$ , але можна спостерігати їх в машинному експерименті.

Якщо імітаційна модель сформульована, то всі фактори визначені і не можна під час проведення даного експерименту (випробування) з моделлю  $S_M$  вводити додаткові чинники.

Як уже зазначалося, кожен фактор може приймати в випробуванні одне або кілька значень, які називаються рівнями, причому фактор буде керованим, якщо його рівні цілеспрямовано вибираються експериментатором. Для повного визначення фактора необхідно вказати послідовність операцій, за допомогою яких встановлюються його конкретні рівні. Таке визначення фактора називається *операційним* і забезпечує однозначність розуміння фактора.

Основними вимогами, що пред'являються до чинників, є вимога керованості фактора і вимога безпосереднього впливу на об'єкт. Під *керованістю фактора* розуміється можливість установки і підтримки обраного потрібного рівня фактора постійним протягом всього випробування або постійно змінюваних відповідно до заданої програми. Вимога безпосереднього впливу на об'єкт має велике значення в зв'язку з тим, що важко керувати фактором, якщо він є функцією інших факторів.

При плануванні експерименту зазвичай одночасно змінюються кілька факторів. Визначимо вимоги, які пред'являються до сукупності факторів. Основні з них - сумісність і незалежність. *Сумісність факторів* означає, що всі їх комбінації здійсненні, а незалежність відповідає можливості встановлення фактора на будь-якому рівні незалежно від рівнів інших.

При проведенні машинного експерименту з моделлю  $S_M$  для оцінки деяких характеристик процесу функціонування досліджуваної системи  $S$

експериментатор прагне створити такі умови, які сприяють виявленню впливу чинників, які перебувають у функціональній зв'язку з шуканою характеристикою. Для цього необхідно: відібрати фактори  $x_i, i = \overline{1, k}$ , які впливають на шукану характеристику, і описати функціональну залежність; встановити діапазон зміни факторів  $x_{\min} - x_{\max}$ ; визначити координати точок факторного простору  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , в яких необхідно проводити експеримент; оцінити необхідну кількість реалізацій та їх порядок в експерименті.

Властивості об'єкта дослідження, тобто процесу машинного моделювання системи S, можна описувати за допомогою різних методів (моделей планування). Для вибору конкретної моделі необхідно сформулювати такі її особливості, як адекватність, змістовність, простота і т.д.

Під **змістовністю моделі планування** розуміється її здатність пояснювати безліч вже відомих фактів, виявляти нові і передбачати їх подальший розвиток. Простота - одне з головних достоїнств моделі планування, що виражається в можливості бути реалізованим експерименту на комп'ютері, але при цьому має місце протиріччя з вимогами адекватності та змістовності.

Для екстремального планування експериментів найбільше застосування знайшли моделі у вигляді алгебраїчних поліномів. Припускаємо, що вивчається вплив  $k$  кількісних факторів  $x_i, i = \overline{1, k}$  на деяку реакцію  $\eta$  у відведеній для експериментування локальній області факторного простору G, яка обмежена  $x_{\min} - x_{\max}, i = \overline{1, k}$ . Припустимо, що функцію реакції  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  можна з деякою сутінню точності представити у вигляді полінома ступеня  $d$  від  $k$  змінних

$$\eta = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} b_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{1, i_1, i_2, \dots, i_k} b_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1}^{i_1} x_{i_2}^{i_2} \dots x_{i_k}^{i_k} \quad (3)$$

який містить  $C_{k+d}^d$  коефіцієнтів.

Це співвідношення може бути представлено як

$$\eta = f(x)B$$

де  $f(x)$  – вектор з елементами  $f_\alpha(x), \alpha = \overline{0, k}$ , які входять у початковий поліном;  $B$  – вектор коефіцієнтів, які відповідно мають такий вигляд

$$f(x) = \|f_0(x), \dots, f_k(x)\|, \quad k' = C_{k+d}^d \quad (4)$$

$$x = \|1, \dots, 1; x_1, \dots, x_k; \dots; x_1^j, \dots, x_k^d; x_1^{d-1} x_2, \dots, x_{k-(d-1)} \dots x_{k-1} x_k\|$$

$$B = \|b_0; b_1, \dots, b_k; b_{11}, \dots, b_{kk}; \dots\|$$

Введемо фіктивну змінну  $x_0=1$ , а також змінні

$$x_{k+1} = x_1^2, x_{k+2} = x_2^2, \dots, x_{2k+1} = x_k^2$$

$$x_{2k+1} = x_1 x_2, \dots, x_k' = x_{k-(d-1)} \dots x_{k-1} x_k$$

Тоді рівняння (3) може бути записане як лінійне рівняння виду

$$\eta = f(x)B = \sum_{\alpha=0}^k b_{\alpha} f(x) \quad (5)$$

Для оцінки коефіцієнтів в (4) можна застосовувати методи лінійної регресії.

Функція реакції може мати і більш складну залежність від факторів. У цьому випадку деякі з них вдається привести до лінійного вигляду. Такими моделями є мультиплікативна, регресивна, експоненціальна і ін.

Якщо обрана модель планування, тобто обраний вид функції  $\eta = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$  і записано її рівняння, то залишається в відведеної для дослідження області факторного простору  $G$  спланувати і провести експеримент числових значень констант (коефіцієнтів) цього рівняння.

Так як поліном (4) та (5) містить  $C_{k+d}^d$  коефіцієнтів, які підлягають визначенню, то план експерименту  $D$  повинен містити принаймні  $N \geq C_{k+d}^d$  різних експериментальних крапок.

$$D = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix} \quad (6)$$

де  $x_{ij}$  – значення, яке приймає  $i$ -на змінна у  $j$ -му випробуванні.

Реалізувавши випробування в  $N$  точках області факторного простору, відведеної для експериментування, отримаємо вектор спостережень, що має такий вигляд

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (7)$$

де  $y_i$  – реакція, яка відповідає  $i$ -й точці плану  $x_j = \|x_{1j} \dots x_{kj}\|$

При незначному впливі некерованих вхідних змінних і параметрів у порівнянні зі збуреннями керованих змінних в плануванні експерименту, які вводяться, передбачається вірною наступна модель:

$$y_j = \eta_j + e_j = \varphi_j(x) + e_j = b_0 x_{0j} + b_1 x_{1j} + \dots + b_k x_{kj} + e_j \quad (8)$$

де  $e_j$  – помилка випробування, яка передбачається незалежною нормально розподіленої випадкової величиною з математичним очікуванням  $M\{e_j\} = 0$  та постійною дисперсією  $D\{e_j\} = \sigma_j^2$

Виписавши аналогічні співвідношення для всіх точок плану  $j = \overline{1, N}$  отримаємо матрицю планування

$$X = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} & x_{k+11} & \dots & x_{k'1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} & x_{k+12} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{kN} & x_{k+1N} & \dots & \end{vmatrix}$$

яка має розмір  $N \times (k' + 1)$ .

Розглянемо особливості планування експерименту для лінійного наближення поверхні реакції, причому побудови плану передуює проведення ряду неформалізованих дій (прийняття рішень), спрямованих на вибір локальної області факторного простору G

Спочатку слід вибрати межі  $x_{i\min}$  та  $x_{i\max}$  області визначення факторів, які задаються виходячи з властивостей досліджуваного об'єкта, тобто на основі аналізу апріорної інформації про систему S та зовнішнє середовище E.

Після визначення області G необхідно знайти локальну підобласть для планування експерименту шляхом вибору основного (нульового) рівня  $x_{i0}$  та інтервалів варіювання  $\Delta x_i, i = \overline{1, k}$ . В якості вихідної точки  $x_{i0}$  обирають таку, яка відповідає найкращім умовам, визначеним на основу аналізу апріорної інформації о системі S, при цьому ця точка не повинна знаходитись близько до границь області визначення факторів  $x_{i\min}$  та  $x_{i\max}$ . На вибір інтервалу варіювання  $\Delta x_i$  накладаються природні обмеження знизу (інтервал не може бути менше помилки фіксування рівня фактору, так як в протилежному випадку верхній і нижній рівні виявляться невиразними) і зверху (верхній і нижній рівні не повинні виходити за область визначення G).

В рамках обраної моделі планування у вигляді алгебраїчних поліномів будується план експерименту шляхом варіювання кожного з цих факторів  $x_i, i = \overline{1, k}$  на декількох рівнях q відносно вихідної точки, який представляє центр експерименту.

**Висновки:** на лекції були розглянуті питання щодо моделювання систем безпеки за схемою марківських процесів. Дані основні поняття планування.



## Лекція № 5

### Повнофакторний експеримент та дрібні репліки

1. Повнофакторний експеримент
2. Дрібно факторний експеримент

#### 1. Повнофакторний експеримент

Експеримент, в якому реалізуються всі можливі поєднання рівнів факторів, називається повним факторним експериментом (ПФЕ). Якщо обрана модель планування включає в себе тільки лінійні члени полінома та їхні твори, то для оцінки коефіцієнтів моделі використовується план експерименту з варіюванням всіх  $k$  факторів на двох рівнях, тобто  $q=2$ .

Такі плани називаються планами типу  $2^k$ , де  $N = 2^k$  – число всіх можливих випробувань. Менш популярні експерименти типу  $3^k$ , так як з ростом числа рівнів факторів різко збільшується кількість опитів.

Планування, проведення та обробка результатів ПФЕ складається з наступних обов'язкових етапів:

- кодування факторів;
- складання план-матриці експерименту;
- рандомизація опитів;
- реалізація плану експерименту;
- перевірка відтворюваності опитів;
- перевірка адекватності лінійної моделі;
- оцінка значності коефіцієнтів регресії.

Розглянемо порядок проведення ПФЕ на простому прикладі.

Досліджується процес дистиляції сировини в апараті періодичної дії. Ціль дослідження – визначити залежність виходу продукту (у відсотках від завантаженості в агрегат сировини) від швидкості та кінцевої температури нагріву сировини. Вивчення відомостей, які маютья о процесі, дозволили встановити технологічно розумні межі, в яких можуть змінюватися фактори: кінцева температура – від 250 до 450 °C; швидкість нагріву – від 3 до 10 °C / хв.

**Кодування факторів** необхідно для переводу натуральних факторів (температури та швидкості нагріву) у безрозмірні величини, щоб мати можливість збудувати стандартну ортогональну план-матрицю експерименту. Для переводу натуральних змінних у кодові  $x_i$  заповнюють таблицю кодування змінних на двох рівнях (табл.1)

Кодування факторів		таблиця 1	
№	Інтервал варіювання та рівень факторів	Кінцева температура, °C	Швидкість нагріву, °C / хв
1	Нульовий рівень $x_i = 0$	350	6
2	Інтервал варіювання $\delta_i$	50	2

3	Нижній рівень $x_i = -1$	300	4
	Верхній рівень $x_i = +1$	400	8
	Кодове позначення	$x_1$	$x_2$

В якості нульового рівня факторів зазвичай обирають центр інтервалу, в якому передбачається вести експеримент. В промислових умовах нульовий рівень відповідає значенням факторів при існуючому технологічному режимі.

При виборі інтервалу варіювання справа йде трохи солоніше. Частіше усього, особливо при оптимізації процесу, спочатку доцільніше описати його лінійним рівнянням, і тому інтервал варіювання повинен бути достатньо малим для отримання лінійного рівняння, але разом з тим достатньо великим, щоб не отримати помилкового висновку о незначному впливі будь якого з факторів.

Зв'язок між кодовим та натуральним виразом фактору задається формулою

$$x_i = \frac{X_i - x_{i0}}{\delta_i}$$

де  $X_i$  – натуральне значення фактору;

$x_{i0}$  – значення і-го фактору на нульовому рівні;

$\delta_i$  – інтервал варіювання і-го фактору.

**Складання план-матриці експерименту** здійснюється наступним чином: наприклад, для  $x_1$  рівні чергуються у кожному опиті, для  $x_2$  – через два опити; для  $x_3$  – через чотири опити і т.д. План матриця для розглядаємого прикладу наведена у табл.2.

План матриця ПФЕ типу  $2^2$

таблиця 2

№	опит	$x_1$	$x_2$
1	1	-1	-1
2	2	+1	-1
3	3	-1	+1
4	4	+1	+1

План експерименту, який наведено у табл.2, називають ортогональним планом першого порядку. Основними перевагами такого плану є роздільна (незалежна) оцінка коефіцієнтів регресії.

**Рандомізація опитів.** Природно, що на процес дистиляції впливають не тільки  $x_1$  та  $x_2$ , але ще ряд факторів, які можуть бути взагалі невідомими досліднику. Для того, щоб ввести елемент випадковості впливу цих факторів на результат експерименту, а це необхідно для обґрунтованого використання апарату математичної статистики, встановлюється випадковий порядок постановки опитів у часі. Ця процедура і має назву **рандомізація**. Для її

здійснення використовують таблиці випадкових чисел, витягування номерів з урни і т.п.

В розглядаємому прикладі отримали таку послідовність проведення опитів: 2, 3, 1, 2, 4, 1, 3, 4. У цій послідовності кожне поєднання рівнянь (номери опитів) зустрічається двічі. Паралельні опити передбачаються для оцінки відтворюваності процесу і проведення статистичних оцінок.

Реалізація плану експерименту наведена у табл.3. Наведений план експерименту представляє собою розширену матрицю, так як додатково введено стовбець  $x_1x_2$ , який дозволяє оцінити коефіцієнт регресії при взаємодії факторів.

Умови та результати опитів

таблица 3

ОПИТ	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$y_{u_1}$	$y_{u_2}$	$\bar{y}_u = \frac{y_{u_1} + y_{u_2}}{2}$
1	-1	-1	+1	27,0	28,0	27,5
2	+1	-1	-1	15,9	17,1	16,5
3	-1	+1	-1	22,1	22,9	22,5
4	+1	+1	+1	13,4	13,6	13,5

Початковий етап планування експерименту для отримання коефіцієнтів лінійної моделі заснований на варіюванні чинників на двох рівнях

Перевірка відтворюваності опитів. При однаковому числі паралельних опитів на кожному поєднанні рівнів факторів відтворюваність процесу перевіряється по критерію Кохрена:

$$G = \frac{s_{u \max}^2}{\sum_{u=1}^m s_u^2} \leq G_{(0.05; f_n; f_u)} \quad (5)$$

де  $s_u^2 = \frac{\sum_{p=1}^m (y_{u_p} - \bar{y}_u)^2}{m-1}$  – дисперсія, яка характеризує розсіювання результатів опитів на  $u$ -м поєднанні рівній факторів;

$p = 1, 2, \dots, m$  – число паралельних опитів;

$s_{u \max}^2$  – найбільша з дисперсії у рядках плану;

$G_{(0.05; f_n; f_u)}$  – табличне значення критерія Кохрена при 5%-ному рівні значущості;

$f_n = n$  – число незалежних оцінок дисперсії;

$f_u = m-1$  – число ступенів свободи кожної оцінки.

Процес враховується відтвореним, як що виконується нерівність (5). При цьому процес відтвореності (похибка опиту) визначається по формулі

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^n s_u^2}{n} \quad (6)$$

Як що нерівність (5) не виконується, то необхідно прийняти міри до уточнення вимірів в опиті з максимальною дисперсією.

В розглядаємому прикладі (см. табл.3) виконували по два визначення величини  $y_u$ . Тому значення оцінок дисперсії в кожній точці плану можна розрахувати по формулі

$$s_u^2 = \frac{\Delta^2}{2}$$

де  $\Delta$  – різниця між паралельними опитами.

Таким чином,

$$s_1^2 = \frac{(27,0 - 28,0)^2}{2} = 0,50; \quad s_2^2 = \frac{(1569 - 17,1)^2}{2} = 0,72.$$

Аналогічно  $s_3^2 = 0,32$  та  $s_4^2 = 0,02$ .

Процес відтворюємий, так як нерівність (5) виконується:

$$G = \frac{0,72}{0,50 + 0,72 + 0,32 + 0,02} = 0,4615 < G_{(0,05;4;1)} = 0,9065$$

При цьому дисперсія відтворюваності (похибка опиту)

$$s_y^2 = \frac{0,50 + 0,72 + 0,32 + 0,02}{4} = 0,39$$

У випадку відтворюваності процесу розраховуються коефіцієнти регресії

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^n \bar{y}_u}{n};$$

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^n x_{iu} \bar{y}_u}{n}$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u}{n}$$

Для розглядаємого прикладу

$$b_0 = \frac{27,5 + 16,5 + 22,5 + 13,5}{4} = 20;$$

$$b_1 = \frac{-27,5 + 16,5 - 22,5 + 13,5}{4} = -5$$

Аналогічно  $b_2 = -2$  та  $b_{12} = -0,5$ .

**Перевірка адекватності лінійної моделі** виконується за допомогою критерія Фішера. Адекватність обґрунтована, якщо виконується нерівність

$$F = \frac{s_{ad}^2}{s_y^2} \leq F_{(0,05; f_{ad}; f_y)};$$

для нашого прикладу  $F = \frac{1}{0,32} = 2,564 \leq F_{(0,05; 1; 4)} = 7,086$

де  $s_{ad}^2 = \frac{\sum (\bar{y}_u - y_u)^2}{n - k - 1}$ ; для нашого прикладу  $s_{ad}^2 = \frac{1}{4 - 2 - 1} = 1$

$y_u$  – розрахункове значення відгуку у  $u$ -му опиті;

$F_{(0,05; f_{ad}; f_u)}$  – критерій Фішера при 5%-ному рівні значущості;

$f_{ad} = n - k - 1$  – число ступенів свободи дисперсії адекватності;

$f_y$  – число ступенів свободи дисперсії відтворюваності.

Перевірка адекватності для розглядаємого прикладу виконується у наступному порядку. По отриманому рівнянню

$$y = 20 - 5x - 2x$$

знаходять розрахункове значення у  $u$ . Усі наступні розрахунки зведені у табл.4.

Опит	$\bar{y}_u$	$y_u$	$(\bar{y}_u - y_u)^2$
1	27,5	27	0,25
2	16,5	17	0,25
3	22,5	23	0,25
4	13,5	13	0,25

**Оцінка значності коефіцієнту регресії** здійснюється за допомогою критерію Стюдента. Коефіцієнт вважається значимим, якщо нерівність

$$|b_i| \geq \Delta b_i = t_{(0,05;f_y)} \frac{s_y}{\sqrt{n}}$$

де  $t_{(0,05;f_y)}$  – 5%-на точка розподілу Стюдена з  $f_y$  ступенями свободи.

Для розглядаємого прикладу

$$\Delta b_i = 2,7764 \frac{\sqrt{0,39}}{\sqrt{4}} = 0,08669.$$

Усі отримані по розрахункам коефіцієнти регресії, крім  $b_{ij} = 0,5$ , значимі.

Незначимий коефіцієнт при факторі означає, що даний фактор не впливає (або впливає незначимо) на параметр оптимізації. Однак на величину коефіцієнту регресії впливає не тільки роль даного фактору, но також обраний інтервал варіювання. Це означає, що при дуже вузьких межах зміни фактору в експерименті його внесок в зміну параметру оптимізації може бути дійсно дуже малим. Однак тільки по цьому не можна говорити о тому, що фактор є незначимим. Тому статистичний сигнал о незначності фактору повинен бути по можливості перевірено або хоч би обговорено с технологічної точки зору.

У випадку неадекватності лінійної моделі можна спробувати перевірити адекватність неповного квадратичного рівняння:

$$y = b_0 + b_1 + b_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Однак для такої перевірки відсутні ступені свободи, так як число опитів співпадає з числом визначених коефіцієнтів регресії. У цьому випадку план експерименту називають **насиченим**.

Вихід з цього положення – додаткові опити. Зазвичай додаткові опити ставляться у центрі експерименту, тобто коли усі фактори знаходяться на нульовому рівні. Це дає змогу виконати непряму оцінку сумарного ефекту квадратичних членів.

Сума усіх коефіцієнтів при квадратичних членах

$$\sum b_u = |b_0 - y_0| \quad (13)$$

де  $y_0$  – середнє значення параметру оптимізації, яке отримане з опитів на нульовому рівні факторів.

Як що різниця рівняння (13) незначна, тобто виконується нерівність  $|b_0 - y_0| < t_{(0,05;f_y)} s_y$ , то можна пологати, що сумарний внесок квадратичних ефектів дорівнює нулю. Ця перевірка не є абсолютною, так як можливий варіант, при якому сума позитивних коефіцієнтів при квадратичних членах буде дорівнювати (або близька) сумі відємних.

Наведений опис порядку побудови планів експериментів типу  $2^2$ , кодування факторів та статичних оцінок є незмінними ві збільшення числа факторів. Правда, декілька ускладняється при цьому запис, тому домовились замість -1 та +1, означаючих, на яких рівнях знаходяться у даному опиті фактори, ставити просто відповідні знаки.

## 2. Дрібно факторний експеримент

Навіть сама скудна інформація о процесі дає змогу припустити, що деякі взаємодії факторів дуже не значні у тій обмеженій частині факторного простору, в якій припускається проведення експерименту. В вузьких межах поверхня відгуку, на якій проводиться експеримент, може бути в дуже многих випадках представлена поліномом другого ступеню. При цьому модель процесу повинна мати відмінні від нуля коефіцієнти при лінійних членах  $b_i$ , парних взаємодії  $b_{ij}$  та квадратичних членах  $b_{ii}$ .

Якщо вплив деякої взаємодії признається нехтує малим, то природньо, що коефіцієнт регресії при такій взаємодії не буде значно відрізнятись від нуля. Це дає можливість використовувати відповідний стовбець розширеної матриці для оцінки впливу додаткового фактору.

Пояснимо сказане на розглядаємому прикладі. Оскільки відомо, що взаємодія кінцевої температури нагріву  $x_1$  та швидкість нагріву  $x_2$  незначиме, скористаємося цими обставинами для перевірки впливу на процес дисциляції сировини ще одного, третього фактору – ізотермічної витримки при кінцевій температурі  $x_3$ . План експерименту залишається таким, як він проведений в табл.3, з тією лише різницею, що стовбець  $x_1x_2$  означає рівні фактору  $x_3$ . (табл.5)

У табл.5 проведено чотири опити, по яким можна оцінювати вплив трьох лінійних ефектів. Якщо би при  $k=3$  було поставлено ПФЕ, то необхідно було би поставити 8 опитів, тобто в два рази більше.

План дрібного факторного експерименту типу  $2^{3-1}$

таблиця 5

ОПИТ	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1 x_2$
1	–	–	+
2	+	–	–
3	–	+	–
4	+	+	+

Якщо розширити матрицю планування, яка наведена у табл.5, яка показана у табл. 6, то при порівнянні стовбців можна зробити наступні висновки.

Розширена матриця планування факторного експерименту типу  $2^{3-1}$  таблиця 6

опит	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
1	–	–	+	+	–	–	+
2	+	–	–	–	–	+	+
3	–	+	–	–	+	–	+
4	+	+	+		+	+	+

Стовбець  $x_2 x_3$  повністю повторює стовбець  $x_1$ ; стовбець  $x_1 x_3$  повторює стовбець  $x_2$ ; стовбець  $x_1 x_2$  повторює стовбець  $x_3$  і, наприкінці, стовбець  $x_1 x_2 x_3$  відповідає так званій фіктивній змінній, яка використовується для визначення вільного члену  $b_0$ .

Якщо коефіцієнти при взаємодії не дорівнюють нулю, то нацнені по результатам опитів вибірні коефіцієнти регресії будуть оцінками для сумісних ефектів:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$$

Таким чином, дрібний факторний експеримент, який проводиться по плану, приведеному у табл.5, не дозволяє визначити незалежно друг від друга лінійних ефектів та ефектів взаємодії факторів.

Для визначення дрібного факторного експерименту застосовується запис у вигляді  $2^{k-p}$ , де  $p$  – кількість взаємодій у повному факторному експерименті типу  $2^k$ , замінене новими (додатковими) факторами. Якщо  $p=1$ , то експеримент типу  $2^{k-1}$  має назву полурепліки від повного факторного експерименту типу  $2^k$ . При  $p=2$  маємо чверть репліку і т.п.

При побудові планів дрібного факторного експерименту дуже важливо знати, як будуть змішані між собою ефекти. Умови змішування ефектів у матриці дрібного факторного експерименту задають так званим **визначаючим контрастом**. Визначаючий контраст у свою чергу залежить від того, яке взаємодія у матриці планування замінена лінійним ефектом. В табл.5

$$x_3 = x_1 x_2$$

яке має назву **генеруюче співвідношення**. Помноживши генеруюче співвідношення на  $x_3$ , отримаємо

$$x_3^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Оскільки  $x_3^2 = 1$  незалежно від того, на якому рівні цей фактор знаходиться, тобто дорівнює він  $+1$  або  $-1$ , можна зробити запис

$$1 = x_1 x_2 x_3$$



Цей вираз і має назву визначаючий контраст. За його допомогою можна визначити, яким чином у матриці планування змішані різні ефекти. Для цього необхідно визначаючий контраст помножити на ефект, який нас цікавить. Наприклад, для полурепліки, наведеної у табл.5, генеруюче співвідношення дорівнює  $x_3 = x_1x_2$ , а визначаючий контраст має вигляд  $1=x_1x_2x_3$ . Звідціля умові змішування:

$$\text{для } x_1 \quad x_1 = x_1^2x_2x_3 = x_2x_3$$

$$\text{для } x_2 \quad x_2 = x_1x_2^2x_3 = x_1x_3$$

$$\text{для } x_3 \quad x_3 = x_1x_2x_3^2 = x_1x_2 \quad (\text{так як } x_i^2 = 1)$$

у тому випадку, коли при вводиті третьої змінної (табл.5) прийняли б генеруюче співвідношення, яке дорівнює  $x_3 = -x_1x_2$ , то отримали б також полурепліку від повного факторного експерименту типу  $2^3$ , но с визначаючим контрастом, який має вид  $1 = -x_1x_2x_3$ .

Повний факторний експеримент може бути розбитий на репліки різної дрібності з максимальною розподільчою здатністю відносно лінійних ефектів.

**Висновки:** на лекції були розглянуті питання щодо планування експерименту за різними умовами обробки результатів.

## Лекція № 6

### Методи обробки результатів експериментів

1. Метод Гаусса
2. Метод виключення Гаусса-Жордана
3. Модифікований метод Гаусса
4. Інші методи обробки експериментів

Методи обробки результатів експериментів можна розділити на прямі та ітераційні. До прямих, які дозволяють одержати точний розв'язок, відносяться методи визначників Крамера, Гаусса, прогонки. Ітераційні методи, що ґрунтуються на одержанні і уточненні послідовних наближень до точного розв'язку, ефективні в тому випадку, коли є багато нульових коефіцієнтів або високий порядок системи (метод Гаусса ефективний до порядку  $10^4$ , ітераційні – до  $10^6$ ).

#### Прямі методи

До найбільш популярних прямих методів відносять метод Гаусса та його різновиди, метод Крамера (визначників), метод оберненої матриці, а також метод прогонки, що використовується в задачах з діагональними матрицями. Проте, метод Крамера (визначників), детально розглянутий в стандартних курсах вищої математики, не може бути застосований в більшості практичних задач через велику складність розрахунку визначників навіть при невеликому зростанні порядку системи. Тому в цьому розділі буде зосереджено увагу на розгляді методу Гаусса, який, якщо й поступається ітераційним методам в певних практичних областях, все ж таки є найбільш універсальним, а також методу прогонки, що використовується в задачах з діагональними матрицями.

#### Питання 1. Метод Гаусса

Цей метод є одним з найпоширеніших методів рішення СЛАР. У його основі лежить ідея послідовного виключення невідомих, що приводить вихідну систему до трикутного виду, у якому всі коефіцієнти нижче головної діагоналі дорівнюють нулю. Існують різні обчислювальні схеми, що реалізують цей метод. Найбільше поширення мають схеми з вибором головного елемента по рядку, по стовпцю, або по всій матриці.

Класичний метод Гаусса (метод виключення) ґрунтується на доведенні матриці коефіцієнтів системи (2.1) до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{vmatrix}$$



При виконанні розрахунків може виникнути проблема: елемент  $a_{x+1,x+1}^x = 0$

Ця ситуація виникає, коли всі елементи матриці  $A^k$  по рядках  $i > k$  дорівнюють нулю. Система в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^k x_2 + \dots + a_{1n}^k x_n = b_1^k \\ 0 + a_{22}^k x_2 + \dots + a_{2n}^k x_n = b_2^k \\ \dots \\ 0 + \dots 0x_{k-1} + a_{kk}^k x_k + \dots + a_{kn}^k x_n = b_k^k \\ 0 + \dots 0x_{k-1} + 0x_k + 0x_{k+1} + \dots + 0x_n = b_{k+1}^k \\ \dots \\ 0 + \dots 0x_{k-1} + 0x_k + 0x_{k+1} + \dots + 0x_n = b_n^k \end{cases}$$

Застосування формул (2), (3) неможливе. В даному випадку система має безкінечну множину розв'язків, або не має їх зовсім. Це визначається по матриці  $B^k$ .

Якщо всі елементи  $b_i^k = 0$  при  $i \geq k+1$ , то система має безкінечну множину розв'язків, причому корені  $x_1, \dots, x_k$  називаються залежними і виражають через значення  $x_{k+1}, \dots, x_n$ , які називають незалежними коренями.

Якщо хоч один елемент  $b_i^k \neq 0$  при  $i \geq k+1$ , то розв'язків у системи немає.

У випадку, коли проблеми ділення на нуль не виникало і була отримана трикутна матриця  $A^n$ , система має єдиний розв'язок. Для його пошуку застосовується **зворотній хід метода Гаусса**:

$$\begin{aligned} x_n &= b_n^n \\ x_{n-i} &= b_{n-i}^n - \sum_{k=1}^i a_{n-k+1}^n \cdot x_{n-k+1}, \quad i = \overline{1, n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

Число арифметичних операцій для реалізації методу

$$N \approx \frac{2}{3} n^3$$

## Питання 2. Метод виключення Гаусса-Жордана

Цей метод дозволяє привести матрицю коефіцієнтів до діагонального вигляду. Єдиною його формальною відмінністю від попереднього методу є те, що замість  $i > k$  підставляється  $i \neq k$  ( $k$ -й ряд називається провідним). В методі Гаусса перетворення торкалися тільки рівняння, що стоять нижче провідного ряду. Від класичного методу Гаусса цей метод відрізняється тим, що пронормований рядок віднімається не тільки від нижніх, а й від верхніх рівнянь системи, в результаті чого матриця  $A$  зводиться до одиничної. Зворотній хід в такому разі не потрібен, розв'язком системи буде стовпець  $B^n$ . Метод Гаусса-Жордана можна використовувати з вибором головного елемента чи без. Пошук головного елемента відбувається аналогічно попередньому методу. Формули (2.3), (2.4) з вказаними змінами будуть мати вигляд:

$$a_{ij}^{k+1} = \begin{cases} a_{ij}^k, & j \leq k \\ a_{k+1,j}^k / a_{k+1,k+1}^k, & i = k+1, j > k \\ a_{ij}^k - a_{k+1,j}^{k+1} \cdot a_{i,k+1}^k, & i \neq k+1, j > k \end{cases}, \quad (5)$$

$$b_i^{k+1} = \begin{cases} b_{k+1}^k / a_{k+1,k+1}^k, & i = k+1 \\ b_i^k - b_{k+1}^{k+1} \cdot a_{i,k+1}^k, & i \neq k+1 \end{cases}. \quad (6)$$

Цей метод полегшує одержання розв'язку, але супроводжується збільшенням обсягу обчислень.

### Питання 3. Модифікований метод Гаусса

У багатьох випадках виникає необхідність розв'язання систем лінійних рівнянь із матрицею коефіцієнтів, яка змінюється, і постійним стовпцем вільних членів. Найчастіше для розв'язання таких задач використовується модифікований

метод Гаусса. В цьому методі матрицю коефіцієнтів  $A$  з матричного рівняння (1) подають у вигляді добутку лівої і правої трикутних матриць

$$L * R = A.$$

Оскільки діагональні елементи однієї з матриць дорівнюють одиниці, їх можна не запам'ятовувати, і обидві матриці зберігати в пам'яті ЕОМ на місці матриці коефіцієнтів.

Оскільки діагональні елементи однієї з матриць дорівнюють одиниці, їх можна не запам'ятовувати, і обидві матриці зберігати в пам'яті ЕОМ на місці матриці коефіцієнтів.

У варіанті методу, що називається **методом Краута**, використовується така послідовність знаходження елементів матриць:

$$K = 1, 2, \dots, n;$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} r_{pk}, \quad i = k, k+1, \dots, n;$$

$$l_{kk} = \frac{1}{l_{kk}}$$

$$r_{kj} = l_{kk} (a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} r_{pj}), \quad j = k+1, \dots, n;$$

$$r_{kk} = 1.$$

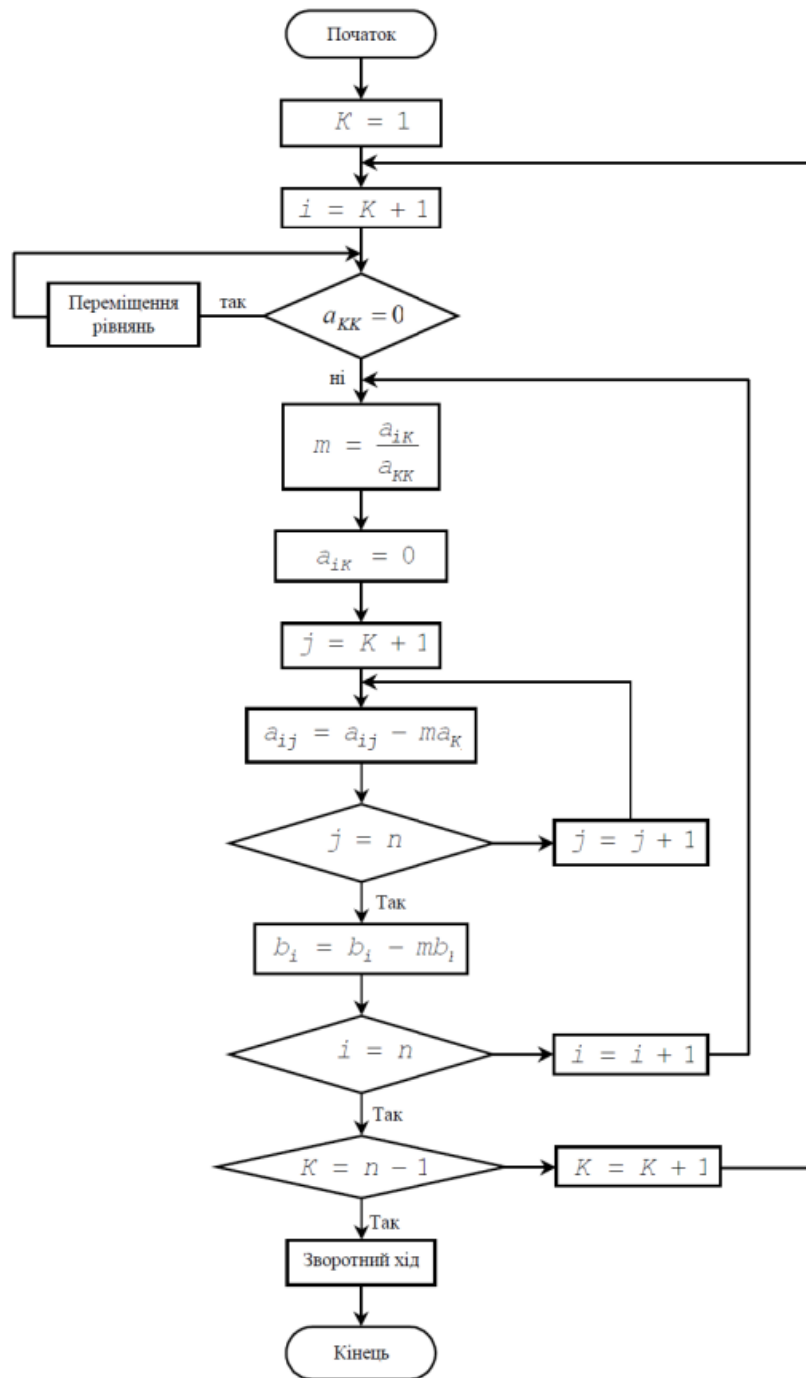


Рисунок 1 – Алгоритм методу Гауса

Система  $AX = C$  зводиться до системи  $LRX = C$ , розв'язання якої замінюється розв'язанням двох систем з трикутними матрицями:

$$LY = C,$$

$$RX = Y.$$

Елементи  $Y, X$  знаходять з таких співвідношень:

$$y_1 = l_{11}c_1$$

$$y_i = l_{ii}(c_i - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}y_p), \quad i = 2, \dots, n;$$

$$x_i = y_i - \sum_{p=i+1}^n r_{ip} x_p, \quad i = n-1, \dots, 1$$

Число арифметичних операцій, необхідних для розв'язання цим методом системи лінійних алгебраїчних рівнянь,  $N = 2n^2$ .

Алгоритм модифікованого методу Гауса переставлено на рис.2

Для обчислення визначників матриць застосовують два підходи:

- рекурсивний розрахунок за допомогою розкладення по рядку чи стовпцю;
- обчислення на основі прямого ходу метода Гауса.

*Перший спосіб* ґрунтується на використанні тієї властивості визначників, що визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їх алгебраїчне доповнення, тобто:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Таким чином, обчислення одного визначника  $n$ -го порядку зводиться до розрахунку  $n$  визначників порядку  $n-1$ . Реалізується даний спосіб за допомогою рекурсії.

Рекурсивний спосіб зручно застосовувати по відношенню до рядків чи стовпців, що мають велику кількість нульових елементів. Якщо ж нульових елементів у матриці немає або дуже мало, то застосування цього способу є вкрай не ефективним. Для визначника  $n$  порядку доведеться розрахувати  $n!/2$  визначників другого порядку.

Метод, що базується на алгоритмові прямого ходу метода Гауса, використовує властивість визначника трикутної матриці. Для такої матриці визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Для обчислення визначника використовується алгоритм побудови послідовності матриць  $A, A^1, A^2, \dots, A^n$  прямого ходу метода Гауса з тією відмінністю, що при перестановці рядків чи стовпців знак визначника змінюється на протилежний. Значення визначника розраховується по формулі:

$$\det(A) = (-1)^m \cdot a_{11} \cdot a_{22}^1 \cdot \dots \cdot a_{nn}^{n-1},$$

де  $m$  – кількість перестановок.

Цей метод дозволяє обчислювати визначники матриць великих порядків.

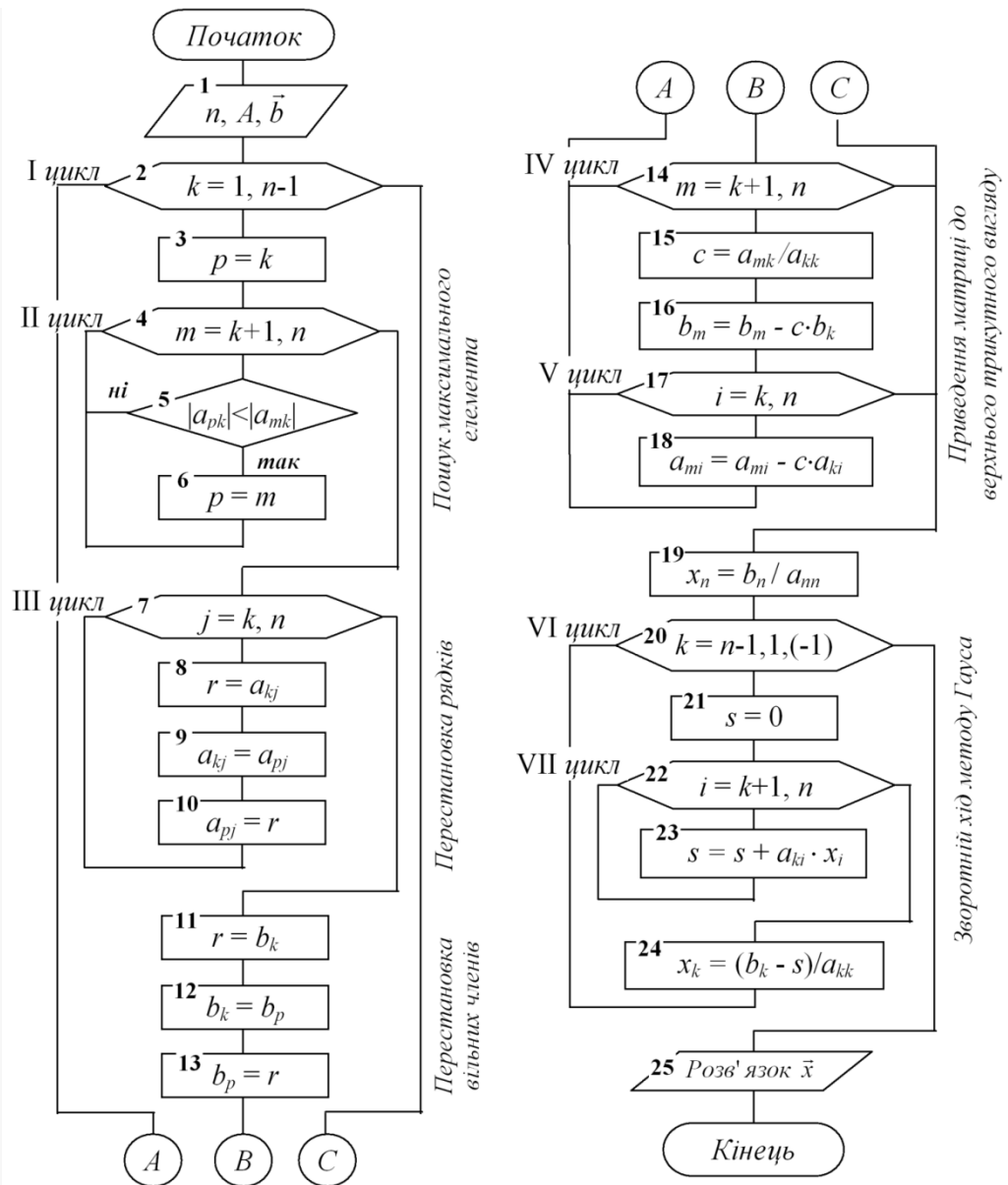


Рисунок 2.2 – Алгоритм модифікованого методу Гаусса

#### Питання 4. Інші методи обробки експериментів

*Метод Крамера.* Даний метод полягає у розрахунку визначника  $\det(A)$

матриці  $A$ , а також визначників  $\det(A_k)$  матриць  $A_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Матриці  $A_k$  отримуються з матриці  $A$  шляхом заміни  $k$ -го стовпця на стовпець  $B$ .

Можливі наступні варіанти:

1. Якщо  $\det A \neq 0$ , то система має єдиний розв'язок  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , який знаходиться за формулою:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}; \quad k = \overline{1, n}$$



2. Якщо  $\det(A)=0$  та всі  $\det(A_k)=0, k=1, n$ , то розв'язків у системи безкінечна множина.

3. Якщо  $\det(A)=0$  і хоч би один  $\det(A_k) \neq 0$ , то розв'язку у системи немає.

Метод Крамера (визначників) не може бути застосований в більшості практичних задач через велику складність розрахунку визначників, навіть при невеликому зростанні порядку системи.

Приклад розв'язку СЛАР методом Крамера наведено у Додатку А.

*Метод оберненої матриці.* Якщо задача розв'язку СЛАР вирішується у пакеті прикладних програм, в якому реалізована функція обчислення оберненої матриці, то для пошуку розв'язку можна застосовувати формулу:

$$X = A^{-1} B,$$

де  $A^{-1}$  – обернена матриця.

Нагадаємо визначення оберненої матриці. Оберненою до квадратної матриці  $A$  називається така матриця  $A^{-1}$ , для якої виконується співвідношення:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E \quad A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A,$$

де  $E$  – одинична матриця.

*Метод прогонки* застосовується для розв'язання систем рівнянь з стрічковими матрицями коефіцієнтів. Розглянемо його застосування для розв'язання тридіагональної системи, до якої часто зводиться лінійна крайова задача.

Запишемо систему в такому вигляді:

$$b_0 y_0 + c_0 y_1 = \varphi_0,$$

$$a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = \varphi_1,$$

$$a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 = \varphi_2,$$

.....

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = \varphi_i,$$

$$a_{n-1} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} + c_{n-1} y_n = \varphi_{n-1},$$

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n = \varphi_n.$$

Для розв'язання цієї системи виконаємо аналог прямого ходу методу Гаусса. Тоді одержимо систему у вигляді

$$y_0 - u_0 y_1 = v_0,$$

$$y_1 - u_1 y_2 = v_1,$$

.....

$$y_{i-1} - u_{i-1} y_i = v_{i-1},$$

$$y_i - u_i y_{i+1} = v_i,$$

$$y_{n-1} - u_{n-1} y_n = v_{n-1},$$

$$y_n = v_n,$$

де  $u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$  – деякі коефіцієнти, що називаються прогоночними.

Відзначимо, що

$$u_0 = -\frac{c_0}{b_0}; \quad v_0 = \frac{\Phi_0}{b_0}.$$

Прогоночні коефіцієнти, визначені із останньої системи, дають можливість знайти  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_0$ .

Виключаючи із попередніх співвідношень  $y_{i-1}$  шляхом арифметичних перетворень, одержуємо формули визначення шуканих значень:

$$u_i = -\frac{c_i}{a_i u_{i-1} + b_i},$$

$$v_i = \frac{\Phi_i - a_i v_{i-1}}{a_i u_{i-1} + b_i}$$

і далі

$$y_n = v_n,$$

$$y_i = u_i y_{i+1} + v_i, \quad i = n-1, \dots, 1, 0.$$

**Висновки:** на лекції були розглянуті питання щодо методів обробки результатів експериментів.

## Лекція № 7

### Методи перебору та алгоритми побудови n-перестановок

1. Методи перебору.
2. Алгоритми побудови n-перестановок.
3. Схема конструювання варіантів. Порфіріан.

Об'єкт, на котрому функція-критерій приймає екстремальне, мінімальне або максимальне значення, – мають назву екстремального елементу або оптимальним рішенням. Множина елементів (об'єктів), серед яких шукають екстремальний, називають множиною можливих рішень, припустимих варіантів.

Якщо ця множина має кінцеве значення, тобто складається з кінцевого числа варіантів і цих варіантів відносно небагато, то є можливість послідовно розглянути усі можливі рішення, на кожному припустимому варіанті обчислити значення функції-критерія і, порівнюючи ці значення, обрати оптимальне рішення. Власне кажучи, у цьому полягає метод перебору (в англійській термінології – «метод проб та помилок»), повторюємо, у разі кінцевої множини припустимих рішень і при цьому порівняно малочисленого, щоб можливо було провести усі розрахунки та порівнянні у прийнятний час.

У деякому сенсі метод перебору – самий простий метод рішення задачі, який «чисті» математики врят чи навіть назвуть математичним. Однак математики-прикладники не так вже і рідко використовують цей метод для рішення практичних задач з використанням сучасної комп'ютерної техніки.

Дуже часто метод перебору застосовують на заключних етапах рішення задач, коли другими методами відібрано порівняно мало варіантів, серед яких знаходяться оптимальні.

Приклад. Розглянемо задачу визначення екстремуму функції  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ , яка задана на відрізку  $[-2, 2]$ . Екстремум такої функції досягається або у крайніх точках відрізка, або у середині відрізка в точках, де похідна обертається в нуль. Таким чином, замість нескінченної множини точок відрізка  $[-2, 2]$  екстремум функції необхідно шукати серед значень  $f(x)$  для точок  $-2, 0, 1, 2$  ( $-2, 0, 1$  – корні рівняння  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2)$ ). Максимум  $f(x)$  досягається, як це неважко перевірити зараз методом перебору, у точці  $x=2$ ,  $f(x)=32$ , мінімум досягається у точці  $x=-2$ ,  $f(x)=-32$ .

Взагалі кажучи, встановив деякі властивості оптимального варіанту, можна значно звужити множину допустимих рішень, ажно отримання кінцевої множини, де частіш виявляється можливість застосувати метод перебору.

Неоціненне значення методу перебору полягає у тому, що він принципово завжди "під рукою". Для кінцевих множин припустимих рішень

це визначає що існує кінцевий алгоритм рішення задачі, тобто задача вирішувана за кінцевий час. Біда, правда, у тому, що для методу перебору цей "кінцевий" час виявляється неприємно великим вже даже у простих випадках.

І все ж віддамо належне методу перебору: ми ще не раз повернемося до нього, по-перше, для рішення простих задач, по-друге, хоч би для оцінки того, на скільки другий запропонований нами метод рішення задачі краще (ефективніше) методу перебору - таке порівняння робиться досить часто. По-третє, багато ефективних методів рішення дискретних задач оптимізації (тобто задач з кінцевою множиною варіантів) "винаходяться" начебто як деякий "полібшений" метод перебору.

## 2. Алгоритми побудови n-перестановок.

Однак, щоб "полібшати" метод перебору, необхідно, поперш усього, вміти їм користуватись - для задач пошуку екстремальних перестановок це означає вміти будувати усі можливі n-перестановки, іншими словами, потрібно знати алгоритм побудови усіх n-перестановок.

Неважко після деяких спроб "нащупати" елементарний прийом отримання усіх n-перестановок починаючи з начального упорядкування чисел 1, 2, ....., n по зростанню (пусть n = 5)

1, 2, 3, 4, 5  
1, 2, 3, 5, 4  
1, 2, 4, 3, 5  
1, 2, 4, 5, 3  
1, 2, 5, 3, 4  
1, 2, 5, 4, 3  
1, 3, 2, 4, 5  
.....

Щоб простіше описати знайдений прийом, введемо деякі поняття.

Пару сусідніх чисел (у перестановці) назовемо упорядкованою, якщо перше число у парі менше другого.

Розглянемо деяку перестановку  $\sigma_n$ . Знайдемо першу з кінця перестановки упорядковану пару. Так у перестановці  $\sigma_n = \langle 1, 3, 5, 4, 2 \rangle$  перша упорядкована пара (3, 5). Перше число такої пари назовемо обриваючим. Перестановочний хвіст в  $\sigma_n$  утворює послідовність чисел, починаючи з обриваючого.

Реупорядкувати перестановочний хвіст у  $\sigma_n$  означає:

- 1) замінити обриваюче число на найменше з перестановочного хвосту число, яке перевершує обриваюче;
- 2) усі інші числа з перестановки хвосту (разом з обриваючим) розташувати у порядку зростання.

Так у нашій перестановці  $\sigma_n = \langle 1, 3, 5, 4, 2 \rangle$  обриваюче число є 3, перестановочний хвіст є послідовність (3, 5, 4, 2).

Зауважимо, що обриваючого числа не знайдеться тільки у перестановці, в якій усі числа розташовані у порядку зменшення. У нашому алгоритмі це сигнал того, що рішення закінчено.

Введення поняття «обриваюче число», «перестановочний хвіст», «реупорядкування» дозволяє спростити опис алгоритму побудови усіх  $n$ -перестановок. Цей алгоритм – назовемо його *Алгоритм-1* – представлено блок-схемою на рис.1.

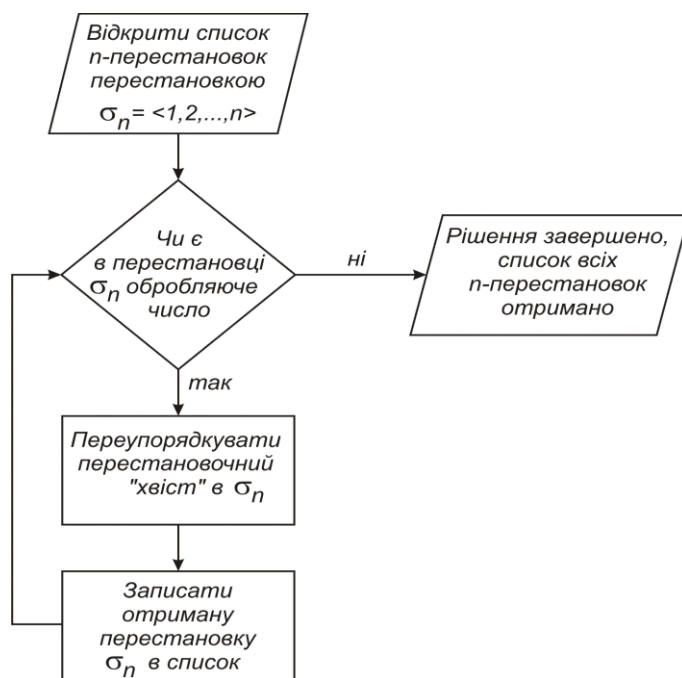


Рис. 1. Блок-схема Алгоритма-1 отримання усіх  $n$ -перестановок  
Отримання перших декількох перестановок по цьому алгоритму наведено у таблиці 1.

№	перестановка	обриваюче число	Перестановочний хвіст та його реупорядкування
1	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$	4	(4, 5) $\rightarrow$ (5, 4)
2	$\langle 1, 2, 3, 5, 4 \rangle$	3	(3, 5, 4) $\rightarrow$ (4, 3, 5)
3	$\langle 1, 2, 4, 3, 5 \rangle$	3	(3, 5) $\rightarrow$ (5, 3)
4	$\langle 1, 2, 4, 5, 3 \rangle$	4	(4, 5, 3) $\rightarrow$ (5, 3, 4)
5	$\langle 1, 2, 5, 3, 4 \rangle$	3	(3, 4) $\rightarrow$ (4, 3)
6	$\langle 1, 2, 5, 4, 3 \rangle$	2	(2, 5, 4, 3) $\rightarrow$ (3, 2, 4, 5)

Неважко переконатися у тому, що *Алгоритм-1* дійсно вирішує поставлену задачу. Цей факт очевидний для  $n=1$ , можна перевірити і для  $n=2$ . Нехай це вірно для  $(n-1)$ , тобто алгоритм дійсно отримує всі різні перестановки у випадку  $n-1$  елементів. Але якщо застосувати цей алгоритм

для  $n$  елементів, то цифра 1, яка стоїть на першому місці у початковій перестановці, буде змінена на 2, тільки коли вона стане обриваючим числом, тобто коли будуть отримані всі  $(n-1)!$  різних перестановок інших чисел. Точно також цифра 2 на першому місці у перестановках буде змінена на 3 тільки після отримання усіх  $(n-1)!$  різних перестановок інших елементів і т.д. Це означає, що алгоритм отримує усі  $n(n-1)!$  Перестановок, при цьому серед них не буде співпадаючих.

Другий алгоритм – Алгоритм-2 – отримання усіх  $n$ -перестановок представлено на рис.2

Тільки один термін у блок-схемі рис.2 потребує пояснення.

Назвемо «обертанням» деякі послідовності  $A$  чисел заміну її другою послідовністю  $B$ , де число, що стоїть в  $A$  на першому місці, виявляється в  $B$  на останньому місці, взаємне розташування інших чисел не змінюється. Так обертання  $(1, 2, 3)$  призводить до  $(2, 3, 1)$ .

Таблиця 2 пояснює хід рішення по цьому алгоритму при отриманні перших декількох перестановок.

№	перестановка	Обертаєма частина	Перестановочний хвіст та його реупорядкування
1	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$	$m = 5 \div \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$	$\langle 2, 3, 4, 5, 1 \rangle$
2	$\langle 2, 3, 4, 5, 1 \rangle$	$m = 5 \div \langle 2, 3, 4, 5, 1 \rangle$	$\langle 3, 4, 5, 1, 2 \rangle$
3	$\langle 3, 4, 5, 1, 2 \rangle$	$m = 5 \div \langle 3, 4, 5, 1, 2 \rangle$	$\langle 4, 5, 1, 2, 3 \rangle$
4	$\langle 4, 5, 1, 2, 3 \rangle$	$m = 5 \div \langle 4, 5, 1, 2, 3 \rangle$	$\langle 5, 1, 2, 3, 4 \rangle$
5	$\langle 5, 1, 2, 3, 4 \rangle$	$m = 5 \div \langle 5, 1, 2, 3, 4 \rangle$ $m = 4 \div \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ $\langle 2, 3, 4, 1 \rangle$
6	$\langle 2, 3, 4, 1, 5 \rangle$	$m = 5 \div \langle 2, 3, 4, 1, 5 \rangle$	$\langle 3, 4, 1, 5, 2 \rangle$

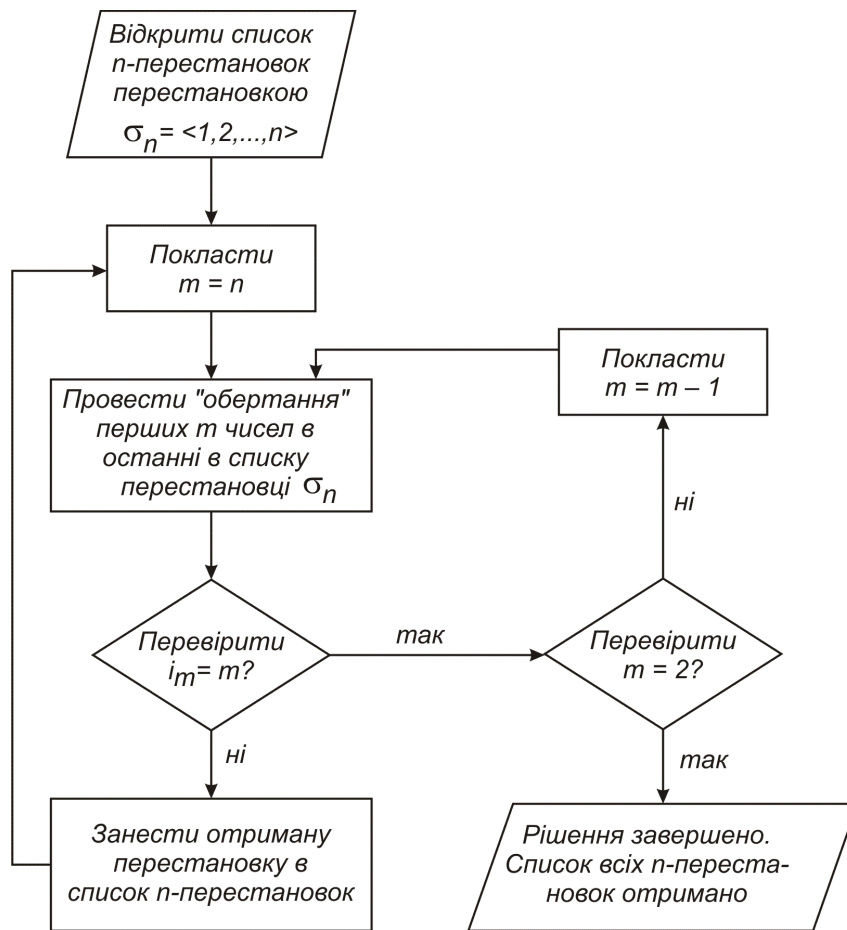


Рис. 2. Блок-схема Алгоритма-2 отримання усіх n-перестановок

### 3. Схема конструювання варіантів. Порфіріан.

Як бачимо з попереднього питання, множина усіх можливих варіантів можна отримати різними способами навіть в одній задачі – пошуку екстремальної перестановки.

І все ж існує однаковий засіб уявлення послідовної побудови усіх можливих варіантів у самих різноманітних задачах дискретної оптимізації. Його ми і приведемо зараз на прикладі утворення усіх можливих n-перестановок.

Відобразимо графічно колом множину усіх можливих n-перестановок. Розіб'ємо цю множину на n підмножин, віднісши до однієї множини усі ті перестановки, у яких на першому місці стоїть одне і теж число  $i_1$ . У першу підмножину попадуть усі перестановки, у яких на першому місці розміщена 1 ( $i_1=1$ ), у другу підмножину попадуть  $\sigma_n$  с  $i_1=2$  і т.д.

Відобразимо ці підмножини графічно також колами, в середині кіл запишемо значення  $i_1$ , з'єднаємо стрілочками кола зі знаком множини усіх можливих n-перестановок, як це показано на рис. 3

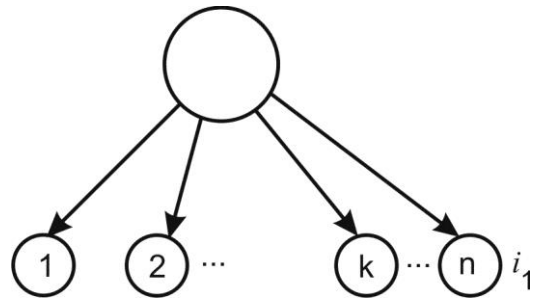


Рис. 3

В свою чергу кожна з цих підмножин можна ще поділити на непересічні множини в залежності від того, яке число розміщено в перестановці на другому місці (рис. 4), новоутворені підмножини можна розбити на частки в залежності від того, яке число розташоване на третьому місці і т.д. Процес такого послідовного розбиття множин обірветься тоді, коли ми дійдемо до окремих, одиничних перестановок.

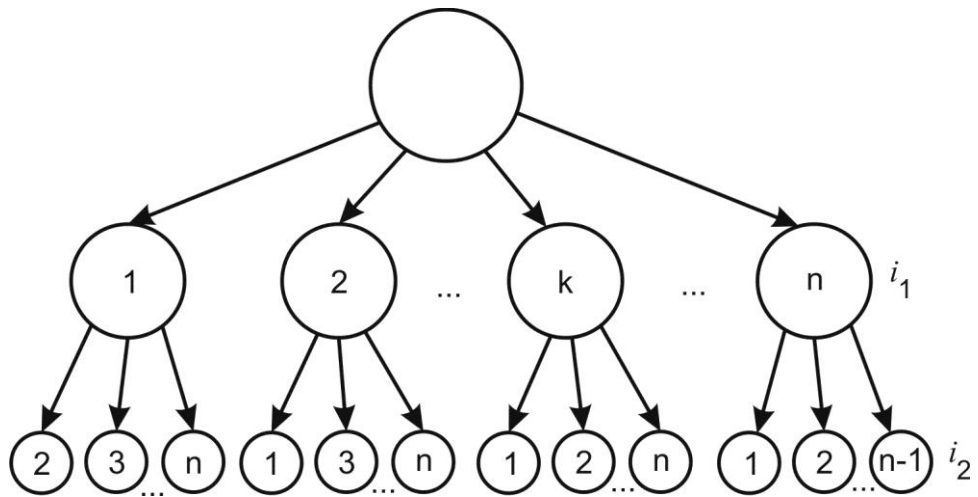


Рис. 4.

На рис. 5 представлений результат такого послідовного розбиття множини усіх перестановок чисел 1, 2, 3.



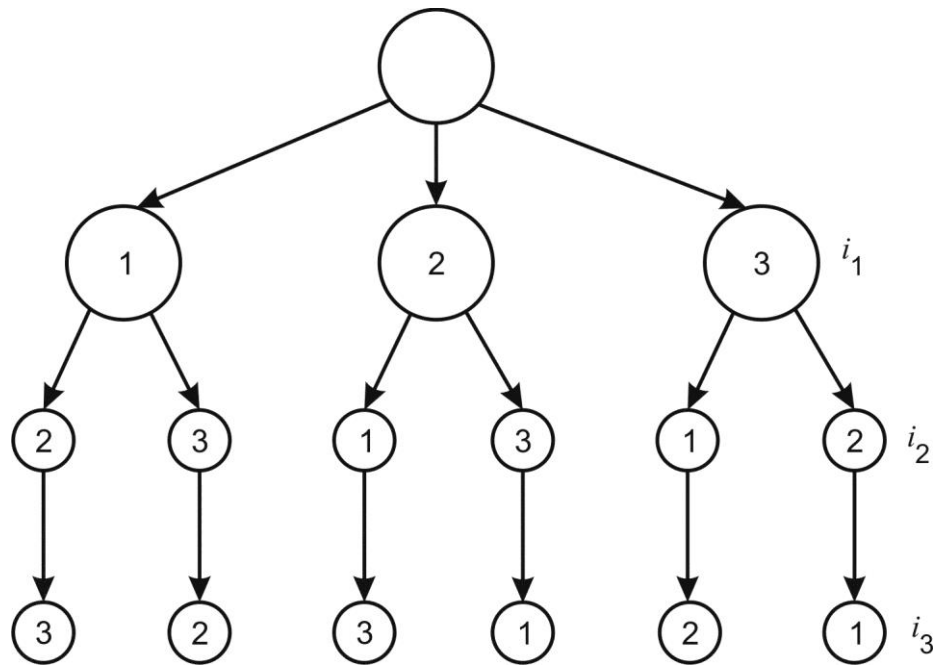


Рис. 5.

Отриманий граф (такі графи у математиці за їх зовнішній вигляд мають назву дерева), по суті, являють собою реалізацію алгоритму отримання усіх перестановок ( у нашому випадку Алгоритму-1). У подальшому Таке зображення послідовного розбиття множини усіх варіантів має назву порфіріан (так названо у честь ім'я Порфірія, який ще у 111 столітті побудував своє «дерево Порфірія» для наочного відображення взаємозв'язку більш широких понять з вузькими).

Кожна вершина у порфіріані розміщується, як будемо говорити, на деякому рівні. У нашому прикладі вершини, які відповідають фіксації  $i_1$ , розміщені на першому рівні, фіксації  $i_2$  – на другому рівні. Вершина, яка розміщена на  $k$ -му рівні, відповідають відрізки довжини  $k$   $n$ -перестановок

$$\sigma_k = \langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle.$$

Вершинам, розміщеним на  $n$ -му рівні, відповідають «повні» перестановки  $\sigma_n$ .

Побудова вершин  $(k + 1)$ -го рівня порфіріану, яка виходить з деякої вершини  $k$ -го рівня, будемо у подальшому називати операція розгалуження, або розгалуженням.

Вміння правильно визначити операцію розгалуження рівносильно знанню способу конструювання усього порфіріану, тобто знанню алгоритму побудови усіх можливих варіантів рішення задачі (можливими варіантами враховуються ті перестановки, які задовольняють усім умовам задачі, за виключенням умови що приводить до екстремуму функції-критерія).

На порфіріан можливо дивитись, як на подання послідовної класифікації множини усіх можливих варіантів, тобто процесу розбиття його на все більш дрібні підмножини, аж до окремих варіантів.

Для нас важливіше, що порфіріан задає спосіб побудови (точніше, їм визначається цей спосіб) – конструювання – усіх можливих варіантів, які задовольняють умовам задачі (за виключенням, ще раз нагадаємо, умови що приводить до екстремуму функції-критерія).

В цьому сенсі кожна вершина порфіріану (зокрема початкової) замикає собою якби деякий фіксований фрагмент в поданні деякого можливого рішення. Так відзначено на рис. 4 знаком + вершина відповідає, якщо прослідкувати шлях від початкової вершини до зазначеної, послідовному закріпленню спочатку  $i_1=2$ , потім  $i_2=1$ . Таким чином, будемо вважати, що зазначена вершина являє собою фрагмент  $\sigma_2 = \langle 2,1 \rangle$ .

В аспекті класифікації це визначає, що зазначена вершина представляє ту підмножину варіантів, яке починається з чисел 2 та 1 ( $i_1=2, i_2=1$ ), та  $\langle 2,1 \rangle$  є класифікаційний код, введене класифікацією ім'я цієї множини.

**Висновки:** на лекції були розглянуті питання щодо методів перебору та алгоритму побудови n-перестановок. Введено поняття «порфіріан» та його значення при складанні структурної моделі.

## Лекція № 8

### Побудова сітьових графіків

1. Етапи планування та правила побудови сітьових графіків
2. Визначення «критичного шляху».
3. Визначення резервів часу для некритичних операцій

**Побудова сітьових графіків** визначає сукупність взаємозв'язаних операцій, які необхідно виконати в певному порядку для досягнення поставленої в програмі мети. Операції логічно упорядковані в тому значенні, що одні операції не можна почати, перш ніж не будуть завершені інші.

**Операція** програми звичайно розглядається як робота, для виконання якої необхідні витрати часу та ресурсів. Як правило, сукупність операцій програми не повторюється.

#### 1. Етапи планування та правила побудови сітьових графіків

Історично першим засобом календарного планування був **стрічковий (лінійний) графік Ганта**, за яким терміни початку та закінчення кожної операції задаються на горизонтальній шкалі часу. Підвищення складності сучасних програм вимагало розробки більш ефективних засобів планування, що забезпечують оптимізацію всього процесу здійснення програм. При цьому ефективність інтерпретується як мінімальна тривалість виконання програми з урахуванням економічних факторів використання існуючих ресурсів.

Організаційне управління програмами стало новою областю теоретичних і прикладних досліджень завдяки розробці двох аналітичних засобів структурного і календарного планування, а також оперативного управління програмами. Ці методи, розроблені протягом 1956-1958 років двома різними групами, отримали назви **метод критичного шляху (МКШ)** і **метод оцінки і перегляду програм**.

МКП був запропонований фірмою Du Pont для управління програмами будівництва, а після цього був розвинутий фірмою Mauchly Associates. Метод ПЕРТ розроблений консультативною фірмою по замовленню військово-морського відомства США для календарного планування науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт за програмою створення ракет "Поларис".

У методах МКШ і ПЕРТ основна увага приділяється часовому аспекту планів в тому розумінні, що обидва методи в визначають календарний план програми. Хоча ці методи розроблені незалежно, вони майже не відрізняються. Найбільш суттєвою різницею було те, що в МКШ оцінки тривалості операцій є детермінованими величинами, а в методі ПЕРТ – випадковими. Зараз обидва методи складають єдиний метод **мережевого планування і управління (МПУ)** програмами.

Мережеве планування і управління програмами містить три основних етапи:

- структурне планування;
- календарне планування;
- оперативне управління.

**Етап структурного планування** починається з розбиття програми на чітко визначені операції. Після цього визначаються оцінки тривалості операцій і будується мережева модель (мережевий графік, стрілкова діаграма), кожна дуга (стрілка) якої зображує роботу. Вся мережева модель у цілому є графічним поданням взаємозв'язків операцій програми. Побудова мережевої моделі на етапі структурного планування дозволяє детально проаналізувати всі операції і внести поліпшення до структури програми до початку її реалізації. Однак, більш істотне значення має використання мережевої моделі для розробки календарного плану виконання операцій.

Метою **етапу календарного планування** є побудова календарного графіка, який визначає моменти початку та закінчення кожної операції, а також її взаємозв'язки з іншими операціями програми. Крім того, календарний графік повинен давати можливість виявляти критичні операції (точки зору витрат часу), яким необхідно приділити особливу увагу, щоб закінчити програму у директивний термін. Що стосується некритичних операцій, то календарний план повинен дозволяти визначати їхні резерви часу, що можна вигідно використати при затримці виконання таких операцій або з позицій ефективного використання ресурсів.

Заключним етапом є **оперативне управління** процесом реалізації програми. Цей етап включає використання мережевої моделі і календарного графіка для укладання періодичних звітів про хід виконання програми. Мережева модель періодично аналізується і, при необхідності, корегується. В цьому випадку опрацьовується новий календарний план виконання частини програми, яка залишилась.

Мережна модель відображає взаємозв'язки між операціями і порядок їх виконання (відношення упорядкування або проходження). Як правило, для уявлення операції використовується **стрільця** (орієнтована дуга), напрямком якої відповідає процесу реалізації програми в часу. Відношення упорядкування між операціями задається за допомогою подій. **Подія** визначається як момент часу, коли завершуються одні операції і починаються інші. Початкова і кінцева точки будь-якої операції описуються, таким чином, *початковою подією* і *кінцевою подією* відповідно. Операції, що виходять із деякої події, не можуть початися, поки не будуть завершені всі операції, що входять у цю подію. По прийнятій в СПУ термінології кожна операція представляється орієнтованою дугою, а кожна подія – вузлом (вершиною). Не потрібно, щоб довжина дуги була пропорційна тривалості операції, а графічне зображення дуг не обов'язково повинно представляти прямолінійний відрізок.

На рис. 1а приведений типовий приклад графічного зображення операції  $(i,j)$  з початковою подією  $i$  і кінцевою подією  $j$ . На рис. 1б показаний інший приклад, із котрого видно, що для можливості початку операції  $(3,4)$  потрібно завершення операцій  $(1,2)$  і  $(1,3)$ .

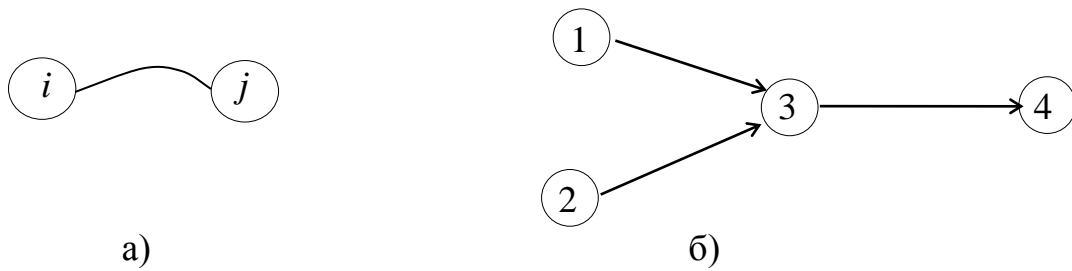


Рис. 1. Графічне подання операції (i,j)

Протікання операцій у часі задається шляхом нумерації подій, причому номер початкової події завжди менше номера кінцевої події.

### 1.1 Правила побудови мережної моделі

**Правило 1.** Кожна операція в мережі представляється тільки одною дугою (стрілкою).

Жодна з операцій не повинна з'являтися в моделі двічі. При цьому варто розрізнити випадок, коли яка операція розбивається на частини; тоді кожна частина подається окремою дугою. Наприклад, прокладання трубопроводу можна розділити на прокладання окремих секцій і розглядати прокладання кожної секції як самостійну операцію.

**Правило 2.** Жодна пара операцій не повинна бути визначена однаковими початковими і кінцевими подіями.

Можливість неоднозначного визначення операцій через події з'являється у випадку, коли дві або більше операцій потрібно виконувати одночасно. Цей випадок приведений на рис. 2а, де операції А і В мають однакові початкові і кінцеві події.

Щоб виключити таку помилку, вводиться **фіктивна** операція.

На рис. 2б показані різні варіанти введення такої фіктивної операції D. У результаті операції А і В визначаються тепер однозначно парою подій, що відрізняються або номером початкового, або номером кінцевого стана. Варто звернути увагу на те, що фіктивні операції не вимагають витрат часу і ресурсів.

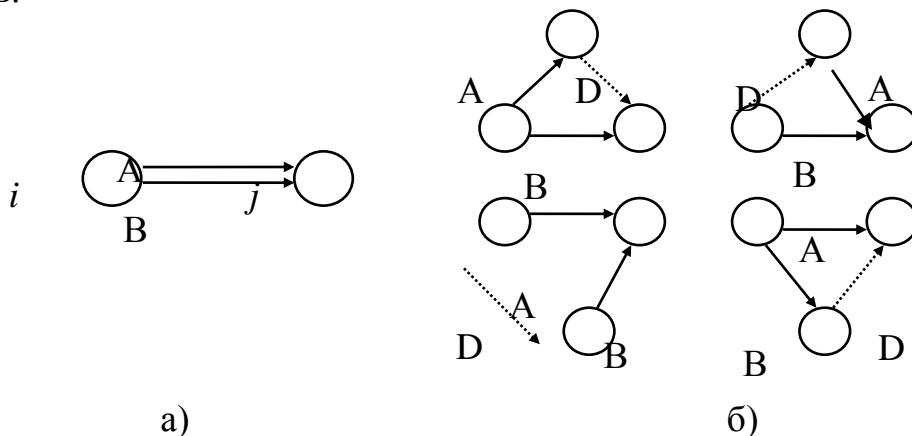


Рис. 2. Приклад введення фіктивної операції

Фіктивні операції дозволяють також правильно відобразити логічні зв'язки, які без їхньої допомоги не можна задати на мережі.

Припустимо, що в деякій програмі операції А і В повинні безпосередньо передувати операції С, а операції Е передують тільки В. На рис. 3а ці умови відбиті невірно, тому що хоча упорядкування між А, В і С показано правильно, із цього фрагмента випливає, що операції Е повинні безпосередньо передувати обидві операції А і В.

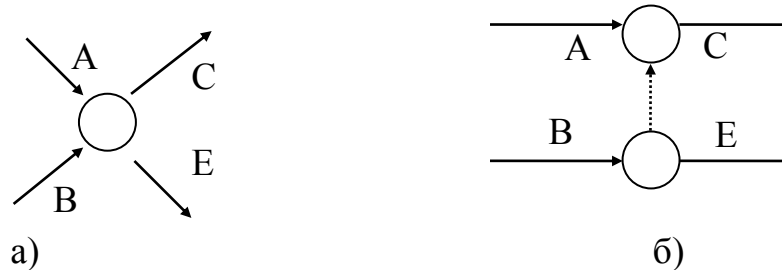


Рис. 3. Упорядкування операцій програми за допомогою фіктивної операції

Правильне подання зазначених умов дає фрагмент на рис. 3.3б, у якому використовується фіктивна операція D. Оскільки на операцію D не затрачаються час і ресурси, задані відношення упорядкування виконуються.

**Правило 3.** Для забезпечення правильного упорядкування при безпосередньому внесенні будь-якої операції в мережну модель необхідно відповісти на наступні питання:

1. Які операції необхідно завершити перед початком операції, яка розглядається?
2. Які операції повинні безпосередньо починатися після завершення даної операції?
3. Які операції можуть виконуватися одночасно з операцією, що розглядається?

Це правило не вимагає пояснень. Воно дозволяє перевірити відношення упорядкування в процесі побудови мережної моделі.

## 2. Визначення «критичного шляху».

Методи сіткового планування і керування в кінцевому рахунку повинні забезпечити одержання календарного плану, що визначає терміни початку і закінчення кожної операції. Перший крок – побудова мережі. Далі необхідно провести розрахунки, у результаті яких визначаються критичні і некритичні операції. Операція вважається **критичною**, якщо затримка її початку приводить до збільшення терміну закінчення всієї програми.

Операція називається **некритичною**, якщо проміжок між її раннім початком і пізнім закінченням (у рамках розглянутої програми) довше її фактичної тривалості. У такому випадку говорять, що некритична операція має резерв або запас часу.

Критичний шлях визначає безперервну послідовність критичних операцій, що зв'язують вихідну і завершальну події програми. Іншими словами, критичний шлях задає всі критичні операції програми.

Розрахунок критичного шляху включає два етапи.

**Етап 1** називається прямим проходом. Обчислення починаються з вихідної події і продовжуються доти, поки не буде досягнута завершальна подія всієї мережі. Для кожної  $i$ -ї події обчислюється одне число –  $ES_i$ , що представляє ранній термін її настання. Таким чином,  $ES_i$  – ранній термін початку всіх операцій, що виходять з події  $i$ .

Якщо прийняти  $i=0$ , тобто вважати, що номер вихідної події мережі дорівнює нулю, то при розрахунку мережі  $ES_0=0$ .

Позначимо символом  $D_{ij}$  тривалість операції  $(i,j)$ .

Тоді обчислення при прямому проході визначаються за формулою

$$ES_j = \max_i \{ES_i + D_{ij}\} \text{ для всіх операцій } (i,j), \text{ де } ES_0=0. \quad (1)$$

Отже, щоб обчислити  $ES_j$  для події  $j$ , потрібно спочатку визначити  $ES_i$  початкових подій *всіх* операцій  $(i,j)$ , що входять у подію  $j$ .

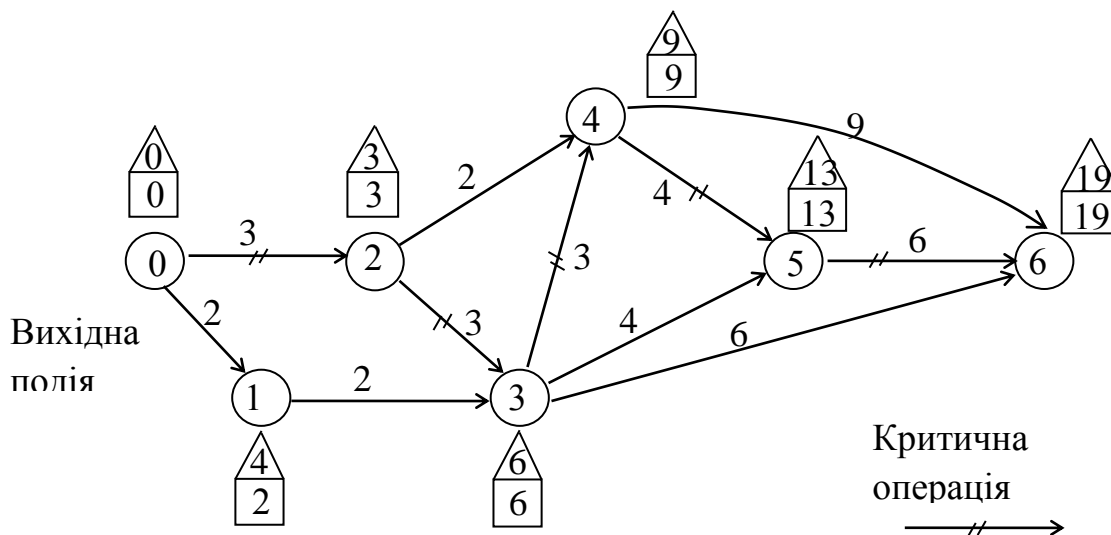
Такі розрахунки проводяться для всіх подій мережі, від початкової до завершальної. Прийmemo  $n$  – номер завершальної події мережі.

**Етап 2** має назву зворотній проход. Обчислення починаються з завершальної події мережі і продовжуються, поки не буде досягнута вихідна подія. Для кожної події обчислюється величина  $LC_i$ , що представляє пізній термін його настання.

Число  $LC_i$  означає пізній термін закінчення всіх операцій, що входять у подію  $i$ . Таким чином  $LC_n=ES_n$ , що є відправною точкою зворотного проходу. У загальному випадку для будь-якої події  $i$

$$LC_i = \min_j \{LC_j - D_{ij}\} \text{ для всіх операцій } (i,j). \quad (2)$$

**Приклад 3.1.** Розглянемо мережну модель, показану на рис. 4 з вихідною подією 0 і завершальною подією 6. Оцінки часу, необхідного для виконання кожної операції, дані біля стрілок.



#### Рис. 4 – Мережна модель

Обчислення при прямому проході починаються з  $ES_0=0$ , як показано в квадраті над подією 0. Оскільки в подію 1 входить тільки одна операція (0,1) тривалістю  $D_{01} = 2$ ,

$$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0 + 2 = 2.$$

Цей результат записаний у квадраті біля події 2. Розглянемо подію 2. Відмітимо, що подію 3 поки розглядати не можна, тому що термін  $ES_2$  (подія 2) ще невідомий. Таким чином,

$$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Помістимо цей результат у квадрат у події 2. Перейдемо тепер до події 3. Оскільки в нього входять дві операції (1,3) і (2,3)

$$ES_3 = \max_{i=1,2} \{ES_i + D_{i3}\} = \max\{2+2; 3+3\} = 6.$$

Цей результат також записаний у квадрат у події 3. Аналогічні обчислення продовжуються, поки не будуть визначені значення  $ES_j$  для всіх  $j$ . Маємо

$$ES_4 = \max_{i=2,3} \{ES_i + D_{i4}\} = \max\{3+2; 6+3\} = 9,$$

$$ES_5 = \max_{i=3,4} \{ES_i + D_{i5}\} = \max\{6+4; 9+4\} = 13,$$

$$ES_6 = \max_{i=3,4,5} \{ES_i + D_{i6}\} = \max\{6+6; 9+9; 13+6\} = 19.$$

На цьому обчислення прямого проходу закінчуються.

$$LC_6 = ES_6 = 19.$$

$$LC_5 = LC_6 - D_{56} = 19 - 3 = 13.$$

$$LC_4 = \min_{j=5,6} \{LC_j - D_{4j}\} = \min\{13 - 4; 19 - 9\} = 9,$$

$$LC_3 = \min_{j=4,5,6} \{LC_j - D_{3j}\} = \min\{6 - 0; 13 - 3; 19 - 2\} = 6,$$

$$LC_2 = \min_{j=3,4} \{LC_j - D_{2j}\} = \min\{6 - 3; 9 - 2\} = 3,$$

$$LC_1 = LC_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4,$$

$$LC_0 = \min_{j=1,2} \{LC_j - D_{0j}\} = \min\{4 - 2; 3 - 3\} = 0,$$

Обчислення при зворотному проході закінчені.

Використовуючи результати обчислень при прямому і зворотному проходах, можна визначити операції критичного шляху.

Операція  $(i,j)$  належить критичному шляху, якщо вона задовольняє наступним трьом умовам:

$$ES_i = LC_i, \tag{3}$$

$$ES_j = LC_j \tag{4}$$

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = D_{ij}. \tag{5}$$



Власне кажучи, ці умови означають, що між раннім терміном початку (закінчення) і пізнім терміном початку (закінчення) критичної операції запас часу відсутній. У мережній моделі це означає, що для критичних операцій числа, що містяться в квадратах і трикутниках біля початкових і кінцевих подій, збігаються, а різниця між числом у квадраті (трикутнику) у кінцевої події і числом у початковій події в квадраті (трикутнику) дорівнює тривалості відповідної операції.

На рис. 3.5 критичний шлях включає операції (0,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6). Критичний шлях визначає найкоротшу можливу тривалість усієї програми в цілому. Помітимо, що операції (2,4), (3,5), (3,6) і (4,6) задовольняють умовам (3.1) і (3.2), але не умові (3.3). Тому вони не є критичними. Відзначимо також, що критичний шлях являє собою безперервний ланцюжок операцій, що з'єднує вихідну подію мережі з завершальною.

### 3. Визначення резервів часу для некритичних операцій

Резерв часу для критичної операції дорівнює 0.

З кожною операцією  $(i,j)$  зв'язаний строк пізнього початку

$$LS_{ij} = LC_j - D_{ij} \quad (6)$$

і строк раннього закінчення

$$EC_{ij} = ES_i + D_{ij}. \quad (7)$$

Основними видами резервів часу некритичних операцій є повний резерв (TF) – різниця між максимальним відрізком часу, протягом якого може бути виконана операція  $(LC_j - ES_i)$  і її тривалістю  $D_{ij}$ .

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij} = LC_j - EC_{ij} = LS_{ij} - ES_i; \quad (8)$$

і вільний резерв часу (FF), що визначається в припущенні, що всі операції в мережі починаються в ранній термін. Тоді величина  $FF_{ij}$  для операції  $(i,j)$  представляє перевищення припустимого відрізка часу  $ES_j - ES_i$  над тривалістю операції  $D_{ij}$ .

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}. \quad (9)$$

**Висновки:** на лекції були розглянуті питання щодо задач, які ставляться на різних етапах планування виконання робіт. Розглянуті правила побудови сітьових графіків. Введено поняття «критичний шлях» та порядок його визначення. Розглянуто розрахунок резервів часу для некритичних операцій.

## Математичне моделювання та оптимізація систем пожежної сигналізації

1. Загальна постановка задачі
2. Моделювання сенсорної зони датчика
3. Формалізація умов розміщення датчиків та визначення  $\phi$ -функції
4. Побудова математичної моделі та моделювання задачі оптимізації довжини провідної мережі

### 1. Загальна постановка задачі

Задачі оптимального кругового покриття областей складної форми відносяться до класу NP-складних, для рішення яких використовуються, як правило, евристичні алгоритми. Для розробки ефективних алгоритмів, заснованих на застосуванні методів локальної й глобальної оптимізації, потрібна побудова адекватних математичних моделей, заснованих на аналітичному описі відносин між об'єктами в задачі покриття.

Розмаїтість початкових даних, що включають інформацію про форми, розміри геометричних об'єктів, технологічних обмеженнях і функції мети, породжує безліч оптимізаційних задач покриття. Але, незважаючи на різноманіття цих задач, усі вони можуть бути сформульовані в такий спосіб: необхідно деяку область, яка називається областю покриття, повністю покрити деякими об'єктами, які називаються покриваючими об'єктами, таким чином, щоб функція мети досягала екстремального значення, і при цьому дотримувалися технологічні обмеження.

Одним із варіантів технологічних обмежень можуть бути обмеження на мінімально й максимально припустимі відстані між центрами покриваючих об'єктів і границею області покриття, і між центрами "сусідніх" покриваючих об'єктів.

Розв'язання задач оптимального покриття було зорієнтовано, в основному, на використання ідеалізованих математичних моделей матеріальних об'єктів і їхніх взаємодій без урахування погрішності завдання вихідних даних. А так як мова йде про оптимізаційні задачі, актуальної стає проблема точності й вірогідності отриманих результатів.

У процесі забезпечення життєдіяльності суспільства виникає необхідність створення систем спостереження й контролю, у яких функція мети визначається не тільки як безпосереднє оцінювання характеристик і стану об'єкту, але й по якоїсь додатковій (наприклад, сигнальній) інформації. Фізична модель, що зв'язує характеристики об'єкта й спостережувальну інформацію, повинна бути побудована таким чином, щоб була можливість здійснити контроль і діагностування властивостей об'єкта.

Вартість і складність системи контролю й спостереження при дотриманні вимог до ймовірності виявлення сигналів залежать, в основному, від розмірів контрольованої площі або поверхні. Основні вимоги, що пред'являються до систем спостереження й контролю, наступні:

– система повинна виявляти джерела сигналів у будь-якій точці об'єкта, що контролюється; контроль за кожною точкою області, що контролюється, повинен бути здійснений при мінімальному числі контролюючих об'єктів (датчиків, приймачів і т.п.);

– вплив зовнішніх шумів, перешкод і дублювання фіксацій сигналів різними приймачами повинне бути мінімальним або повністю виключеним (тобто зони перекриття покриваючих об'єктів повинні бути мінімально можливими);

– вартість прокладки й експлуатації мереж (живильних, сигнальних і т.п.) повинна бути мінімальною за умови виконання двох попередніх пунктів.

У системах контролю й спостереження задачу можна обмежити виявленням зони виникнення сигналу, що не входить у діапазон припустимих параметрів. Реальні будівельні об'єкти, що мають складні конструкції, вимагають при створенні таких систем розробки схем розміщення датчиків або приймачів сигналів. При цьому кожна точка області, що контролюється, повинна перебувати в зоні дії хоча б одного приймача (датчика). Тому що область, яку контролює датчик, звичайно, представляють у вигляді кола, то якості адекватної моделі систем контролю й спостережень можна розглядати кругове покриття (покриття колами) області  $R^2$  з додатковими обмеженнями, що виникають із фізичних характеристик застосовуваної апаратури.

До числа таких систем спостереження відносяться й системи автоматичного протипожежного захисту об'єктів, які можуть складатися з декількох підсистем: системи пожежної сигналізації; системи автоматичного пожежогасіння; системи оповіщення про пожежу й управління евакуацією.

Розглянемо приклади задач проектування підсистем автоматичного протипожежного захисту, які можуть бути розглянуті як задачі покриття. До них можуть бути віднесені:

– задача розміщення пожежних сповіщувачів (технологічних датчиків) при проектуванні систем пожежної (технологічної) сигналізації (СПС);

– задача розміщення випускних насадків при проектуванні автоматичних систем водяного й пінного пожежогасіння (АСВПТ);

– задача розміщення генераторів вогнегасного аерозолу при проектуванні автоматичних систем аерозольного пожежогасіння;

– задача розміщення модулів систем порошкового пожежогасіння.

При цьому в ході розв'язання оптимізаційних задач не слід обмежуватись лише етапом розміщення чутливих елементів систем спостереження. Актуальним є і побудова мереж (дротяних, без дротяних, трубопровідних та ін.), що їх поєднують.

На підставі перерахованого вище можна сформулювати базову оптимізаційну задачу (ВОСР).

Нехай  $\Omega$  – багатозв'язна область, яка обмежена дугами окружностей і відрізками прямих,  $T_i, i=1, \dots, n$  – кола заданих радіусів. Необхідно покрити область  $\Omega$  колами  $T_i, i=1, \dots, n$  так, щоб кількість об'єктів, що покривають, була мінімальна. При цьому повинен виконуватися ряд спеціальних обмежень, а довжина ламані, яка з'єднує центри кіл, повинна бути мінімальною.

## 2. Моделювання сенсорної зони датчика

Перш ніж перейти до формалізації аналітичного опису відносин між геометричними об'єктами в задачі кругового покриття довільної області сенсорними зонами датчиків, необхідно вказати спосіб визначення радіуса таких зон (радіуса чутливості датчика).

При завданні зазначеного радіуса можна використовувати підхід, що застосовувався раніше: для всіх приміщень, що мають однакові розміри, приймалася однакова площа відповідно до нормативної літератури і відповідно однаковий радіус. При такому підході не враховуються особливості розвитку пожежі в приміщенні, що захищається. Якщо при виборі радіуса враховувати пожежне навантаження приміщення, що захищається, характер виникнення й розвитку пожежі та ін. особливості, то ця величина для кожного окремого об'єкта, що захищається, може мати своє значення, навіть для приладів однієї марки. Тобто площа, що захищається пожежним сповіщувачем (ПС), це величина, що обчислюється в ході рішення задачі, і залежить від величин, що характеризують осередок загоряння, які і є дійсно вихідними даними.

Зазвичай передбачається, що різні типи датчиків мають різні діапазони чутливості. Деякі дослідники навіть стверджують, що один сенсорний блок може мати різні діапазони чутливості. Зазвичай вважається, що датчик споживає більше енергії, коли він використовує більший діапазон чутливості. Контрольована точка може бути розташована усередині більш ніж однієї сенсорної зони. Тому деякі дослідники вводять змінний параметр чутливості  $z$  й враховують міру покриття точки щодо кожного окремого датчика. У літературі відомо три основних моделі сенсорної області: з дискретно загасаючою чутливістю (Рис 2.1 а), із гладко загасаючою чутливістю (Рис 2.1 б) і комбінованою (Рис 2.1 в).

Отримані вирази для визначення радіуса, що захищається димовими й тепловими ПС:

$$R_{\text{контр}} = Q \cdot V_M \cdot \eta \cdot S_{\text{гор}} \cdot \left( \frac{5,38}{(T_{\text{max}} - T_{\text{пом}}) \cdot H_{\text{п}}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.1)$$

- для теплових,

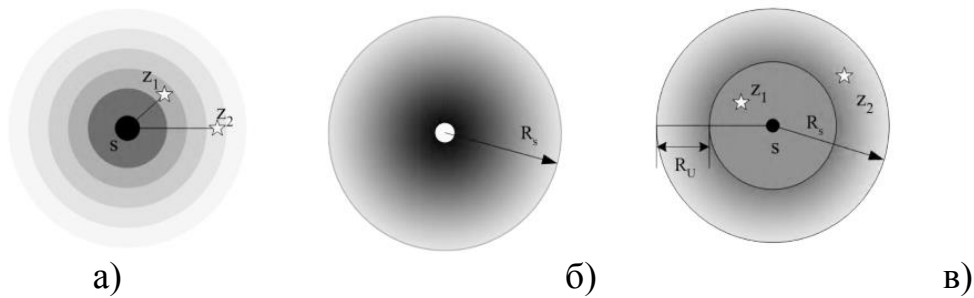


Рисунок 2.1 – Ілюстрація моделей сенсорних зон: а) – з дискретно загасаючою чутливістю; б) – гладко загасаючою чутливістю; в) – комбінованою

$$R_{контр} = 2,9 \cdot \frac{\left[ \left( \sqrt{\frac{S_{доп}}{2,5 \cdot V_{\Pi}^2}} - \frac{\tau_{ГС}}{4} \right) / \left( 2,1 \cdot \left( \frac{H_{\Pi}^4}{q} \right)^{0,2} \right) \right]^2}{\left[ -\lambda \cdot \ln \left( 1 - \frac{m_{пор}(\%)}{100} \right) \right] / \left( 11,2 \cdot \frac{D_M}{Q} \cdot \left( \frac{q}{H_{\Pi}^3} \right)^{0,2} \right)^2} \quad (2.2)$$

- для димових.

При визначенні погрішності завдання вихідних даних виникає ряд труднощів пов'язаних з відсутністю достатньої кількості інформації, занадто приблизним визначенням цих величин на практиці. Для ряду величин були прийняті рекомендації, а саме: коефіцієнт хімічного недопалу  $\eta$ , необхідний для визначення радіуса теплового ПС, і коефіцієнт поправки на дим  $\lambda$ , що як і  $\eta$  необхідний для обчислення  $m_{пор}$  при визначенні радіуса димового ПП. Ці коефіцієнти приймаються рівними 0,7 і 0,8 відповідно. Причому вони мають таке значення як при визначенні верхньої, так і нижньої межі інтервалу радіуса. При визначенні погрішності завдання  $Q$  – нижньої теплоти згоряння речовини й  $V_M$  – масової швидкості вигорання використовувалися результати стандартних дослідів і були прийняті величини 4% і 5% відповідно.

Метричні характеристики області покриття також задаються з погрішностями. Але варто відзначити, що величина погрішності виміру розмірів побутовими приладами невелика й істотного впливу на кінцевий результат не дає.

Нормативними даними, які використовуються в якості вихідних, є залежність величини площі, що захищається ПС, від висоти приміщення. Результати рішення задачі не повинні перевищувати нормативні вимоги. У ході досліджень, за допомогою математичної системи Mathcad була

проведена інтерполяція залежності площі, що захищається, від висоти приміщення. Результати роботи наведені на рис. 2.2, 2.3.

Тобто у кожному конкретному випадку відповідно до формул (2.1) або (2.2) і значеннями погрешностей вихідних даних визначається інтервал зміни  $R_{\text{контр } i}$  і, відповідно,  $S_{\text{контр}}$ . Потім отримані значення порівнюються зі значенням інтерпольованої функції для конкретного значення висоти приміщення. У випадку якщо максимальне значення інтервалу не перевищує значення функції, то інтервал залишається незмінним. Якщо перевищує, то за верхню оцінку приймається значення інтерпольованої функції. Якщо й нижній оцінці перевищує значення функції, то результат являє собою не інтервал, а абсолютне значення, що дорівнює значенню інтерпольованої функції.

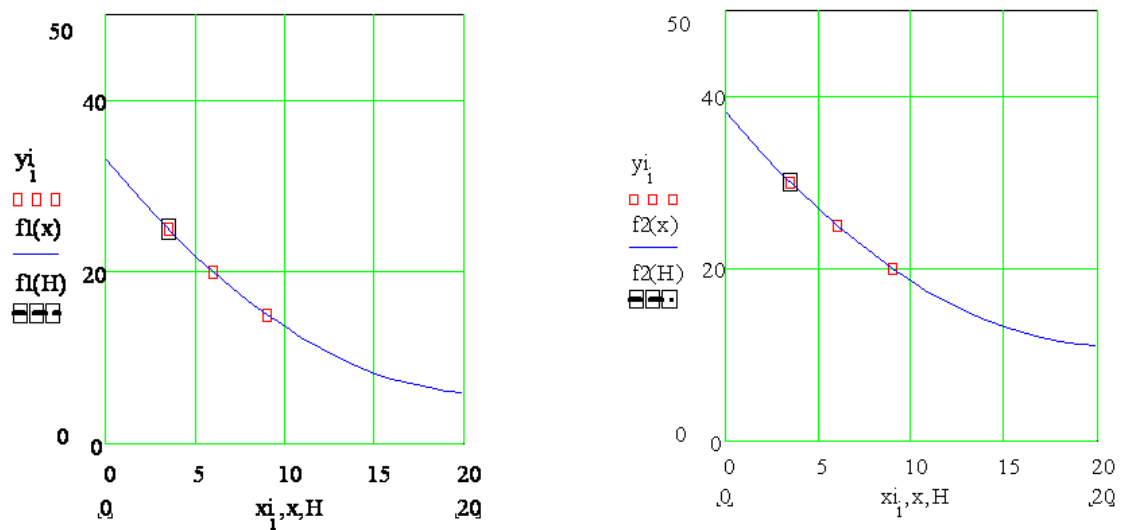


Рисунок 2.2 – Інтерполяція залежності площі, що захищається, від висоти приміщення: а) – для теплових ПС при квадратичній схемі; б) – для теплових ПС при трикутній схемі

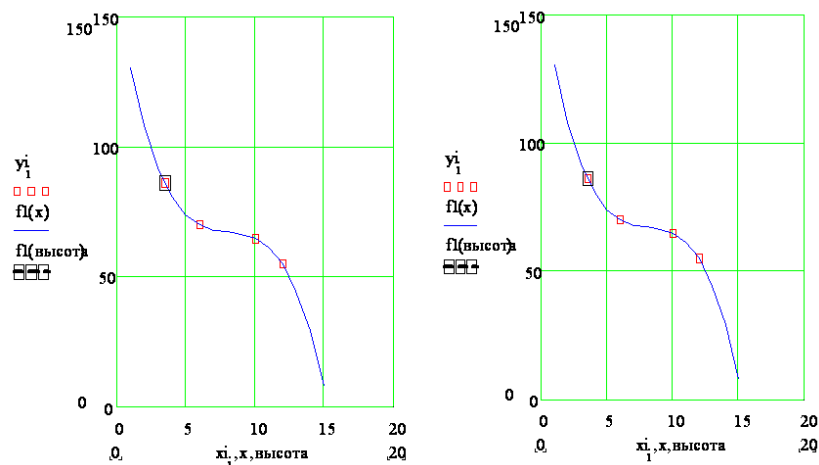


Рисунок 2.3 – Інтерполяція залежності площі, що захищається, від висоти приміщення: а) – для димових ПС при квадратичній схемі; б) – для димових ПС при трикутній схемі.

У такий спосіб по закінченню етапу підготовки вихідних даних для рішення задачі розміщення ПС маємо:

– нормативну інформацію, що регламентує положення ПС друг відносно друга й відносно стін приміщення, що захищається, необхідна для побудови області припустимих рішень;

– інтервал зміни радіуса області, що захищається ПС, узгоджений з вимогами.

Тобто можна переходити до етапу безпосереднього розміщення ПС, результат якого буде не тільки враховувати нормативні вимоги, а й особливості пожежного навантаження в приміщенні, розвитку пожежі, можливість завдання вихідних даних з похибкою.

### **3. Формалізація умов розміщення датчиків та визначення $\phi$ -функції**

На відміну від більшості розглянутих у літературі задач покриття, у задачі побудови мережі пожежної сигналізації, що розглядається, на можливе положення датчиків накладають додаткові умови технологічного характеру. Це пояснюється тим, що сенсори, як реальні тіла фізичного миру, повинні знаходитись в приміщенні й при цьому не перетинатися між собою й із зонами заборони (балками, плафонами освітлення, повітряпроводами, колонами, декоративними елементами й т.п.).

Усього для задачі покриття області сенсорними зонами датчиків пожежної сигналізації зустрічаються три типи технологічних відносин між геометричними об'єктами:

- умови взаємного попарного неперетинання (або розміщення не менш, ніж на мінімально припустимій відстані) датчиків між собою;
- умови належності датчиків області з урахуванням зон заборони;
- розміщення на максимально припустимій відстані «сусідніх» датчиків (датчиків, сенсорні зони яких перетинаються).

Для формалізації обмежень зазначеного типу доцільно використовувати апарат  $\phi$ -функцій.

У класі задач геометричного проектування, до якого належить розглянута задача, як математичні моделі двовимірних об'єктів використовуються  $\phi$ -об'єкти.  $\phi$ -Об'єктом називається непуста точкова множина  $A \in R^2$ , що задовольняє наступним вимогам:  $A$  - канонічно замкнута множина; внутрішність і замикання множини  $A$  мають однаковий гомотопічний тип.

Об'єкт  $A$ , повернений на кут  $\theta_A$  і трансльований на вектор  $v_A = (x_A, y_A)$ , позначається як  $A(u_A)$ ,  $u_A = (v_A, \theta_A)$ . При цьому будь-якій точці  $p$  вихідного об'єкта  $A(0, 0, 0)$  відповідає точка  $p' = v_A + p \cdot M(\theta_A)$ , де

$$M(\theta_A) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} - \text{матриця оператора повороту площини.}$$

Безперервна, усюди визначена функція  $\Phi: R \rightarrow R$  називається  $\rho$ -функцією об'єктів  $A(u_A)$  і  $B(u_B)$ , якщо вона задовольняє наступним характеристичним властивостям  $\Phi(u_A, u_B) \in \mathbb{R}$ , якщо об'єкти мають спільні внутрішні точки;  $\Phi(u_A, u_B) \in \mathbb{R}$ , якщо об'єкти торкаються;  $\Phi(u_A, u_B) \in \mathbb{R}$ , якщо об'єкти  $A(u_A)$  і  $B(u_B)$  не мають спільних точок.

**Критерій покриття.** Для того, щоб множина  $Y = \bigcup_{i=1}^n C_i$  була не виродженим круговим покриттям множини  $\Omega$ , необхідно й досить, щоб:

- кожна точка  $p_k \in P$  належала хоча б одному об'єкту  $\text{int } C_i, i \in I_n$ ;
- кожна точка  $t \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } \Omega, i \in I_n$ , належала хоча б одному об'єкту  $\text{int } C_j, j \in I_n, i \neq j$ ;
- кожна точка  $t \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j, i, j \in I_n, i \neq j$ , що належить  $\text{int } \Omega$ , належала хоча б одному об'єкту  $\text{int } C_s, s \in I_n, s \neq i, s \neq j$ .

#### 4. Побудова математичної моделі та моделювання задачі оптимізації довжини провідної мережі

Нехай задана замкнута обмежена область  $\Omega \subset R^2$  із кусочно-гладкою границею, яка сформована  $L$  фрагментами аналітично описаних кривих (наприклад, відрізками прямих і дугами окружностей), і множина кіл  $C = \{C_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Кількість фрагментів  $L$  може бути рівним одиниці (а  $\Omega$  являти собою, наприклад, коло). Далі передбачається, що  $C_i = C_i(u_i) = C_i(x_i, y_i)$ , точка  $u_i$  збігається із центром  $C_i$ . Вектор  $u_i$  називається вектором трансляції або вектором параметрів розміщення кола  $C_i$ . Нагадаємо, що об'єднання  $Y = \bigcup_{i=1}^n C_i$  називається круговим покриттям області  $\Omega$ , якщо  $\Omega \subseteq Y$ .

Постановка задачі. Знайти покриття  $Y$  області  $\Omega$ , що задовольняє системі технологічних обмежень, які накладаються на вектор параметрів розміщення кіл, і оптимальне відповідно до деякого критерію якості  $F(u), u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

З очевидних міркувань виключимо надалі з розгляду покриття, у яких є надлишкові кола, тобто вважаємо, що  $\Omega \not\subset Y \setminus C_i, \forall i \in I_n$ .

Також без порушення спільності для спрощення викладень не будемо розглядати покриття, для яких хоча б одна із границь компонентів зв'язності  $\Omega$  не має спільних точок із границями кіл з  $Y$ . Якщо така ситуація зустрічається, то або відповідна компонента зв'язності покрита одним колом і може бути виключена з розгляду, або умова покриття для даної компоненти не виконується.



Сформуємо множину  $P$  точок  $p_k$ , у яких порушується гладкість границі  $\Omega$ , і позначимо  $K$  потужність множини  $P$ .

Надалі вважаємо, що кривизна границі в будь-якій її точці, крім точок з  $P$ , менше кривизни кіл з множини  $C$ . Для ділянок границі з порушенням цієї умови будується зовнішня апроксимація фрагментами кривих меншої кривизни.

Перепишемо критерій повноти покриття, сформульований у попередньому розділі, у вигляді: для того, щоб множина  $Y = \bigcup_{i=1}^n C_i$  була невідродженим круговим покриттям множини  $\Omega$ , необхідно й достатньо, щоб:

- для кожної точки  $p_k \in P$  нашлося хоча б одне коло  $C_i, i \in I_n$  таке, що  $p_k \in \text{int } C_i$ ;
- для будь-якої точки  $t_{ik}^* \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } \Omega, i \in I_n, k \in \{1, 2\}$  нашлося хоча б одне коло  $C_{j_k}, j \in I_n, i \neq j$ , таке, що  $t_{ik}^* \in \text{int } C_{j_k}$  й, відповідно, точка  $t_{ijk} \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j$  належить  $\Omega^*$ ;
- для будь-якої точки  $t_{ijk} \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j, i, j \in I_n, i \neq j, t_{ijk} \in \text{int } \Omega, k \in \{1, 2\}$ , існує  $C_{s_k}, s \neq i, s \neq j$ , таке що,  $t_{ijk} \in \text{int } C_{s_k}$ .

При використанні кіл однакового радіуса координати точок виду  $t_{ijk}$  можуть бути визначені аналітично на основі виразів виду (2.1)-(2.2).

При побудові математичної моделі виконання першого критерію забезпечується додаванням у систему обмежень задачі нерівностей виду  $\varphi^{p_k C_i} \geq 0$ , другого критерію – нерівностей виду  $\varphi^{t_{ik}^*} \geq 0$ , третього критерію – нерівностей виду  $\varphi^{t_{ijk}} \geq 0$ , де  $\varphi^{p_k C_i}, \varphi^{t_{ijk}}$  – функції належності а  $\varphi^{t_{ik}^*}$ , залежно від виду області  $\Omega^*$ , може бути функцією належності або квазі-функцією належності.

Нехай дано невідроджене покриття  $Y$  області  $\Omega$  колами однакового радіуса й необхідно оптимізувати деякий критерій якості. Якщо  $Y$  не містить у собі  $\Omega$ , можна збільшувати радіус формуючих  $Y$  кіл доти, поки не буде вдоволен критерій покриття.

Побудуємо для покриття  $Y$  наступні індексні множини:

– множина  $\Xi_1$ , елементами якої є пари чисел, що складаються з номерів точок з множини  $P$  й номерів кіл, що задовольняють умовам пункту 1 критерію покриття області;

– множина  $\Xi_2$ , елементами якої є трійки чисел, що складаються з номерів двох кіл, що перетинаються, і номерів точок перетинання кіл, що задовольняють умовам пункту 2 критерію покриття області колами;

– множина  $\Xi_3$ , елементами якої є четвірки чисел, що складаються з номерів трійок кіл, що перетинаються, і номерів точок перетинання, що задовольняють умовам пункту 3 критерію покриття області колами.

Тоді на підставі засобів моделювання відносин між об'єктами в задачах кругового покриття у вигляді  $\phi$ -функцій, квазі- $\phi$ -функцій, функцій належності й квазі-функцій належності, що розглянуті у попередньому розділі, досить загальна математична модель задачі покриття може бути записана у вигляді

$$\underset{u \in W \subset R^\delta}{extr} F(u), \quad (2.3)$$

$$W = \{u \in R^\delta : \varphi^{p_k C_i} \geq 0 \forall (i, k) \in \Xi_1, \varphi^{t_{ijk} \Omega^*} \geq 0, \Phi_-^{C_i C_j} \geq 0 \forall (i, j, k) \in \Xi_2, \varphi^{t_{ijk} C_{sk}} \geq 0, \Phi_-^{C_i C_j} \geq 0 \forall (i, j, s, k) \in \Xi_3, \Psi \geq 0\}, \quad (2.4)$$

де

$$\sigma = 2n + l;$$

$l$  – кількість додаткових змінних, що залежить від постановки задачі, обраних засобів моделювання відносин між геометричними об'єктами й виду технологічних обмежень задачі;

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n, t)$  – вектор змінних задачі;

$t$  – вектор додаткових змінних задачі;

$u_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – параметри розміщення  $i$ -го кола;

$\varphi^{p_k C_i}$ ,  $\varphi^{t_{ijk} C_{sk}}$  – функції належності;

$\varphi^{t_{ijk} \Omega^*}$  – функції (або квазі-функції) належності (залежно від виду області  $\Omega$  й обраних засобів моделювання відносин між геометричними об'єктами);

$t_{ijk} = f(u_i, u_j, k)$ ,  $k \in \{1, 2\}$  – точка перетинання окружностей  $C_i$  і  $C_j$ ;

$f(u_i, u_j, k)$ ,  $k \in \{1, 2\}$  – функція, що побудована на основі виражень виду (2.26)-(2.29), яка розраховує координати точок перетинання окружностей  $C_i$  і  $C_j$ ;

$\Phi_-^{C_i C_j} = 4r^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2$  – псевдонормалізована  $\phi$ -функція, що формалізує умови розміщення пари кіл на максимально припустимій відстані  $\rho = 0$ ;

$\Psi(u)$  – система допоміжних обмежень (наприклад, умов належності центрів кіл області  $\Omega$ ).

Для моделювання задачі оптимізації провідної сенсорної мережі для системи пожежних сповіщувачів до моделі (2.3)–(2.3) вносяться наступні зміни:

– у систему додаткових обмежень вносяться умови належності сенсорів області з урахуванням мінімально припустимих відстаней до границі області (у загальному випадку описуються за допомогою мінімаксних  $\phi$ -функцій);

– у систему додаткових обмежень вносяться умови неналежності центрів сенсорів областям заборони (у загальному випадку описуються за допомогою мінімаксних  $\rho$ -функцій);

– у систему додаткових обмежень задачі вносяться мінімально припустимі відстані між центрами сенсорів (описуються за допомогою всюди гладкої  $\rho$ -функції);

– мінімізується функція цілі, що представляє собою довжину траси.

Відповідні послідовності кіл для кільцевого та радіального типу дровових з'єднань розраховуються шляхом розв'язання допоміжних задач комівояжера та задачі маршрутизації відповідно.

Для кільцевого типу дровових з'єднань функція цілі може бути записана у вигляді  $\rho(u_0, u_{m_1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho(u_{m_i}, u_{m_{i+1}}) + \rho(u_{m_n}, u_0)$ , де  $m_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  –

номера кіл,  $m_i \neq m_j, i \neq j$ ;  $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(u_{m_i}, u_{m_{i+1}})$  – сума відстаней між центрами кіл,

взятих у певній послідовності  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ;  $\rho(u_0, u_{m_1})$  і  $\rho(u_{m_n}, u_0)$  – відстані від точки початку траси  $u_0$  до центра першого й останнього в обраній

послідовності кола відповідно. Для радіального типу провідних з'єднань функція цілі може бути представлена у вигляді

$\sum_{q=1}^Q (\rho(u_0, u_{m_1^q}) + \sum_{i=1}^{n_q-1} \rho(u_{m_i^q}, u_{m_{i+1}^q}))$  де  $Q$  – кількість шлейфів;  $m_i^q \in \{1, 2, \dots, n\}$  –

номера кіл,  $m_i^q \neq m_j^q, i \neq j, q = 1, 2, \dots, Q, m_i^{q_1} \neq m_j^{q_2}, q_1 \neq q_2, q_1, q_2 = 1, 2, \dots, Q,$

$\sum_{q=1}^Q n_q = n$ ; доданок  $\sum_{i=1}^{n_q-1} \rho(u_{m_i^q}, u_{m_{i+1}^q})$  – сума відстаней між центрами кіл, узятих у

певній  $q$ -й послідовності  $m_1^q, m_2^q, \dots, m_{n_q}^q$ ;  $\rho(u_0, u_1^q)$  – відстань від точки початку траси  $u_0$  до центра першого в  $q$ -й послідовності кола. Тут

$\rho(u_1, u_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  – відстань між точками  $u_1$  й  $u_2$ .

**Висновки:** На лекції розглянуті низка питань щодо математичного моделювання та оптимізація систем пожежної сигналізації

## Лекція № 10

### Математичні методи визначення параметрів систем водяного та пінного пожежогасіння

1. Нормативні вимоги до розміщення зрошувачів
2. Моделювання схем розміщення зрошувачів.
3. Математична модель задачі розміщення зрошувачів.

#### **1. Нормативні вимоги до розміщення зрошувачів.**

Ефективність роботи будь-якої технічної системи контролю і спостереження, до яких відносяться і автоматичні установки пожежогасіння, залежить від часу виявлення змін контрольованої ознаки. А це час, в свою чергу, залежить від «якості» розміщення пристроїв виявлення.

Крім того, не варто забувати про загальну вартість і складності системи. Їх завищення може привести до невиправданих витрат по створенню і поточному обслуговуванню.

Вартість і складність системи контролю і спостережень при дотриманні вимог до ймовірності виявлення сигналів залежать в основному від розмірів контрольованої площі або поверхні. Основні вимоги, що пред'являються до систем спостереження і контролю, такі: система повинна виявляти джерела сигналів в будь-якій точці контрольованого об'єкта; контроль за кожною точкою спостерігається області повинен бути здійснений при мінімальному числі контролюючих об'єктів (датчиків, приймачів і т.п.); вплив зовнішніх шумів, перешкод і дублювання фіксацій сигналів різними приймачами має бути мінімальним або виключено (тобто зони перекриття покривають об'єктів повинні бути мінімально можливими).

У системах контролю і спостереження завдання можна обмежити виявленням зони виникнення сигналу, що не входить в діапазон допустимих параметрів. Реальні об'єкти, що мають складні конструкції, вимагають при створенні цих систем розробки спеціальних схем розміщення датчиків або приймачів сигналів. При цьому кожна точка контрольованої області повинна знаходитися в зоні дії хоча б одного приймача (датчика). З огляду на перелічені вимоги до систем контролю і спостереження, сформулюємо критерії оптимізації, за якими ведеться контроль і спостереження. Це число приймачів сигналів, геометричні характеристики галузі контролю і т.д. Отже, в якості завдання оптимізації систем контролю і спостережень можна розглядати задачі покриття. Під областю покриття будемо розглядати контрольовану поверхню, а під покривають множинами - геометричні об'єкти тієї ж конфігурації, що і зони впевненого прийому сигналів (зони контролю датчиків).

Під датчиками контролю в установках водяного пожежогасіння розуміються зрошувачі. Зрошувачі в установках виконують подвійну функцію. По-перше, в спринклерних установках і в гідравлічних

(пневматичних) спонукальних системах дренчерних установок, вони виконують роль чутливих елементів, що виявляють факт виникнення пожежі. По-друге, через зрошувачі подається вогнегасна речовина, що забезпечує виконання основної функції установок пожаротушення- ліквідації пожежі.

І, в зв'язку з цим, кожна точка приміщення, що підлягає повинна контролюватися мінімум одним зрошувачем для того, щоб, по-перше, не було «мертвих зон» при виявленні пожежі, а, по-друге, кожна точка приміщення повинна зрошуватися вогнегасною речовиною.

Зрошувачі, як правило, розташовуються на стелі приміщення, що підлягає і зона, контрольована таким приладом, являє собою коло деякого радіуса  $R$ , що визначається його технічними характеристиками, з максимальним відгуком у межах центрі, представляє собою кругову проекцію радіуса  $r$  зрошувача на підлогу приміщення, і зменшенням чутливості в міру віддалення від нього.

Таким чином, представивши приміщення, що підлягає у вигляді довільної області покриття, а зони, контрольовані зрошувачами в вигляді покривають кіл, можна сформулювати це завдання, як завдання покриття. При цьому слід зазначити, що в математичній моделі задачі будуть присутні додаткові технологічні обмеження: необхідно область довільної просторової форми  $T_0$  повністю покрити колами  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  заданого радіуса таким чином, щоб кожна точка області  $T_i$ , належала хоча б одному з об'єктів, а кількість покривають об'єктів було мінімальним. При цьому повинен виконуватися ряд спеціальних обмежень.

Одним з обмежень будемо вважати необхідність використання тільки регулярного (гратчастої) покриття. Це обмеження пов'язане з тим, що прокладку трубопроводів розподільної мережі доцільно виконувати по-прямій. Наявність додаткових фасонних частин в системі трубопроводів підвищує втрати напору і ускладнює процес монтажу.

Крім того нормативними документами обмовляється максимально допустима відстань між сусідніми зрошувачами і від крайнього зрошувача до стіни.

Теоретико-множинна модель поставленої задачі має вигляд:

$$T_0 \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n T_i \right] = T_0 \quad (1)$$

Вираз (1) описує умову покриття, при виконанні якого кожна точка області  $T_0$  належить хоча б одному з об'єктів,  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

Математичну модель поставленої задачі можна наступним чином: визначити

$$\text{extr}_{Z \in D \subset \mathbb{S}^{2n}(\mathbb{R})} \theta(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \quad (2)$$

де  $Z_i = (\langle X \rangle_i, \langle Y \rangle_i)$  – координати центра кола  $T_i$ ,  $i \in I_n$  у фіксованій системі координат, яка збігається з власною системою координат області  $T_0$ ;

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = ((\langle X \rangle_1, \langle Y \rangle_1), (\langle X \rangle_2, \langle Y \rangle_2), \dots, (\langle X \rangle_n, \langle Y \rangle_n)) = ((\langle x_1, v_{x_1} \rangle, \langle y_1, v_{y_1} \rangle), (\langle x_2, v_{x_2} \rangle, \langle y_2, v_{y_2} \rangle), \dots, (\langle x_n, v_{x_n} \rangle, \langle y_n, v_{y_n} \rangle));$$

$D \subset I_S^{2n}(\mathbb{R})$  – область допустимих рішень. Область формується, виходячи з умови (2), а також з урахуванням ряду додаткових спеціальних обмежень, наявність яких обумовлено вимогами нормативної літератури [1].

В роботі [2] наведено загальну характеристику і формальна постановка задач покриття. Авторами приділено увагу формалізації умов покриття з використанням апарату  $\Phi$ -функцій,  $\square$ -функцій, структур лінійних нерівностей.

Розглянемо більш докладно кожен з обмежень задачі.

При розміщенні зрошувачів кожна точка приміщення, що підлягає повинна контролюватися хоча б одним приладом. Далі будемо вважати, що в разі виникнення пожежі в межах області, контрольованій зрошувачем, ймовірність його виявлення дорівнює одиниці, тобто виявлення - подія достовірне.

Розглянемо більш докладно кожен з обмежень задачі.

При розміщенні зрошувачів кожна точка приміщення, що підлягає повинна контролюватися хоча б одним приладом. Далі будемо вважати, що в разі виникнення пожежі в межах області  $T_i$ , контрольованій зрошувачем, ймовірність його виявлення дорівнює одиниці, тобто виявлення - подія достовірне.

## 2. Моделювання схем розміщення зрошувачів.

Проектування схем розміщення зрошувачів передбачає дотримання ряду нормативних розмірів. Залежно від типу приміщення, що підлягає в нормативній літературі [1] наводяться максимальні відстані між зрошувачами і від зрошувача до стін цього приміщення.

Проекція зрошувача на площину, якій належить множина  $T_0$ , являє собою коло  $C^-$  радіуса  $r^-$ , що визначається габаритними розмірами приладу. Область  $T_0^-$  можливого розташування центрів покривають об'єктів  $T_1, T_2, \dots, T_n$  с урахуванням  $r^-$  можна описати таким чином:

$$T_0^- = \text{cl}(E^2 \setminus (\text{cl}(E^2 \setminus T_0) \oplus C^-)), \quad (3)$$

де  $\oplus$  – операція суми Мінковського;

$\text{cl}(\cdot)$  – операція топологічного замикання.

Назвемо крайніми - об'єкти, для яких виконується умова

$$T_i \cap \text{fr}T_0 \neq \emptyset, i \in I_n.$$

Максимально допустима відстань між центрами крайніх покривають об'єктів і кордоном області покриття  $T_0$  має бути не більше ніж  $r_0^+$ , де  $r_0^+$  величина визначається нормативною літературою [1]  $r^- < r_0^+ < R$ .

Тоді, область  $T_0^+ \subset \mathbf{I}_S^{2n}(\mathbf{R})$  припустимого розташування центрів об'єктів, що покривають  $T_1, T_2, \dots, T_n$  з урахуванням  $r_0^+$  можна визначити наступним чином:

$$T_0^+ = (\text{cl}(E^2 \setminus T_0) \oplus C^+) \cap T_0, \quad (4)$$

де  $C^+$  – круг радіуса  $r_0^+$ .

Пусть

$$T^* = \text{cl}(E^2 \setminus T_0). \quad (5)$$

Позначимо через  $T' \subset \mathbf{I}_S^{2n}(\mathbf{R})$  область, якої можуть належати центри крайніх об'єктів, а через  $T'' \subset \mathbf{I}_S^{2n}(\mathbf{R})$  – область, якої можуть належати центри інших об'єктів, що належать області  $T_0^-$ . Тоді, враховуючи (3), (4), маємо

$$T' = (T_0^+ \cap T_0^-), \quad (6)$$

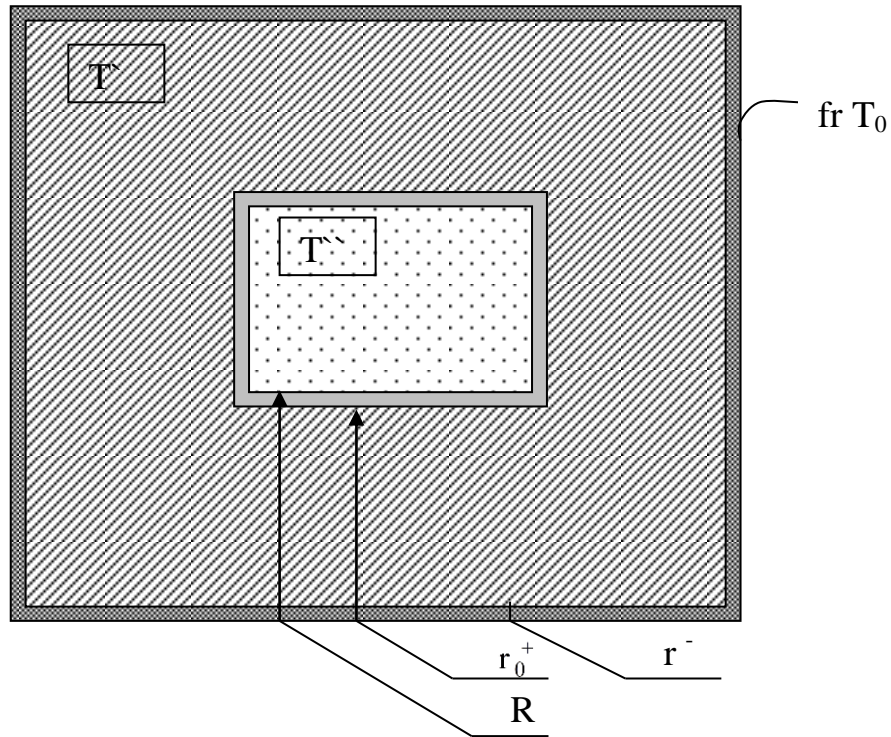
$$T'' = \text{cl}(R^2 \setminus (T^* \oplus C^R)), \quad (7)$$

де  $C^R$  – круг радіуса  $R$ .

Очевидно, что  $T_0^- \neq T' \cup T''$ .

Як відомо,  $\Phi$  – функція, що описує взаємне розташування об'єктів  $T_i, T_j$  визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \Phi(Z_i, Z_j) &> 0, \text{ якщо } \text{cl}T_i \cap \text{cl}T_j = \emptyset, \\ \Phi(Z_i, Z_j) &= 0, \text{ якщо } \text{int}T_i \cap \text{int}T_j = \emptyset \text{ и } \text{fr}T_i \cap \text{fr}T_j \neq \emptyset, \\ \Phi(Z_i, Z_j) &< 0, \text{ якщо } \text{int}T_i \cap \text{int}T_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$



**Рисунок 1.** – Области  $T'$  и  $T''$

Назвемо сусідніми об'єкти, що покривають  $T_i, T_j, i \neq j \in I_n$ , для яких значення  $\Phi$ -функції не позитивні, тобто

$$\Phi(Z_i, Z_j) \leq 0 \quad (8)$$

Згідно нормативної літератури [1], максимально допустима відстань між центрами сусідніх покривають об'єктів  $T_i, T_j$  повинно бути не більше ніж  $r^+$ . Цю умову можна задати у вигляді нерівності

$$\sum_{i=1}^n ((x_{i1} - x_{i2})^2 + (v_{x_{i1}} - v_{x_{i2}})^2) - (r^+)^2 \leq 0 \quad (9)$$

Мінімально допустима відстань між центрами сусідніх об'єктів, що покривають  $T_i, T_j$  повинно бути не менше ніж  $2r^-$ , тобто

$$(2r^-)^2 - \sum_{i=1}^n ((x_{i1} - x_{i2})^2 + (v_{x_{i1}} - v_{x_{i2}})^2) \leq 0$$



При цьому, слід зауважити, що  $2r^- \ll r^+ < 2R$ .

Таким чином, обмеження на максимальні і мінімальні допустимі відстані між центрами сусідніх покривають об'єктів  $T_i, T_j$  задається системою нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n ((x_{i1} - x_{i2})^2 + (v_{x_{i1}} - v_{x_{i2}})^2) - (r^+)^2 \leq 0, \\ (2r^-)^2 - \sum_{i=1}^n ((x_{i1} - x_{i2})^2 + (v_{x_{i1}} - v_{x_{i2}})^2) \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для всіх інших об'єктів ця умова виконуватися не повинно.

У просторі  $I_S^{2n}(\mathbb{R})$  умови приналежності центрів кіл  $T_1, T_2, \dots, T_n$  областям виду (5), (6), (7), описуються множинами  $D^*, D', D''$ , відповідно.

Нехай є деяка множина  $D^{***} \subset E^{2n}$  виду:

Для всех остальных объектов это условие выполняться не должно.

$$D^{***} = \{Z \in D''' \mid \forall (i_k, j_k) \in K_n, \rho(Z_{i_k}, Z_{j_k}) \in [2r^-, r^+] \cup [2R, \text{diam}T_0^-]\}$$

де  $K_n$  – множина пар індексів  $(i_k, j_k)$ ,  $i_k \in I_n$ ,  $j_k \in I_n$ ,  $i_k \neq j_k$ ,  $D''' = D' \cup D''$ .  
Очевидно, що потужність множини  $K_n$  дорівнює  $C_n^2$ . При цьому, припускаємо, що  $K_n = A_n \cup B_n$ , где  $A_n \cap B_n = \emptyset$ .

Система (1.10) у просторі  $E^{2n}$  задає де яка множина  $D^\pm = \{Z \in D''' \mid \forall (i_k, j_k) \in A_n, \rho(Z_{i_k}, Z_{j_k}) \in [2r^-, r^+]\}$ .

Припустимо  $D^{**} = \{Z \in D''' \mid \forall (i_k, j_k) \in B_n, \rho(Z_{i_k}, Z_{j_k}) \in [2R, \text{diam}T_0^-]\}$ ,  
тобто  $D^{***} = D^{**} \cup D^\pm$ .

Таким чином, область допустимих рішень можна представити у вигляді:

$$D = ((D' \cup D'') \cap (D^\pm \cup D^{**})) \cup D^*. \quad (11)$$

Для аналітичного опису області допустимих рішень  $D \subset E^{2n}$  будемо використовувати поняття структури нерівностей [2].

Нехай є нерівності,  $f_i(Z) \leq 0$ ,

$Z_i = (\langle X \rangle_i, \langle Y \rangle_i) = (\langle x_i, v_{x_i} \rangle, \langle y_i, v_{y_i} \rangle)$ ,  $i \in I_m = \{1, 2, \dots, m\}$  и предикат

$\delta_{ij}$ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } f_i(Z) \leq 0 \wedge f_j(Z) \leq 0, \\ 0, & \text{если } f_i(Z) \leq 0 \vee f_j(Z) \leq 0. \end{cases}$$

Упорядкований набір  $F(Z)$  нерівностей  $f_i(Z) \leq 0$ ,  $i \in I_m$ , с предикатом  $\delta_{ij} = (f_i(Z) \leq 0, f_j(Z) \leq 0)$ ,  $i, j \in I_m$ , який задано в вигляді симетричної матриці  $\Delta = \|\delta_{ij}\|_{m \times m}$ , має назву структури нерівностей і позначається через  $G(F(Z), \Delta, m)$ .

Позначимо матрицу  $\Delta = \|\delta_{ij}\|_{m \times m}$  с  $\delta_{ij}=1, \forall i, j \in I_m$ , через  $\Delta^1$ , а матрицу  $\Delta = \|\delta_{ij}\|_{m \times m}$  с  $\delta_{ij}=0, \forall i \neq j \in I_m, \delta_{ij}=1, i=j \in I_m$ , через  $\Delta^0$ . Ясно, що структура  $G(F(Z), \Delta^1, m)$  являє собою систему нерівностей, взятих з даного набору.

Визначимо операції перетину і об'єднання структур нерівностей. Нехай дано структури  $G_1(F_1(Z), \Delta_1, k_1)$ ,  $\Delta_1 = \|\delta_{ij}^1\|_{k_1 \times k_1}$  и  $G_2(F_2(Z), \Delta_2, k_2)$ ,  $\Delta_2 = \|\delta_{ij}^2\|_{k_2 \times k_2}$ . Ці структури описують множини  $D_1, D_2 \in E^{2n}$  відповідно.

Перетином структур  $G_1$  и  $G_2$  є структура  $G^\cap(F(Z), \Delta^\cap, k)$ , яка описує множину  $D_1 \cap D_2$ , де  $\Delta^\cap = \|\delta_{ij}^\cap\|_{k \times k}$ ,  $F(Z) = \{F_1(Z), F_2(Z)\}$ ,  $k = k_1 + k_2$ ,

$$\delta_{ij}^\cap = \begin{cases} \delta_{ij}^1, & \text{если } i \leq k_1, j \leq k_1; \\ \delta_{i-k_1, j-k_1}^2, & \text{если } i > k_1, j > k_1, i, j = k_1 + 1, \dots, k; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Об'єднанням структур є структура  $G^\cup(F(Z), \Delta^\cup, k)$ , яка описує множину  $D_1 \cup D_2$ , де  $\Delta^\cup = \|\delta_{ij}^\cup\|_{k \times k}$ ,  $F(Z) = \{F_1(Z), F_2(Z)\}$ ,  $k = k_1 + k_2$ ,

$$\delta_{ij}^\cup = \begin{cases} \delta_{ij}^1, & \text{если } i \leq k_1, j \leq k_1; \\ \delta_{i-k_1, j-k_1}^2, & \text{если } i > k_1, j > k_1, i, j = k_1 + 1, \dots, k; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким чином, структура

$$\begin{aligned}
D = & ((G'(F_1(Z), \Delta_1, k_1) \cup G''(F_2(Z), \Delta_2, k_2)) \cap \\
& \cap (G^\pm(F_3(Z), \Delta_3, k_3) \cup G^{**}(F_4(Z), \Delta_4, k_4))) \cup \\
& \cup G^*(F_5(Z), \Delta_5, k_5)
\end{aligned} \tag{12}$$

описує область допустимих рішень (1.11), де структури  $G'$ ,  $G''$ ,  $G^*$ ,  $G^\pm$ ,  $G^{**}$  задають множини  $D'$ ,  $D''$ ,  $D^*$ ,  $D^\pm$ ,  $D^{**}$ , відповідно. При цьому,

$$G'(F_1(Z), \Delta_1, k_1) = \bigcap_{i=1}^{m'} G'_i(F_{1i}(Z), \Delta_{1i}, k_{1i}); \tag{13}$$

$$G''(F_2(Z), \Delta_2, k_2) = \bigcap_{i=1}^{m''} G''_i(F_{2i}(Z), \Delta_{2i}, k_{2i}); \tag{14}$$

$$G^\pm(F_3(Z), \Delta_3, k_3) = \bigcap_{(i,j) \in A_n} G_{ij}^\pm(F_{3ij}(Z), \Delta_{3ij}, k_{3ij}); \tag{15}$$

$$G^{**}(F_4(Z), \Delta_4, k_4) = \bigcap_{(i,j) \in B_n} G_{ij}^{**}(F_{4ij}(Z), \Delta_{4ij}, k_{4ij}); \tag{16}$$

$$G^*(F_5(Z), \Delta_5, k_5) = \bigcap_{i=1}^{m^*} G_i^*(F_{5i}(Z), \Delta_{5i}, k_{5i}); \tag{17}$$

$$m' + m'' + m^* = n, \quad m' + m'' \geq 2.$$

Припустимо  $\Omega_{ij}$  – площа множини  $T_{ij}$ . Тоді при визначенні  $\min_{i \neq j=1}^n \Omega_{ij}$  кількість об'єктів, що покривають в загальному випадку буде прагнути до мінімуму.

Це твердження вірне, оскільки в даній постановці  $\sum_{i \neq j=1}^n \Omega_{ij}$  – є функція, що залежить прямо пропорційно від кількості  $m$  кіл, які покривають область  $T_0$ ,  $\Omega_0 \leq m\Omega_i$ , де  $\Omega_i = \pi R^2$  – площа круга  $T_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ,  $\Omega_0$  – площа області  $T_0$ .

Формалізацію умов покриття області дозволяє здійснити введення спеціального класу функцій, названих  $\omega$  – функціями [2], виду

$$\omega(g) = \omega(M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, P_0, P_1, P_2, \dots, P_n), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
g = & ((S_0 \cap (S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n)), M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, P_0, P_1, P_2, \dots, P_n) = \\
& = B(g_0, g_1, g_2, \dots, g_n) = g_0 \square g_1 \square g_2 \square \dots \square g_n,
\end{aligned} \tag{19}$$

де  $\square$  – знак композиції відображення,  $g_0 = (S_0, M_0, P_0)$ ,  $g_i = (S_i, M_i, P_i)$  – геометрична інформація [2] об'єктах  $T_0, T_i, i \in I_n$ ;  $S_0, M_0, P_0, S_i, M_i, P_i, i \in I_n$  – просторова форма, метричні характеристики і параметри розміщення об'єктів  $T_0, T_i, i \in I_n$ , відповідно.

### 3. Математична модель задачі розміщення зрошувачів.

Використовуючи апарат  $\omega$ -функцій, математичну модель поставленої задачі можна представити як:

$$\min_{Z \in D \subset \mathbf{I}_s^{2n}(\mathbf{R})} \theta(Z) \quad (20)$$

$$D = ((G'(F_1(Z), \Delta_1, k_1) \cup G''(F_2(Z), \Delta_2, k_2)) \cap \cap (G^\pm(F_3(Z), \Delta_3, k_3) \cup G^{**}(F_4(Z), \Delta_4, k_4))) \cup G^*(F_5(Z), \Delta_5, k_5)),$$

де

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = ((\langle X \rangle_1, \langle Y \rangle_1), (\langle X \rangle_2, \langle Y \rangle_2), \dots, (\langle X \rangle_n, \langle Y \rangle_n)) =$$

$$= ((\langle x_1, v_{x_1} \rangle, \langle y_1, v_{y_1} \rangle), (\langle x_2, v_{x_2} \rangle, \langle y_2, v_{y_2} \rangle), \dots, (\langle x_n, v_{x_n} \rangle, \langle y_n, v_{y_n} \rangle))$$

$$Z_n = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \in \mathbf{I}_s^{2n}(\mathbf{R}),$$

$\theta(Z)$  - сумарне значення  $\omega$  - функції.

Таким чином, необхідно мінімізувати сумарну площу взаємного перекриття покривають об'єктів  $T_i, i \in I_n$ , на області  $D$ , яка описується структурою (1.12).

У загальному вигляді математичну модель задачі (20) в арифметичному евклідовому просторі  $\mathbf{R}^{2n}$  можна уявити так:

$$\min_{Z \in D \subset \mathbf{R}^{2n}} \theta(Z) = \min_{Z \in D \subset \mathbf{R}^{2n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (\omega_{ij}(Z_i, Z_j) + \omega_i^0(Z_0, Z_i)) \quad (21)$$

де  $\omega_{ij}(Z_i, Z_j)$  – функція, яка визначає площа взаємного перекриття кіл  $T_i, T_j$ ,  $i \neq j, i \in I_n, j \in I_n$ ;

$\omega_i^0(Z_0, Z_i)$  – функція, яка визначає площа взаємного перекриття кола  $T_i$   $i \in I_n$  і області  $cl(\mathbf{R}^2 / T_0)$ ;

$D = D_1 \cup D_2$  – область припустимих рішень.

При вирішенні завдання постає питання про знаходження безлічі точок допустимого розташування центрів наступних покривають об'єктів щодо попередніх, і визначенні значень функції мети.

Для визначення безлічі допустимих точок необхідно сформулювати правила їх знаходження.

Правила для розміщення наступних покривають об'єктів повинні враховувати наступні зауваження:

площа покриття області  $T_0$  кожним з об'єктів  $T_i$  повинна бути максимальною;

значення  $\omega$ -функції має бути мінімальним;

що залишилася непокрита область повинна бути, по можливості, однозв'язної. У разі якщо залишилася область буде многосвязной, підхід до вирішення завдання буде аналогічний, однак кінцеве значення  $\omega$ -функції може різко зрости, що знизить ефект використання даного методу.

Перш ніж докладно розглянути метод вирішення задачі покриття області довільної просторової форми введемо деякі позначення і представимо в аналітичному вигляді деякі додаткові функції, які беруть участь у формуванні функції мети поставленої задачі.

Припустимо:

$I_k = \{1, 2, \dots, k\}$  – індексна множина,

$i, j$ , - номери кругів,  $i, j \in I_n$ ,

$W$  – значення функції цілі,

$P_{il}$  –  $l$ -я точка перетину межі  $i$ -го круга з межею непокритої області, тобто.

$$P_{il} \in \text{fr}T_i \cap \text{fr}\left(T_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} T_k\right),$$

$K_i^*$  – множина точок  $P_{il}$  перетину межі  $i$ -го круга з межею непокритої області

$$L_i^* = \text{card}K_i^*,$$

$K_i$  – множина точок  $P_{il}$  з множини  $K_i^*$ , що задовольняють обмеженням завдання (1), в подальшому - "опорних" точок,

$$L_i = \text{card}K_i, \quad L_i \leq L_i^*,$$

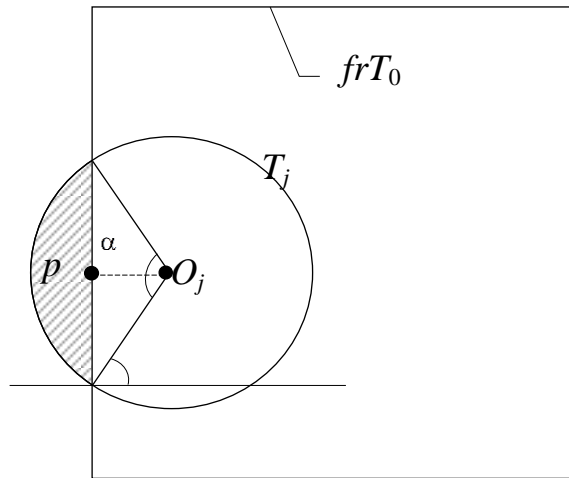
$\omega_j^{10}$  – значення  $\omega$ -функції  $T_0$  и  $T_j$  для 1-й точки круга  $T_j$ ,

$\omega_{kj}^1$  – значення  $\omega$ -функції  $T_k$  и  $T_j$  для 1-й точки круга  $T_j$ ,

$$\chi_j^1 \text{ – значення функції цілі для } l\text{-й точки круга } T_j, \quad \chi_j^1 = \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{kj}^1 + \omega_k^{10},$$

$Z_j$  – множина, елементи  $\chi_j^1$  якої ранжовані за зростанням.

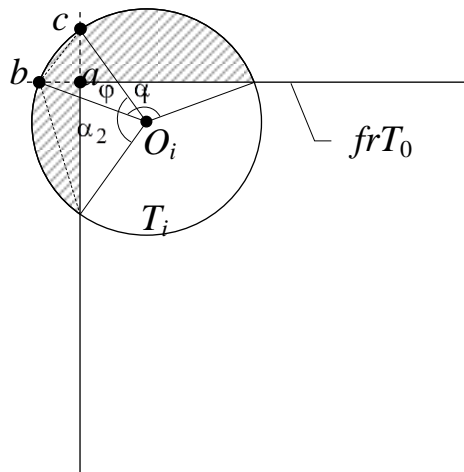
Розглянемо випадок визначення площі взаємного перетину кола  $T_i$  з областю  $cl(R^2/T_0)$  по осі  $OX$  або  $OY$  (рис 1.2).



**Рисунок 2.** – Перетин кола  $T_i$  з областю  $cl(R^2/T_0)$  по осі  $OX$  або  $OY$

У випадку якщо круг  $T_i$  перетинається з областю  $cl(R^2/T_0)$  по осі  $OX$  та  $OY$  одночасно, (рис. 1.3), то слід використовувати формулу виду:

$$\omega_j^0 = \omega_j^{0\alpha_1} + \omega_j^{0\alpha_2} - (\omega_j^{0\varphi} - \frac{1}{2} |(x_b - x_a) \cdot (y_c - y_a)|) \quad (22)$$



**Рисунок 3.** – Перетин кола  $T_i$  з областю  $cl(R^2/T_0)$  по осі  $OX$  та  $OY$  одночасно.

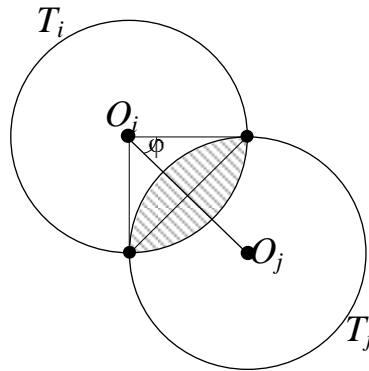
$$\omega_j^0(x_p, y_p, x_j, y_j) = \begin{cases} \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha), & \text{если } 0 < \rho_{ij} < R; \\ 0, & \text{если } \rho_{ij} \geq R. \end{cases} \quad (23)$$

$\alpha = \arccos \frac{\rho_{pj}}{R}$ ,  $\rho_{pj} = \sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\rho_{pj}$  – відстань між центром круга  $T_j$  і межею області  $T_0$ .

Розглянемо випадок визначення площі перетину кіл  $T_i$  и  $T_j$  (рис. 4).

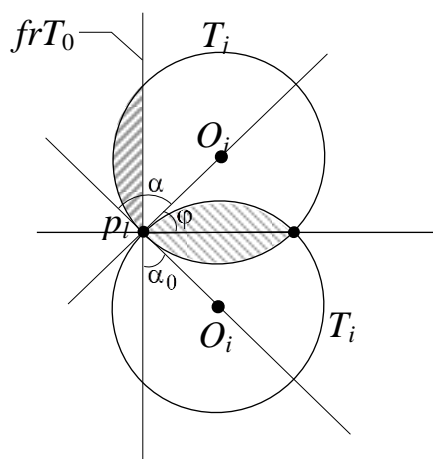
$$\omega_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) = \begin{cases} R^2 (2\varphi - \sin 2\varphi), & \text{если } 0 \leq \rho_{ij} < 2R; \\ 0, & \text{если } \rho_{ij} \geq 2R. \end{cases} \quad (24)$$

где  $\rho_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ ,  $\varphi = \arccos \frac{\rho_{ij}}{2R}$ ,  
 $\rho_{ij}$  – відстань між центрами кіл  $T_i$  и  $T_j$ .



**Рисунок 1.4** – Перетин кіл  $T_i$  и  $T_j$

Припустимо  $p_{il} \in \text{fr}T_i \cap \text{fr}T_0$ . Для знаходження точки постановки центру наступного кола  $T_j$ , такий, що функція мети досягає в цій точці свого мінімуму, необхідно провести пряму, що проходить через точку  $P_{il}$  і утворить кут  $\varphi$  з прямою, паралельною осі  $OX$  (рис. 5).



**Рисунок 5** – Правило знаходження місця розташування наступного об'єкта при взаємодії двох кіл

На даній прямій, на відстані  $R$  від точки  $P_{il}$  буде знаходитися шукана точка  $O_j$ .

Функція цілі у даному випадку має вид

$$\chi_j^1 = R^2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_0 - \frac{\sin 2\varphi}{2} - \cos(\varphi - \alpha_0) \right),$$

$$\chi_j^1 \Big|_{\varphi} = -R^2 (\cos 2\varphi + \sin(\alpha_0 - \varphi)) = 0,$$

(25)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi + \alpha_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha_0}{3}.$$

очевидно, що

Припустимо  $P_{il} \in \text{fr}T_i \cap \text{fr}T_j$ . Для знаходження точки постановки центру  $O_j$  наступного кола  $T_j$ , такий, що функція мети досягає в цій точці свого мінімуму, необхідно провести бісектрису кута  $\varphi$ , утвореного дотичними до кіл  $\text{fr}T_i$  і  $\text{fr}T_j$  в точці  $P_{il}$ .

На даній бісектрисі на відстані  $R$  від точки  $P_{il}$  буде знаходитися шукана точка  $O_j$ .

Розглянемо випадок перетину трьох кіл  $T_s, T_k, T_r$ ,  $s, k, r \in I_m$ ,  $m = m' + m''$ , таке, що виконується умова  $\text{int} T_k \cap \text{int} T_r \neq \emptyset$ ,



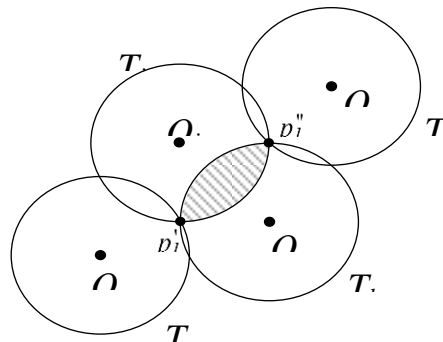
$\text{int } T_k \cap \text{int } T_s \neq \emptyset$  і знайдеться хоч би по одній точці  $P_{i1}'$  і  $P_{i1}''$  перетину кіл  $T_k$ ,  $T_s$  і  $T_k$ , відповідно, які знаходяться в деякій околиці радіусу  $\varepsilon = \frac{R}{2}$ .

Наступне коло  $T_j$  розміщується таким чином (рис. 1.6), що його центр  $O_j$  має координати

$$(x_j, y_j) = \frac{1}{2}(x'+x'', y'+y'') + \frac{2\sqrt{4R^2 - (x'-x'')^2 - (y'-y'')^2} \cdot (y'-y'', x''-x')}{\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}}, \quad (26)$$

де  $x', y'$  і  $x'', y''$  – координати точок  $P_{i1}'$  і  $P_{i1}''$  відповідно.

Після перебору всіх можливих допустимих точок для всіх  $i * j = 1, \dots, m$ , і знаходження відповідного мінімального значення  $*$ -функції, буде отримано локальний мінімум завдання з набором параметрів розміщення покривають об'єктів.



**Рисунок 6** – Правило знаходження місця розташування наступного об'єкта при взаємодії трьох кіл

Розглянемо покроковий алгоритм вирішення задачі безпосередньо.

Шаг 1. Полагаємо  $i = 0$ ,  $K_0^* = \{(0,0)\}$ ;  $K_0 = \{(0,0)\}$ ;  $L_0 = 1$ ;  $W_0 = 0$ ;  
 $U_0 = \{(x_0 + R \frac{\sqrt{2}}{2}, y_0 + R \frac{\sqrt{2}}{2})\}$ ,  $N_0 = 1$ .

Шаг 2. Полагаємо  $i = i + 1$ . Для кожної точки  $v_{i1} \in U_i$ ,  $1 = 1, 2, \dots, L_0$

обчислюємо функцію мети  $\chi_j^1$  за формулою (8). У разі  $j = 1$  функція мети обчислюється за формулою (7).

**Висновки.** На лекції розглянуто питання щодо нормативних вимог розміщення зрошувачів, моделювання схем. Розроблено математичну модель розміщення елементів

## Лекція № 11

### Оптимізація вибору елементів систем водяного пожежогасіння

1. Загальні умови для визначення вибору елементів систем водяного пожежогасіння
2. Оптимізація математичної моделі систем водяного пожежогасіння
3. Оптимізація та моделювання гідравлічних розподільчих мереж методом «джерел і стоків»

#### 1. Загальні умови для визначення вибору елементів систем водяного пожежогасіння

Тип установки водяного пожежогасіння - спринклерна або дренчерна - залежить від швидкості поширення пожежі в приміщенні, що підлягає.

Спринклерная установка призначена для локального гасіння по площі в приміщенні, що підлягає.

Дренчерная установка призначена для гасіння пожежі по всій площі приміщення, що підлягає.

Як правило, якщо швидкість поширення пожежі не перевищує 1,5 м / хв, то вибирають спринклерну установку.

Залежно від температури в приміщенні, що підлягає вибирають або вадозаполненую спринклерну установку ( $T_z > 5^\circ \text{C}$ ), або воздухозаполненую спринклерну установку ( $T_z < 5^\circ \text{C}$ ).

Для дренчерних установок вибираються способи пуску - гідравлічний, пневматичний, тросовий (механічний), електричний.

Мінімальна інтенсивність подачі вогнегасної речовини є довідковою величиною і залежить від групи приміщення, вогнегасної речовини (вода, вода зі змочувачем, розчин піноутворювача, висоти приміщення, що підлягає, висоти складування матеріалів).

Площа, що захищається одним зрошувачем, площа для розрахунку витрати води, розчину піноутворювача для спринклерних установок, відстань між зрошувачами, час роботи АУППТ також визначаються за довідковими даними в залежності від групи приміщення і його висоти.

#### 2. Оптимізація математичної моделі систем водяного пожежогасіння

Для проведення гидравлического расчета необходимо выполнить:

- 1). Розмістити зрошувачі на плані приміщення.
- 2). Виконати трасування трубопроводів.
- 3). Визначити "диктує" зрошувач.

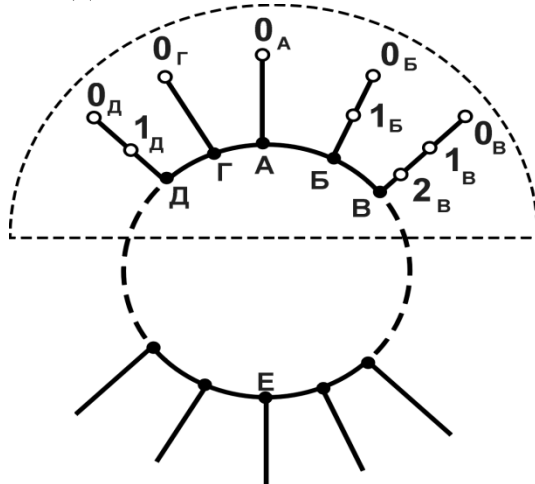
«Диктуючий» зрошувач (ДО) - це зрошувач, який знаходиться в «найгірших умовах» з точки зору забезпечення допустимих значень напору і інтенсивності подачі вогнегасної речовини.

Для тупикових розрахункових схем ДО - це зрошувач найбільш віддалений від точки введення.

Для кільцевих розрахункових схем, в яких гілки розподільчої мережі однакові, «диктує» є зрошувач, як правило, так само віддалений від точки вводу живильного трубопроводу.

Якщо гілки, які приєднані до кільцевого трубопроводу розподільної мережі (рис. 1) мають різну топологію, то вибір ДО, а відповідно і «диктує» гілки, не можна визначити по геометричним параметрам розподільчої мережі в явному вигляді.

Пропонується метод аналітичного визначення вибору ДО.



**Рисунок 1** – Приклад кільцевої розподільної мережі

У задачі розглядається розподільна мережа (рис.1). Для визначення ДО необхідно виділити розрахункову площу пожежогасіння відповідно до групи приміщення (рекомендації [3]).

Для кожної групи приміщень існують норми інтенсивності подачі вогнегасної речовини, а для фіксованих діаметрів зрошувачів задається діапазон напору  $H$  від мінімального до максимального значення. Тому, на ДО необхідне виконання обох умов:

- перше

$$H_{ДО} = \left( \frac{Q_{\min}}{k} \right)^2, \text{ где } H_{\min} \leq H_{ДО} \leq H_{\max}; \quad (1)$$

- друге

$$Q_{ДО} = k\sqrt{H_{\min}}, \text{ где } Q_{ДО} \geq Q_{\min}, \quad (2)$$

$k$  - коефіцієнт витрати зрошувача.

В межах одного приміщення, що підлягає необхідно встановлювати зрошувачі одного типорозміру (вимога [3]).

Для розглянутого схемного рішення (рис.1) з відомими геометричними розмірами одно віддаленим від точки введення  $E$  є зрошувач з індексом  $0A$ .

Залежно від обраного умови визначаються параметри в точці приєднання гілки в точці А. При цьому, натиск НА в околиці точки А праворуч і ліворуч буде однаковий, а витрата може варіюватися справа і зліва таким чином, що

$$Q_A = Q_{A-B} + Q_{A-\Gamma} = L \cdot Q_A + (1-L) \cdot Q_A, \quad (3)$$

де  $L$  – коефіцієнт розподілу потоку рідини, який змінюється в діапазоні від 0 до 1.

Напір в точці Б визначається як:

$$H_B = H_A + \frac{l_{A-B} \cdot (L \cdot Q_{A-B})^2}{k_{1_{A-B}}}. \quad (4)$$

Так як необхідно визначити мінімальні значення параметрів на зрошувачі 0Б, то це досягається за умови  $L = 0$ . Тоді, виходячи з (4.4), отримуємо

$$H_B = H_A. \quad (5)$$

Скориставшись методикою визначення параметрів гілки, викладеної в [7],  $Q_{0B}$  визначається як

$$Q_{0B} = \sqrt{\frac{H_B}{M_{1B}^2 + \frac{k^2}{k_{1_{1B-B}}} \cdot l_{1B-B} \cdot (1 + M_{1B})^2}}. \quad (6)$$

Якщо виконується умова

$$H_{\min} \leq H_{0B} \leq H_{\max} \quad \text{и} \quad Q_{0B} \geq Q_{0A}, \quad (7)$$

то зрошувач з індексом 0А є «диктує» по відношенню до зрошувачу з індексом 0Б і аналогічний розрахунок проводиться для гілки Г. При цьому, мінімальне значення на зрошувачі з індексом 0Г досягається при значенні коефіцієнта розподілу потоку рідини  $L = 1$ .

Якщо умови (7) не виконуються, то зрошувач з індексом 0Б буде «диктує» по відношенню зрошувача з індексом 0А і тоді необхідно провести аналогічні розрахунки з права від точки Б.

Розрахунок вважається закінченим, коли умова (7) виконується з обох сторін перевіряється зрошувача.

З вищевикладеного матеріалу можна сформулювати визначення: «диктує» називається такий зрошувач розподільної мережі установок водяного пожежогасіння для якого значення напору і витрати будуть найменшими у всій мережі і для якого будуть виконуватися умови обмеження (1, 2).

#### 4. Визначення діаметрів трубопроводів.

При проведенні проектувального розрахунку використовують формулу

$$d_{(n-1)-n} = \sqrt{\frac{4 \cdot q_{(n-1)-n} \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot v}} \quad (\text{м}) \quad (8)$$

де  $q_{(n-1)-n}$  – витрата на ділянці  $(n-1)-n$ ;

$v$  – швидкість руху рідини в трубопроводі, яка не повинна перевищувати 10 м / с.

Витрата на будь-якій ділянці можна поставити в наступному вигляді

$$q_{(n-1) \div n} = \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \quad (9)$$

Тому, можна визначити максимально допустимий витрата в трубопроводі

№ п/п	діаметр трубопровода, мм	максимальний расход, л/с
1	20	3,14
2	25	4,9
3	32	8,04
4	40	12,56
5	50	19,625

Таким чином, виходячи з числа зрошувачів, розташованих на одній гілці, і витрати з одного зрошувача можна орієнтовно вибрати діаметр гілки. Знаючи діаметр зрошувача і геометричні параметри гілки (діаметр трубопроводу і відстані між зрошувачами) визначаємо коефіцієнти  $M_n$  ділянок трубопроводів.

Коефіцієнт  $M_n$  залежить тільки від геометричних параметрів розподільчої мережі і визначається за такою формулою:

$$M_n = \sqrt{M_{n-1}^2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} M_i\right)^2 \cdot \frac{k^2}{k_{1(n-1) \div n}} \cdot l_{(n-1) \div n}} \quad (10)$$

де  $M_0 = 1$ ;

$k_{1(n-1) \div n}$  – питомий коефіцієнт втрат напору на ділянці  $(n-1) \div n$  (визначається по таблиці Б.7 додатка Б [3] для заданого діаметра трубопроводу);

$k$  – коефіцієнт витрати зрошувача;

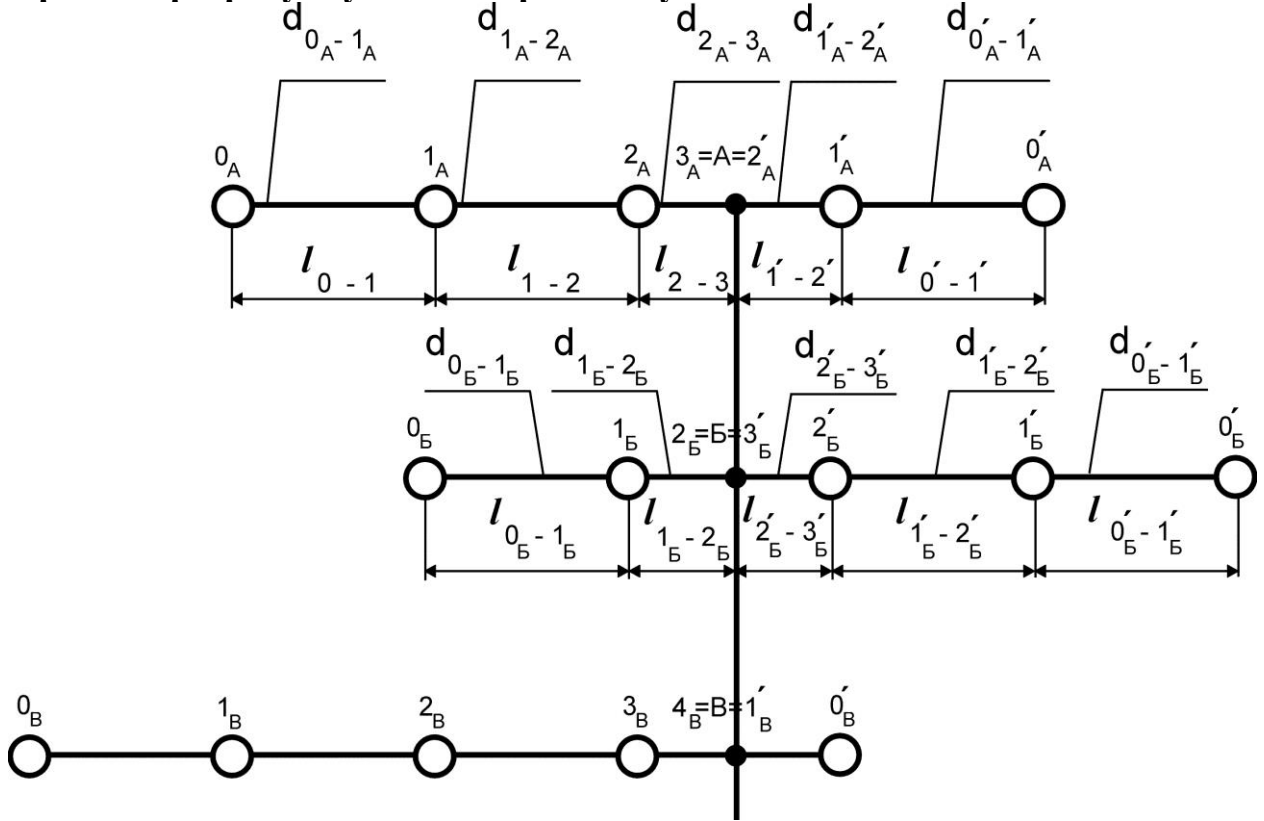
$l_{(n-1) \div n}$  – довжина участка  $(n-1) \div n$ .

З огляду на вимоги пункту 1.2.8 [3], що в межах одного приміщення, що підлягає необхідно встановлювати зрошувачі з випускним отвором однакового діаметра, коефіцієнт витрати зрошувача в розрахунках

залишається постійним. Крім того, діаметри гілки трубопроводів, на яких встановлюються зрошувачі, як правило, виконані однакового діаметра.

Таким чином, коефіцієнт  $M_n$  залежить тільки від лінійних розмірів гілки.

**Приклад розрахунку не симетричної тупикової схеми.**



**Рисунок 2** – Приклад не симетричної тупикової схеми.

Для простоти використання формул пронумеруємо зрошувачі окремо лівої і правої частини гілки. При цьому будемо враховувати точку А, в якій гілка розділяється на праву і ліву частину, з лівого боку точка А буде під номером 3, а з лівого боку під номером 2'.

У загальному вигляді зв'язок між витратою з будь-якого оросителя гілки і «диктує» зрошувачем можна задати наступним чином

$$Q_n = M_n Q_0, \tag{11}$$

де  $Q_0$  – витрата на «диктуєчому» зрошувачі.

Напір на будь-якому зрошувачі гілки має залежність з напором на «диктуєчому» зрошувачі

$$H_n = M_n^2 H_0 \tag{12}$$

где  $H_0$  – напір на «диктуєчому» зрошувачі

$$Q_0 = k\sqrt{H_0}$$

Визначається витрата на ділянці 0-1 визначається за (11).

$$q_{0\div 1} = \sum_0 Q_{0-1} = Q_0 \quad (13)$$

Визначається швидкість руху рідини для обраного діаметра трубопроводу за формулою

$$v_{(n-1)\div n} = \frac{4 \cdot q_{(n-1)\div n} \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot d_{(n-1)\div n}^2} \quad (\text{м/с}) \quad (14)$$

Швидкість руху рідини в трубопроводах не повинна перевищувати 10 м / с. Якщо швидкість перевищує це значення, то необхідно змінити діаметр трубопроводу в сторону збільшення.

Напір в точці 1 визначається по (12), а витрата - по (11)

$$H_1 = M_1^2 H_0$$

$$Q_1 = M_1 Q_0$$

$$M_1 = \sqrt{1 + \frac{l_{0-1} \cdot k^2}{k_{10-1}}}$$

де

Витрата на ділянці 1-2 визначається за (13).

$$q_{1\div 2} = \sum_1^2 Q_{1-2} = Q_0 + Q_1 = Q_0 \cdot (1 + M_1)$$

Проводимо поетапний розрахунок до точки А за наступним алгоритмом:

$$v_{1-2} \rightarrow M_2 \rightarrow H_2 \rightarrow Q_2 \rightarrow q_{2-3} \rightarrow v_{2-3} \rightarrow M_3(A) \rightarrow H_3(A)$$

$$H_{3(A)} = M_3 H_0$$

Так як гілки зліва і права не симетричні, то напори і витрати в правій частині необхідно визначити. Відповідно до законів гідравліки напори в точці А зліва і права будуть рівні.

$$H_A = H_{3(A)} = H_{2'(A)}$$

Для визначення параметрів правійгільки можна записати рівняння, аналогічні рівнянням лівій гілці.

$$Q_0' = k\sqrt{H_0'}$$

$$q_{0'+1'} = \sum_0^1 Q_{0'-1'} = Q_0'$$

$$H_{1'} = M_{1'}^2 H_0'$$

$$Q_{1'} = M_{1'} Q_0'$$

$$M_{1'} = \sqrt{1 + \frac{l_{0'-1'} \cdot k^2}{k_{1'0'-1'}}$$

Як бачимо з аналізу формули для  $M_{1'}$ , якщо використовується труба однакового діаметра і відстані між зрошувачами однаково в лівій і правій частині то справедливо рівність

$$M_1 = M_{1'}$$

$$q_{1'+2'} = \sum_{1'}^{2'} Q_{1'-2'} = Q_0' + Q_{1'} = Q_0' \cdot (1 + M_{1'})$$

$$H_{2'(A)} = M_{2'}^2 H_0'$$

$$M_{2'} = \sqrt{M_{1'}^2 + (1 + M_{1'})^2 \frac{l_{1'-2'} \cdot k^2}{k_{1'1'-2'}}$$

де

Оскільки справедливо рівняння

$$H_{3(A)} = H_{2'(A)}$$

ТО МОЖНО записати:

$$M_3^2 \cdot H_0 = M_{2'}^2 \cdot H_0'$$

і отримати аналітичну залежність напору в точці 0'.

$$H_0' = H_0 \cdot \frac{M_3^2}{M_{2'}^2}$$

Отримана залежність дозволяє однозначно встановити значення витрат і напорів між "диктує" зрошувачем і витратами і напорами всіх інших зрошувачів.



Знаючи тиск і сумарний витрата рідини в точці А визначаємо натиск в точці В.

$$H_B = H_A + \frac{l_{A-B} \cdot q_{A-B}^2}{k_{1A-B}}$$

Визначивши коефіцієнт  $Mn$  для другої гілки визначаємо витрати і напір з зрошувачів другої гілки.

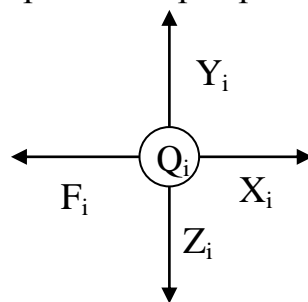
На ділянці Б-В підсумовуються витрати з гілки А і гілки Б. Визначається натиск в точці В.

Розрахунки проводяться для кількості гілок, які виявляться на розрахунковій площі.

### 3. Оптимізація та моделювання гідравлічних розподільчих мереж методом «джерел і стоків»

Для виконання точних гідравлічних розрахунків мережі довільної конфігурації необхідно розташовувати її формалізованої математичної моделлю. Така модель може бути отримана на основі методу «джерел і стоків» [8,9]. У гідродинаміці цей метод використовується для дослідження перебігу потенційного потоку ідеальної нестисливої рідини шляхом заміни його системою дискретно або безперервно розподілених джерел і стоків, сумарна інтенсивність яких дорівнює нулю. Метод заснований на тому, що потенціал швидкості задовольняє лінійному рівнянню Лапласа і, отже, справедливий принцип суперпозиції рішень, тобто векторного додавання двох або більшого числа течій.

Кожну характерну точку мережі (зрошувач, розгалуження, поворот) будемо розглядати як «джерело» витрат рідини  $X, Y, Z, F, Q$ , рис. 5.1.



**Рисунок 3** – Система координат

$X_i$  - витрата рідини, що впливає з точки вправо;

$Y_i$  - витрата рідини, що впливає з точки вгору;

$Z_i$  - витрата рідини, що впливає з точки вниз;

$F_i$  - витрата рідини, що впливає з точки вліво;

$Q_i$  - витрата рідини, що впливає з точки через зрошувач.

Прийmemo в розрахунках витрати  $X, Y, Z, F, Q$ , в якості незалежних змінних. При цьому незалежну змінну будемо вважати позитивною, якщо потік спрямований від точки «витік», і негативною, якщо потік спрямований

до точки «стік». Якщо потік спрямований від точки,  $i$  таку точку по відношенню до сусідньої точки будемо називати розташованої вгорі по потоку.

Як видно з рис. 3, кожен характерну точку мережі, можна представити у вигляді джерела (або стоку) з п'ятьма незалежними змінними. Таким чином, будь-яку мережу можна представити у вигляді  $n$  характерних точок, пов'язаних між собою рівняннями нерозривності, енергії, умовами непротекання суцільних стінок і початковими умовами.

### 3.1 . Математична модель рядка кільцевої розподільної мережі з заданими крайовими умовами.

Розглянемо рядок кільцевої мережі, з розташованими на ньому  $n$  зрошувачами (рис. 4), з точками введення «А» і «Б».

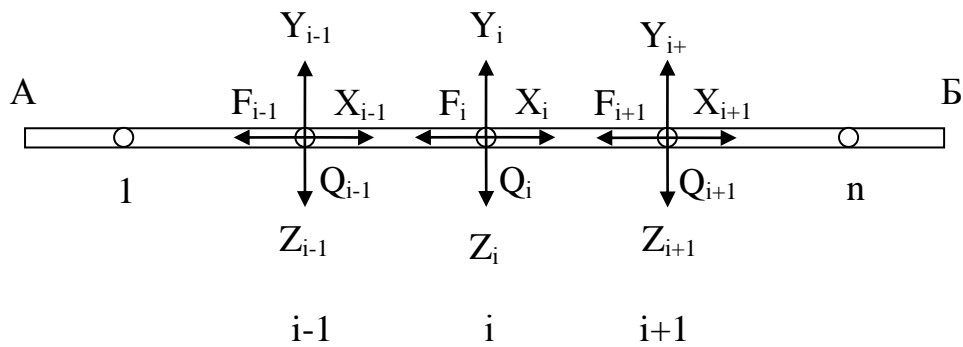


Рисунок 4 – Розрахункова схема рядка

Будемо вважати, що напір в цих точках, внаслідок перерозподілу потоків рідини в кільцевому живильному трубопроводі, різний і дорівнює значенням НА і НБ відповідно. Все точки зв'язані между собой уравнениями неразрывности и энергии. Поскольку для каждой точки вводится пять независимых переменных, то для  $n$  точек необходимо составить  $5n$  уравнений связи.

Для заданої геометрії розподільної мережі, маємо:

Напір  $H_i$  на  $i$ -тому зрошувачі, [Па]:

$$H_i = \frac{Q_i^2}{K^2}, \quad (15)$$

де:  $K$  - коефіцієнт продуктивності зрошувача [1].

Втрати напору  $\Delta H_{i-(i+1)}$  в трубах між зрошувачами, [Па]:

$$\Delta H_{i-(i+1)} = \frac{L_{i-(i+1)}}{K_1} \cdot X_i^2, \quad (16)$$

де:  $L_{i-(i+1)}$  – довжина трубопроводу на ділянці:  $i-(i+1)$ , [м];  
 $K_1$  – коефіцієнт лінійних втрат напору в трубопроводі [1].

Складемо рівняння зв'язку:

1) Рівняння нерозривності:

- баланс витрат в джерелах:

$$X_i + Y_i + Z_i + F_i + Q_i = 0; \quad (17)$$

- баланс витрат на ділянках між джерелами:

$$X_{i-1} + F_i = 0 \quad (18)$$

$$F_i + X_{i+1} = 0$$

2) Умови непротекання суцільних стінок:

$$Y_i = 0 \quad (19)$$

$$Z_i = 0$$

2) Рівняння енергії (попарного балансу тисків):

$$H_i = H_{i+1} - \Delta H_{i-(i+1)}, \quad (20)$$

де:  $H_i$  - тиск в  $i$ -тій точці;

$\Delta H_{i-(i+1)}$  - лінійні втрати тиску в трубопроводі на ділянці  $i-(i+1)$ .

Підставивши (15) в (20),

$$\frac{Q_i^2}{K} = \frac{Q_{i+1}^2}{K} - \text{sign}(X_{i+1}) \cdot \frac{L}{K_1} \cdot X_{i+1}^2.$$

Функція  $\text{sign}(X_{i+1})$  - враховує розташування точок щодо напрямлення потоку рідини.

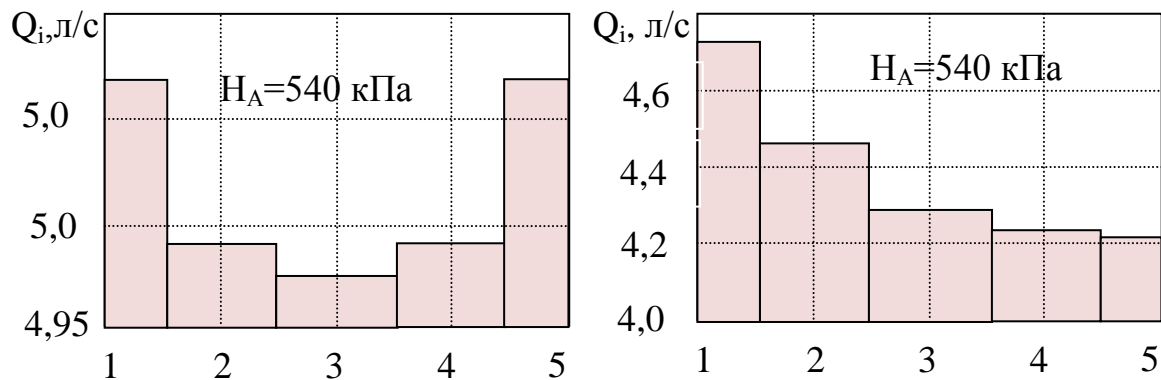
Замикаючими рівняннями будуть вимоги рівності тиску в крайніх точках заданого значення:

$$\frac{Q_1^2}{K} - \text{sign}(X_1) \cdot \frac{L}{K_1} \cdot X_1^2 = H_A; \quad (21)$$

$$\frac{Q_n^2}{K} - \text{sign}(Y_n) \cdot \frac{L}{K_1} \cdot Y_n^2 = H_A. \quad (22)$$

Таким чином, для розглянутих 5n незалежних змінних, розглянутої розрахункової схеми, отримали 5n рівнянь зв'язку (рівняння 17 ÷ 22), які можуть бути вирішені одним з відомих чисельних методів, наприклад методом Ньютона.

На рис. 5 показані результати розрахунків, виконані для рядка кільцевої мережі з діаметром труби 50мм, п'ятьма зрошувачами, з діаметром вихідного отвору 15мм, і відстанню між зрошувачами 3м, для різних граничних тисків.

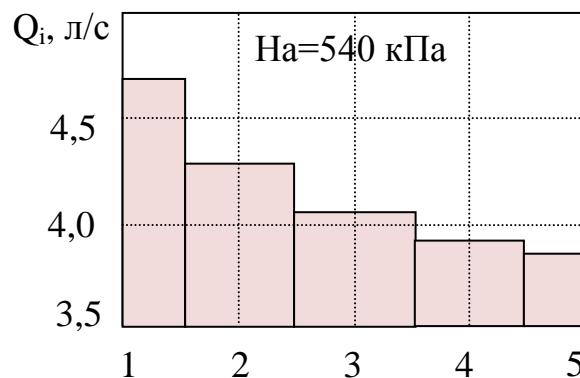


**Рисунок 5 – Розрахунок кільцевих рядків**

Якщо замість рівняння 22, накласти умова «непротекання» труби вправо по схемі:

$$X_n = 0,$$

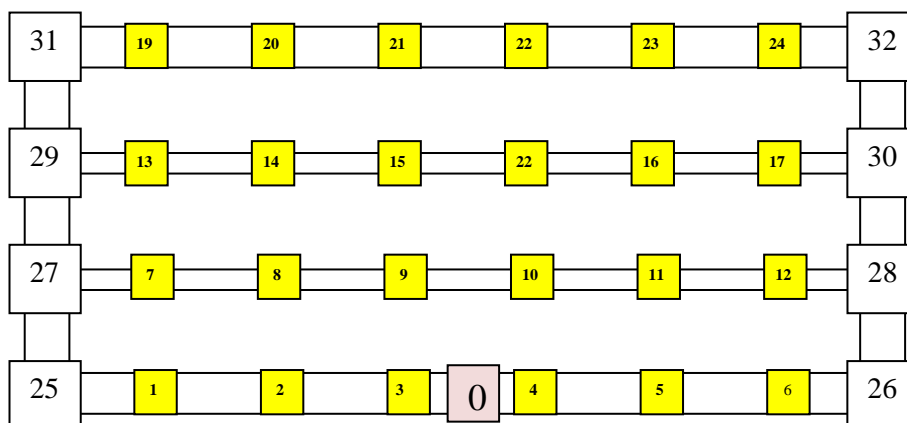
то отримаємо модель тупикового рядка. Результати розрахунку тупикового рядка і прийнятих раніше параметрів представлені на рис. 6.



**Рисунок 6. – Розрахунок тупикового рядку**

### 3.2 Узагальнена математична модель ділянки кільцевої розподільної мережі

Як приклад розглянемо кільцеву мережу, схема якої показана на рис. 7



**Рисунок 7** – озрахункова схема кільцевої мережі

На схемі під номером «0» показана точка введення, під номерами 1-24 показані зрошувачі, під номерами 25-32 кутові точки та точки розгалуження. Рівняння зв'язку для позначених точок мають вигляд:

1. Рівняння нерозривності:

рівняння балансу витрат в точках:

$$X_i + Y_i + Z_i + F_i + Q_i = 0, \quad i = 0..32 \quad (23)$$

рівняння попарного балансу витрат між точками:

$$X_i + F_i = 0, \quad i = 0..24;$$

$$X_{25} + F_1 = 0, \quad X_6 + F_{26} = 0;$$

$$X_{27} + F_7 = 0, \quad X_{12} + F_{28} = 0; \quad (24)$$

$$X_{29} + F_{13} = 0, \quad X_{18} + F_{30} = 0$$

$$X_{31} + F_{19} = 0, \quad X_{24} + F_{32} = 0.$$

1. Рівняння енергії:

- рівняння енергії для суміжних точок:

$$\dot{I}_i - (\dot{I}_{i+1} - \Delta \dot{I}_{i-(i+1)}) = 0, \quad i = 0..24; \quad (25)$$

- рівняння енергії для суміжних рядків:

$$\dot{I}_1 - (\dot{I}_7 - \Delta \dot{I}_{1-25} - \Delta \dot{I}_{25-27} - \Delta \dot{I}_{27-7}) = 0;$$

$$\dot{I}_6 - (\dot{I}_{12} - \Delta \dot{I}_{6-26} - \Delta \dot{I}_{26-28} - \Delta \dot{I}_{28-12}) = 0; \quad (26)$$

$$I_7 - (I_{13} - \Delta I_{7-27} - \Delta I_{27-29} - \Delta I_{29-13}) = 0;$$

$$I_{12} - (I_{18} - \Delta I_{12-28} - \Delta I_{28-30} - \Delta I_{30-18}) = 0;$$

$$I_{13} - (I_{19} - \Delta I_{13-29} - \Delta I_{29-31} - \Delta I_{31-19}) = 0;$$

$$I_{18} - (I_{24} - \Delta I_{18-30} - \Delta I_{30-32} - \Delta I_{32-24}) = 0,$$

де:  $N_i$  - тиск в  $i$ -тій точці;

$\Delta N_{i-j}$  - лінійні втрати тиску в трубопроводі на ділянці  $i-j$

Значення  $N_i$  і  $\Delta N_{i-(i+1)}$  визначаються відповідно до вимог нормативних документів за відомими значеннями незалежних змінних [3].

1. Умови непротекання:

$$\begin{aligned} Z_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad i = 0..24; \\ Q_{25} = 0, \quad Q_{26} = 0, \quad Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

2. Начальні умови:

$$Q_i = Q_{i\text{çäå}}. \quad (28)$$

На рис. 5.6 показані результати розрахунків тестового завдання, виконані для симетричною кільцевої мережі. У розрахунках були прийняті наступні дані:

- діаметр труби кільцевого трубопроводу 100мм;
- діаметр трубопроводу рядка 50мм;
- діаметр вихідного отвору зрошувача 15мм,
- відстань між зрошувачами 3м.

На рис.5.7 показані результати розрахунків тестового завдання, виконані для несиметричною кільцевої мережі з тими ж вихідними даними, але з введенням, розташованим між точками 1-2.

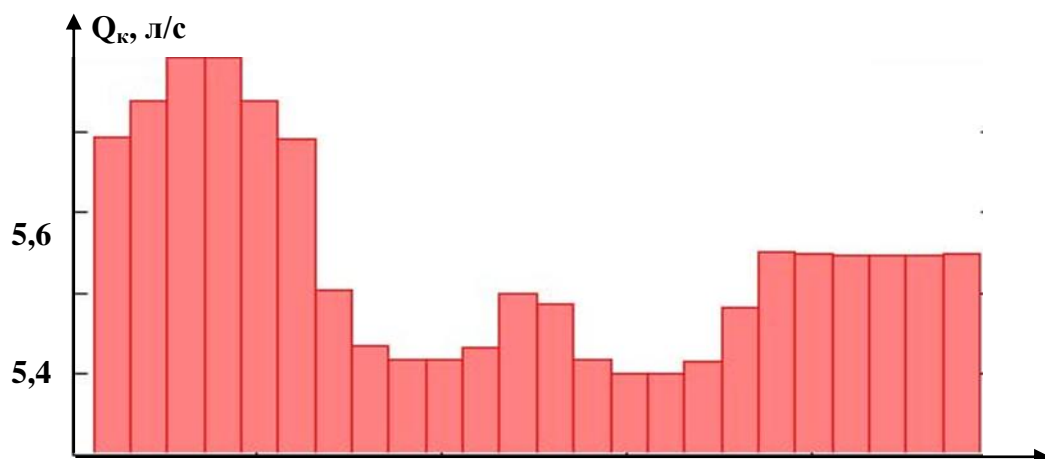
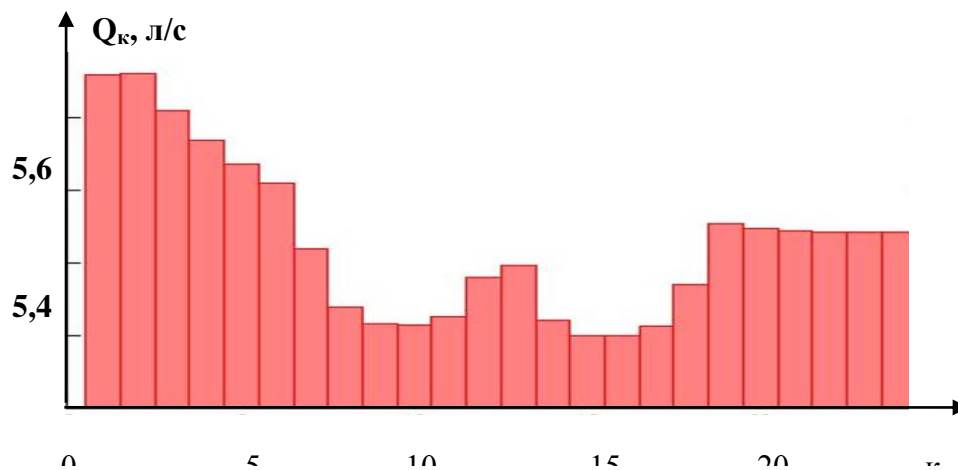


Рисунок 8 – Симетрична течія



**Рисунок 9** – Несиметрична течія

**Висновки.** На лекції отримано формалізована математична модель тупікової та кільцевої розподільної мережі, що дозволяє виконувати гідравлічний розрахунок при заданих геометричних параметрах і несиметричному перебігу в живильному трубопроводі.

## Лекція № 12

### Математична модель розподілу обмежених ресурсів при виконанні монтажних робіт систем пожежної автоматики

1. Математична модель основного завдання і її особливості
2. Аналітичний опис області допустимих рішень задачі
3. Конструктивні властивості математичної моделі
4. Подання завдання дослідження як завдання сепарабельного програмування

У лекції проведено побудова і аналіз математичної моделі задачі розміщення прямокутників з змінюваними метричними характеристиками, за умови, що метричні характеристики пов'язані функціональними залежностями. Побудовано аналітичний опис основних обмежень завдання, виділені додаткові конструктивні властивості області допустимих рішень задачі. Основне завдання дослідження в даній постановці є безліч сепарабельних завдань математичного програмування. Запропоновано метод лінеаризації обмежень області припустимих рішень задачі, за умови, що точність завдання є екзогенним параметром.

#### 1. Математична модель основного завдання і її особливості.

Нехай задана область розміщення - напівнескінченної смуга -  $T_0 \subset E^2$ , геометрична інформація  $g_0(s_0, m_0, u_0)$  про якої має вигляд:

$$\begin{aligned} s_0 &= \text{«прямокутник»}, \\ m_0 &= (W, Z), \text{ причому } W - \text{const}, Z - \text{var}, \\ u_0 &= (0,0). \end{aligned}$$

При цьому  $E^2$  – арифметичний евклідов простір розмірності 2.

Нехай також заданий кінцевий набір  $T = \{T_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$  об'єктів розміщення. Кожен об'єкт  $T_i$  задається кортежем геометричній інформації  $g_i(s_i, m_i, u_i)$  виду

$$s_i = \text{«прямокутник»}, m_i = (a_i, b_i), u_i = (x_i, y_i).$$

Зв'яжемо з кожним об'єктом  $T_i$  власну систему координат  $X_i O_i Y_i$ , започаткована ще збігаються з лівої нижньої вершиною  $T_i$  полюсом об'єкта.

Координати  $u_i = (x_i, y_i)$  полюсів об'єктів  $T_i$  в загальній системі координат  $XOY$ , пов'язаної з областю  $T_0$ , – це параметри розміщення об'єкта  $T_i$  в  $E^2$  (рис.1). Будемо далі вважати записи  $T_i$  і  $T_i(x_i, y_i)$  еквівалентними.

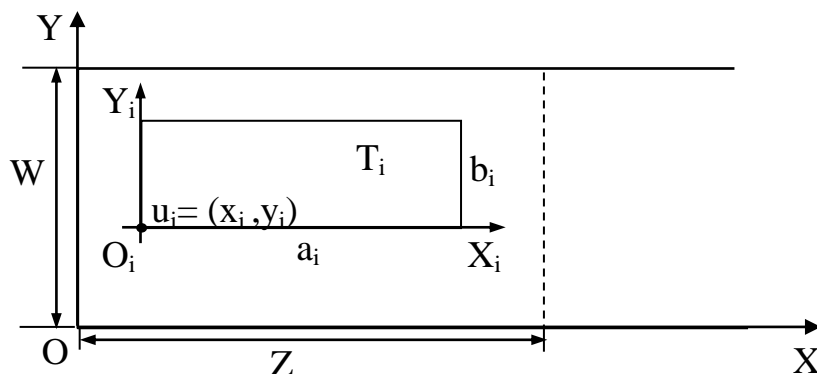




Рис. 1 – Геометрична інтерпретація об'єкта що розміщується  
Нехай метричні характеристики  $(a_i, b_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , задовольняють умові:

$$a_i \in [a_{i \min}, a_{i \max}] \quad b_i \in [b_{i \min}, b_{i \max}], \quad a_{i \min} > 0, \quad b_{i \min} > 0. \quad (1)$$

Нехай також площа  $S_i$  об'єкта  $T_i$  при зміні метричних характеристик  $(a_i, b_i)$  остається незмінною:

$$S_i = a_{i \min} \times b_{i \max} = a_{i \max} \times b_{i \min}, \quad \text{то єсть } b_i = S / a_i. \quad (2)$$

Іншими словами, маємо перший тип характеру зміни метричних характеристик розміщується об'єкта.

Тоді вектор незалежних змінних задачі має вигляд:  
 $\omega = (x_1, y_1, a_1, x_2, y_2, a_2, \dots, x_N, y_N, a_N)$ .

Необхідно розмістити набір об'єктів  $T$  в полубесконечной смузі  $T_0$  без накладень один на одного так, щоб величина  $Z$  - довжина зайнятої частини смуги  $T_0$  була мінімальною.

Отже, необхідно визначити

$$\min_{\omega \in D \subset E^{3N+1}} Z, \quad (3)$$

де область допустимих рішень  $D = D_1 \cap D_2$  определяется умовами вида

$$D_1: \text{int}T_i(x_i, y_i, a_i) \cap \text{int}T_j(x_j, y_j, a_j) = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j, \quad (4)$$

$$D_2: T_i(x_i, y_i, a_i) \subset T, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

## 2. Аналітичний опис області допустимих рішень задачі

Аналітичний опис умов (4) взаємного попарного неперетинання об'єктів розміщення, а також їх приналежність заданої області розміщення (5) здійснюється за допомогою апарату  $\Phi$ -функцій, введених член-кореспондентом НАН України Ю. Г. Стояном.

Наведемо визначення  $\Phi$ -функції, слідуючи для пари об'єктів  $(T_i(u_i), T_j(u_j))$  з наступними характеристиками:  $T_i(u_i) \subset E^2$  и  $T_j(u_j) \subset E^2$  –  $\phi$ -об'єкти ( $\text{int} T_i(u_i) \neq \emptyset$ ), метричні характеристики об'єктів  $T_i(u_i)$  і  $T_j(u_j)$  незмінні.

*Определение 2.1.* Довільна, усюди певна і безперервна функція в  $E^4$ , що має таке характеристичне властивість:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) > 0, \quad \text{якщо } \text{cl}T_i(u_i) \cap \text{cl}T_j(u_j) = \emptyset; \quad (6)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0, \quad \text{якщо } \text{cl}T_i(u_i) \cap \text{cl}T_j(u_j) \neq \emptyset \text{ и } \text{int}T_i(u_i) \cap \text{int}T_j(u_j) = \emptyset; \quad (7)$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0, \quad \text{якщо } \text{int}T_i(u_i) \cap \text{int}T_j(u_j) \neq \emptyset, \quad (8)$$

називається  $\Phi$ -функцією.

Характеристичні властивості  $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ -функції задає неперетин (6), дотик (7) і перетин (8) замкнених  $\phi^*$ -об'єктів  $T_i(u_i)$  и  $T_j(u_j)$ , де  $u_i = (x_i, y_i)$ ,  $u_j = (x_j, y_j)$  – параметри трансляції полюса  $\phi^*$ -об'єктів  $T_i(u_i)$  і  $T_j(u_j)$ , при цьому

$T_i(u_i), T_j(u_j) \subset E^2$ .

Поверхня  $\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0$  представляє собою 0-рівень  $\Phi$ -функції.

На підставі наведеного Визначення 1 розглянемо процедуру побудови  $\Phi_{ij}(\omega_i, \omega_j)$ -функції, умови, яка задає (4) і  $\Phi_{i0}(\omega_i, m_0)$ -функції, яка відповідає умові (5).

При виконанні умови (2) досить розглядати  $T_i(x_i, y_i, a_i) \subset E^3$  (рис. 2 а).

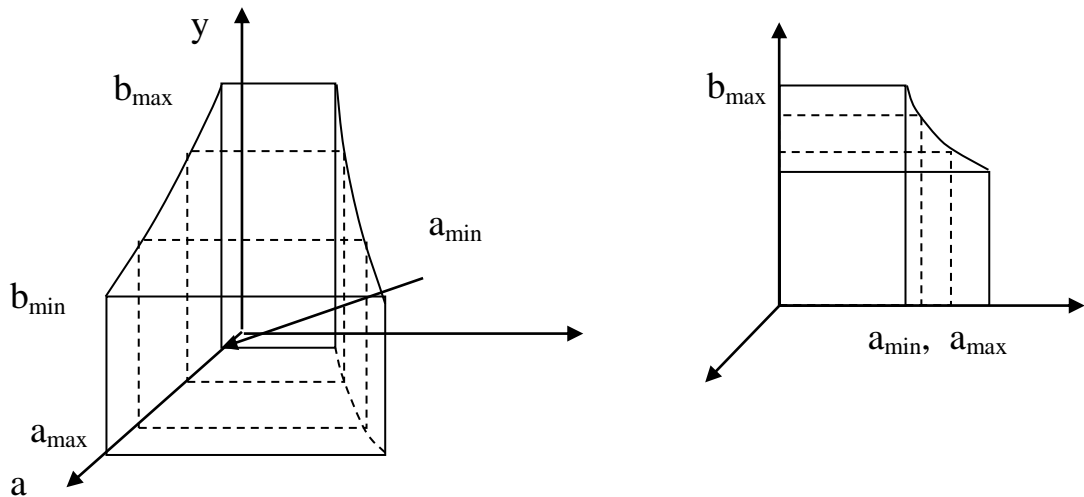


Рис. 2 – Подання прямокутника із змінними метричними характеристиками а) у просторі  $E^3$  ендогенних параметрів  $(x_i, y_i, a_i)$  задачі

б) перетину точкової множини  $T_i(x_i, y_i, a_i) \subset E^3$  площиною  $a_i = a_{i\text{const}}$

Будь-який перетин даної множини  $T_i(x_i, y_i, a_i)$  (рис.2 б) площиною  $a_i = a_{i\text{const}}$ ,  $a_{i\text{const}} \in \{a_{i\text{min}}, a_{i\text{max}}\}$  має просторову форму прямокутник.

Тоді  $\Phi$ -функція, що задає умову взаємного неперетинання об'єктів  $T_i(\omega_i)$  и  $T_j(\omega_j)$ , має вид:

$$\Phi_{ij}(\omega_i, \omega_j) \geq 0.$$

Таким чином,  $\Phi_{ij}(\omega_i, \omega_j)$ -функція в даному випадку визначається виразом:

$$\Phi_{ij}(\omega_i, \omega_j) = \min \left\{ \max_{k=1,4} f_k(\omega_i, \omega_j), f_{i\text{min}}(a_i), f_{i\text{max}}(a_i), f_{j\text{min}}(a_j), f_{j\text{max}}(a_j) \right\}$$

і описується системою  $\mathfrak{Z}(\omega) \geq 0$   $(N-1)N$  наборів  $F_{ij}(\omega_i, \omega_j) \geq 0$  нелінійних нерівностей виду

$$F_{ij}(\omega_i, \omega_j) \geq 0 \div \begin{cases} f_k(\omega_i, \omega_j) \geq 0 \\ f_{q \min}(a_q) \geq 0 \\ f_{q \max}(a_q) \geq 0 \end{cases}, \quad k = \overline{1,4}, q = \{i, j\}, i, j = \overline{1, N}, i \neq j, \quad (9)$$

где  $f_1(\omega_i, \omega_j) = x_j - x_i - a_i$ ,  $f_2(\omega_i, \omega_j) = x_i - x_j - a_j$ ,  $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - S_i / a_i$ ,  
 $f_4(\omega_i, \omega_j) = y_i - y_j - S_j / a_j$ ,  $f_{q \min}(a_q) = a_q - a_{q \min}$ ,  $f_{q \max}(a_q) = -a_q + a_{q \max}$ .

Тут набір нерівностей  $\square$  це таке аналітичне засіб опису неопуклого точкового безлічі, що координати будь-якої точки цієї множини задовольняють хоча б одній нерівності даного набору.

$\Phi_{i0}(\omega_i, m_0)$ -функція, аналітично описує обмеження на розміщення об'єкта  $T_i$  у смузі  $T_0$ , задається наступним чином:

$$\Phi_{i0}(\omega_i, m_0) = \min \{ \min_{h=1,4} F_h(\omega_i, m_0), f_{i \min}(a_i), f_{i \max}(a_i) \}.$$

Аналітичне подання області  $D_2 \subset E^{3N+1}$  є система нелінійних нерівностей  $F_0(\omega_i, m_0) \geq 0$  виду:

$$F_0(\omega_i, m_0) \geq 0 \div \begin{cases} F_h(\omega_i, m_0) \geq 0 \\ f_{i \min}(a_i) \geq 0 \\ f_{i \max}(a_i) \geq 0 \end{cases}, \quad h = \overline{1,4}, i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

де  $F_1(\omega_i, m_0) = x_i$ ,  $F_2(\omega_i, m_0) = Z - x_i - a_i$ ,  $F_3(\omega_i, m_0) = y_i$ ,  
 $F_4(\omega_i, m_0) = W - y_i - S_i / a_i$ .

Якщо метричні характеристики об'єктів  $T_i(\omega_i)$  зв'язані відповідними функціональними залежностями виду (1), то  $\Phi_{ij}(\omega_i, \omega_j)$ -функція, описує умови взаємного неперетинання розглянутої пари об'єктів із змінними метричними характеристиками належить простору  $E^6$ , а її рівні є кусочно-гладкими гіперповерхні.

В результаті проведеного аналізу оптимізаційна задача (3-5) формулюється так:

знайти:

$$\min_{\omega \in D \subset R^{3N+1}} Z, \quad (11)$$

де область допустимих рішень  $D \subset E^{3N+1}$  представляється у вигляді набору нерівностей

$$\begin{cases} F_0(\omega_i, m_0) \geq 0 \\ \langle f_k(\omega_i, \omega_j) \geq 0 \end{cases}, k = \overline{1,4}, i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (12)$$

### 3. Конструктивні властивості математичної моделі

Відзначимо основні властивості оптимізаційної задачі (11) - (12), що впливають з її математичної постановки.

Властивість 2.1. Функція мети  $Z$  є лінійною. При цьому

$$Z \in \left[ \min_{i \in N} a_{i \min}, \sum_{i=1}^I a_{i \max} \right].$$

Властивість 2.2. Простір параметрів, в якому визначається екстремум функції мети, має розмірність  $3N + 1$ , де  $N$  - число розміщуються об'єктів.

Властивість 2.3. Число обмежень, що описують область  $D$  допустимих рішень задачі (11) - (12), квадратично залежить від числа розміщуваних об'єктів і так само

$$2N(N - 1) + 6N.$$

Властивість 4. Область  $D \subset E^{3N+1}$  - неопуклого, неодоладне обмежене точкова множина, що має кусочно-гладку границю  $\Psi = FrD$ ,  $\Psi \subset E^{3N}$ . Кожна компонента зв'язності області допустимих рішень є многосвязной.

Властивість 2.5. Область  $D \subset E^{3N+1}$  допускає подання до вигляді об'єднання кінцевого числа зв'язкових подобластей  $D_g \subset E^{3N+1}$  виду

$$D = \bigcup_{g=1}^G D_g, \quad G = O(4^{N(N-1)}). \quad (13)$$

При цьому подобласть  $D_g \subset E^{3N+1}$  описується системою  $N$  систем нелінійних нерівностей виду (2.10) і нерівностей - по одному з кожного набору нерівностей виду  $\langle f_k^n(u_i, u_j, a_i, a_j) \geq 0$  для кожної пари об'єктів.

Відзначимо, що специфіка області допустимих рішень  $D$  така, що не тільки подобласть  $D_g$  є зв'язковим безліччю. Об'єднання кінцевого числа (не всіх) підмножин  $D_g$  також може бути зв'язковим.

Властивість 2.6. Функції виду  $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - \frac{S_i}{a_i}$  и  $f_4(\omega_i, \omega_j) =$

$$y_i - y_j + \frac{S_j}{a_j} \text{ є опуклими.}$$

Доказ.

Очевидно, функції що розглядаються  $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - \frac{S_i}{a_i}$  і  $f_4(\omega_i, \omega_j) = y_i - y_j + \frac{S_j}{a_j}$  є диференційованими.

Скористаємося наступним критерієм опуклості диференціюється: Пусть  $U \subset E^n$  – опукла множина,  $f \in C^1(U)$ , тоді для опуклості функції  $f$  на безлічі  $U$  необхідно і достатньо, щоб

$$\langle f'(s) - f'(t), s - t \rangle \geq 0, \forall s, t \in U \square, \quad (14)$$

Розглянемо функцію  $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - \frac{S_i}{a_i}$ . Для спрощення подальшого розгляду покладемо  $Y_{ji} = y_j - y_i$ . Тоді має місце запис  $f_3(y_j - y_i, a_i) = Y_{ji} - \frac{S_i}{a_i}$ .

Розглянемо 0-рівень даної функції:  $f_3(y_j - y_i, a_i) = Y_{ji} - \frac{S_i}{a_i} = 0$ .

Отже, можна записати  $Y_{ji} = \frac{S_i}{a_i}$ .

В даному випадку множина  $U \subset E^1$  являє собою відрізок

$$U = [a_{\min}, a_{\max}].$$

Положимо  $s = a_i^s$ ,  $t = a_i^t$ . Тоді різниця

$$s - t = a_i^s - a_i^t.$$

Похідна розглянутої функції  $Y'_{ji}(a_s) = \left. \frac{dY_{ji}}{da_i} \right|_{a_s}$  дорівнює  $-\frac{S_i}{(a_i^s)^2}$ .

Відповідно,  $Y'_{ji}(a_t) = \left. \frac{dY_{ji}}{da_i} \right|_{a_t} = -\frac{S_i}{(a_i^t)^2}$ .

Отже, скалярний твір  $(f'_3(s) - f'_3(t), s - t)$  у запропонованій нотації має вигляд

$$\left(-\frac{S_i}{(a_i^s)^2} + \frac{S_i}{(a_i^t)^2}, a_i^s - a_i^t\right) = \left(-\frac{S_i}{(a_i^s)^2} + \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^s + \left(\frac{S_i}{(a_i^s)^2} - \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^t.$$

Розглянемо можливі три випадки:

Випадок 1.

$$a_i^s > a_i^t \Rightarrow \frac{S_i}{(a_i^s)^2} < \frac{S_i}{(a_i^t)^2} \Rightarrow \left(-\frac{S_i}{(a_i^s)^2} + \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^s > 0 \text{ и } \left(\frac{S_i}{(a_i^s)^2} - \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^t < 0.$$

Очевидно, в цілому вираз  $\left(-\frac{S_i}{(a_i^s)^2} + \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^s + \left(\frac{S_i}{(a_i^s)^2} - \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^t > 0$

Випадок 2.

$$a_i^s < a_i^t \Rightarrow \frac{S_i}{(a_i^s)^2} > \frac{S_i}{(a_i^t)^2} \Rightarrow \left(-\frac{S_i}{(a_i^s)^2} + \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^s < 0 \text{ и}$$

$$\left(\frac{S_i}{(a_i^s)^2} - \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^t > 0. \text{ При этом } \left|\left(\frac{S_i}{(a_i^s)^2} - \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^t\right| > \left|\left(-\frac{S_i}{(a_i^s)^2} + \frac{S_i}{(a_i^t)^2}\right)a_i^s\right|.$$

Отже, в цьому випадку умова (2.14) також виконується.

Випадок 3.  $a_i^s = a_i^t$ .

Якщо  $a_i^s = a_i^t$ , то  $(f'_3(s) - f'_3(t), s - t) = 0$ .

Таким чином, умова даної властивості виконується для всіх значень  $a_i^s, a_i^t$ .

Перехід до початкового стану функції  $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - \frac{S_i}{a_i}$  не становить труднощів, так як функція  $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - \frac{S_i}{a_i}$  є лінійною комбінацією опуклою і лінійної функцій, і тому також є опуклою.

Для функції другого виду доказ проводиться аналогічно.

Для подальших міркувань скористаємося наступним визначенням і теоремою.

*Визначення 2.2*. Надграфік функції  $I$ , визначеної на множестве  $U \subset E^n$  має назву множина

$$\text{epi } I = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \gamma \end{pmatrix} \in E^{n+1} \mid \mathbf{u} \in U, \gamma \geq I(\mathbf{u}) \right\}.$$

*Теорема*. Для того щоб функція, певна на опуклому безлічі, була опуклою, необхідно і достатньо, щоб її надграфік був опуклим безліччю.

Наступне властивість 2.7 сформулюємо у вигляді теореми.

*Теорема 2.1*. Область  $D_g$  є опуклою підобластю області  $D$ .

Доведення. Область задається системою лінійних і нелінійних нерівностей. Тому опуклість або неопуклого області  $D_g$  залежить від

характеристик функцій-обмежень завдання. Ці функції або лінійні або є гіперболічними.

Згідно теореми, надграфики опуклих функцій  $f_3(y_j - y_i, a_i) = Y_{ji} - \frac{S_i}{a_i}$   
 и  $f_4(y_i - y_j, a_j) = Y_{ij} - \frac{S_j}{a_j}$  ( $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - \frac{S_i}{a_i}$  и  $f_4(\omega_i, \omega_j) = y_i - y_j - \frac{S_j}{a_j}$  відповідно) також є опуклими множинами.

Таким чином, область  $D_g$ , яка надається як перетин опуклих підмножин, в свою чергу є опуклим безліччю

*Слідство 2.1.* функції  $F_4(u_i, a_i, m_0) = W - y_i - \frac{S_i}{a_i}, i = \overline{1, N}$ , є

опуклими.

Доказ цього слідства проводиться аналогічно доказу властивості 2.6.

Властивості 8. Покриття (13) не є розбиттям, тому для деяких точок  $\omega$  області  $D$  (в тому числі граничних точок) має місце таке співвідношення

$$\omega \in D_{G_1} = \bigcap_{g=1}^{G_1} D_g, \quad G_1 < G. \quad (16)$$

#### **4. Подання завдання дослідження як завдання сепарабельного програмування**

*Визначення 2.3* [216]. функція називається  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

сепарабельном, якщо вона може бути представлена у вигляді суми функцій, кожна з яких є функцією однієї змінної, тобто якщо

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (17)$$

В рамках сепарабельного програмування розроблений підхід до перетворення нелінійних задач оптимізації певного типу, а саме містять функції виду (2.17), до задачі, що містить тільки лінійні функції. При цьому в подальшому в процесі вирішення такої модифікованої задачі використовується спеціальна модифікація симплекс-алгоритму. Обґрунтуванням методу є та обставина, що в якості гарного наближення нелінійної функції на великому відрізку можна використовувати її кусково-лінійну апроксимацію.

#### **Кусково-лінійна апроксимація сепарабельном функції**

Класичний метод кусочно-лінійної апроксимації передбачає наступний підхід.

Нехай змінна  $x_i$  функції виду  $F(x)$  (2.17) приймає значення з проміжку  $[0, \alpha_i]$ . Проміжок розбивають на  $r_i$  проміжків зазвичай рівної довжини за допомогою  $r_i + 1$  точок так, що  $x_{0i} = 0, x_{r_i} = \alpha_i$ . Для нелінійної функції  $f(x_i)$  однієї змінної ілюстрація підходу наведена на рис. 3. Тоді кусочно-лінійна апроксимація функції  $F(x)$  виду (17) така

$$\widehat{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \widehat{f}_i(x_i), \quad (18)$$

де

$$\widehat{f}_i(x_i) = \sum_{v=1}^{r_i} \lambda_{vi} f_i(x_{iv}), \quad x_i = \sum_{v=0}^{r_i} \lambda_{vi} x_{vi}, \quad \sum_{v=0}^{r_i} \lambda_{vi} = 1, \quad \lambda_{vi} \geq 0 \quad (19)$$

для всіх  $k$  і  $i$ , причому не більше двох чисел  $\lambda_{vi}$  можуть бути позитивними і повинні бути сусідніми.

*Зауваження 2.1.* Точність рішення прямо пропорційно залежить від точності апроксимації (кількості проміжків  $r_i$ ) сепарабельних функцій обмежень.

*Зауваження 2.2.* Розмірність простору змінних задачі зростає в залежності точності апроксимації сепарабельних функцій обмежень (за рахунок додавання нових змінних).

На рис. 3 наведено приклад лінійної апроксимації одновимірної нелінійної функції  $f(x)$ .

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки  $(x^{(k)}, f^{(k)})$  і  $(x^{(k+1)}, f^{(k+1)})$ , має вигляд

$$\bar{f}(x) = f^{(k)} + \frac{f^{(k+1)} - f^{(k)}}{x^{(k+1)} - x^{(k)}} (x - x^{(k)}).$$

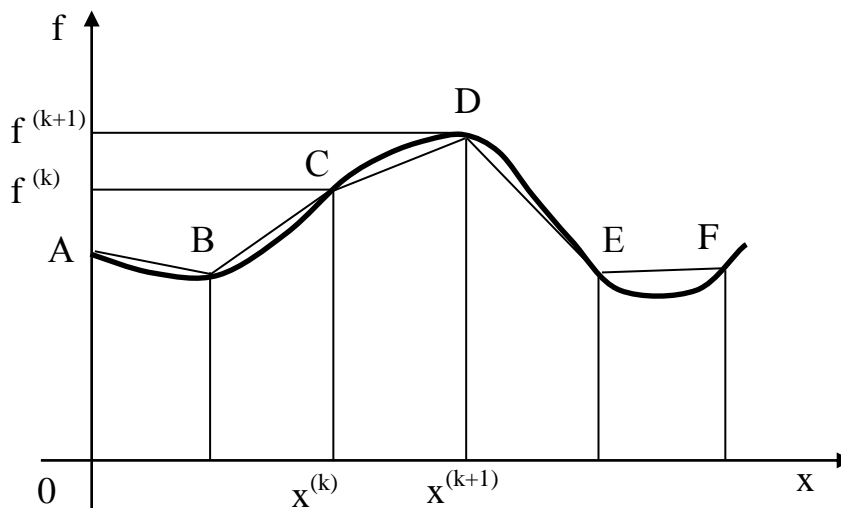




Рис. 3 – Геометрична інтерпретація лінійної апроксимації одновимірної нелінійної функції

Сукупність розглянутих лінійних функцій записують в загальному вигляді, враховуючи, що будь-яке значення аргументу  $x$  в інтервалі

$$x^{(k)} \leq x \leq x^{(k+1)},$$

можна записати як

$$x = \lambda^{(k)} x^{(k)} + \lambda^{(k+1)} x^{(k+1)},$$

де  $\lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}$  - неотрицательные числа, сума яких дорівнює 1.

Аналогічно записуються відповідні значення функцій.

Відзначимо наступну важливу властивість завдання (11) - (12).

*Властивість 2.9.* Завдання (2.11) - (2.12) належить до класу задач сепарабельного програмування.

Це властивість дійсно справедливо, так як функція мети і всі функції обмежень (2.12) є лінійними, крім функцій  $f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - S_i / a_i$ ,

$$f_4(\omega_i, \omega_j) = y_i - y_j - S_j / a_j, \quad F_4(\omega_i, m_0) = W - y_i - \frac{S_i}{a_i}, \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j, \quad \text{які}$$

задовольняють умові (17).

Якщо цільова функція і функції обмежень є сепарабельним, то наближене рішення такого завдання можна знайти з використанням методу кусково-лінійної апроксимації (18, 19).

Іншими словами, необхідно виконати перетворення  $\mathfrak{Z}$  виду

$$D_g \xrightarrow{\mathfrak{Z}} D_g^L, \quad (20)$$

яке продукує область  $D_g^L$  як результат застосування методу кусково-лінійної апроксимації (перетворення  $\mathfrak{Z}$ ) до нелінійним обмеженням області  $D_g$ .

Для даної задачі метод кусочно-лінійної апроксимації необхідно застосовувати для функцій обмежень завдання

$$f_3(\omega_i, \omega_j) = y_j - y_i - S_i / a_i, \quad f_4(\omega_i, \omega_j) = y_i - y_j - S_j / a_j, \\ F_4(\omega_i, m_0) = W - y_i - \frac{S_i}{a_i}.$$

Функція  $f_3(\omega_i, \omega_j)$  представляється у вигляді  $y_j - y_i - S_i / a_i = \sum_{d=1}^3 f_{d3}$ , при цьому,  $f_{13} = y_j$ ,  $f_{23} = -y_i$ ,  $f_{33} = -S_i / a_i$ , і тільки одна функція -  $f_{33}$  - є нелінійною.

Функції обмеження  $F_4(\omega_i, m_0)$  представляються у вигляді  $W - y_i - S_i/a_i = \sum_{s=1}^2 F_{s4}$ ,  $F_{14} = W - y_i$ ,  $F_{24} = -S_i/a_i$  з нелінійною функцією  $F_{24}$ .

*Зауваження 2.3.* Кількість обмежень лінеаризованної завдання зростає в залежності від кількості обмежень, що містять сепарабельном функції.

Тоді задача (11) - (12) перетвориться до виду

$$\min_{\omega \in D_g^L \subset D^L} Z, \quad (21)$$

$$D_g^L : \begin{cases} F_h(\omega_i, m_0) \geq 0, \quad h = \overline{1,3}, \\ W - y_i - \sum_{v=1}^{r_i} \lambda_{iv} F_{24}(a_{iv}) \geq 0, \\ f_\zeta(\omega_i, \omega_j) \geq 0, \quad \zeta = 1,2, \\ f_{1k} + f_{2k} + \sum_{v=1}^{r_q} \lambda_{qv} f_{3k}(a_{qv}) \geq 0, \quad k = 3,4; q \in \{i, j\}, \\ \sum_{v=1}^{r_i} \lambda_{iv} = 1, \\ \lambda_{iv} \geq 0, \quad v = \overline{1, r_i}, \\ f_{i \min}(a_i) \geq 0, \\ f_{i \max}(a_i) \geq 0, \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \end{cases} \quad (22)$$

*Зауваження 2.4.* Оцінка точності побудови апроксимації виду (22) не відома.

Очевидно, що точність рішення задач лінійного програмування, які можуть бути побудовані на основі даного підходу до лінійної апроксимації функцій обмежень не перевищить точності апроксимації виду (22).

**Висновки.** На лекції отримано формалізована математична модель тупікової та кільцевої розподільної мережі, що дозволяє виконувати гідравлічний розрахунок при заданих геометричних параметрах і несиметричному перебігу в живильному трубопроводі.

## Лекція № 13

### Оптимізаційні методи рішення задач розподілу обмежених ресурсів

1. Постановка завдання, побудова моделі операції
2. Аналітичний опис основних обмежень задачі
3. Визначення оптимальної структури продукту інвестиційно-будівельного проекту

Розглянуто проблему управління обмеженими ресурсами як багатовимірну багатокритеріальну задачу теорії дослідження операцій. Запропоновано підхід, заснований на використанні результатів такого розділу теорії оптимізаційного геометричного проектування як розміщення в обмеженій області прямокутних геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками.

Виділено і формалізовані приватні критерії якості рішення і набір обмежень на область допустимих рішень оптимізаційної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як завдання розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками, пов'язаними функціональними залежностями.

Розв'язана задача оптимального планування ресурсів при розробці проекту системи раннього виявлення пожежі складських приміщень ПрАТ «Філіп Морріс Україна» (м.Харків)

1. Постановка завдання, побудова моделі операції

Нехай є проект, що складається з робіт  $N$  (операцій)  $R = \{R_i\}, i = \overline{1, N}$ . На безлічі  $R$  робіт задана умова часткової впорядкованості виду  $R_i < R_j, (i, j) = \overline{1, N}, i \neq j$ , певне конкретної послідовності виконання робіт (робота  $R_j$  безпосередньо слід за роботою  $R_i$ ). Відзначимо при цьому, що визначення послідовності робіт передбачає участь ЛПР (менеджера проекту), так як в практичних завданнях таких послідовностей може бути кілька.

Для кожної роботи  $R_i$  відомий її обсяг  $V_i$ , виражений в чол·год,  $V_i = \text{const}$ . На проект в цілому в кожен момент часу може бути виділено не більше  $L_i$  (чол) безпосередніх виконавців робіт.

Необхідно скласти план виконання робіт проекту, оптимальний по необхідних ресурсів.

Розглянемо це завдання як 2D завдання теорії оптимізаційного геометричного проектування, в рамках якої властивості досліджуваних об'єктів інтерпретуються як геометричні характеристики. Тоді ресурси проекту в цілому можна уявити як область  $R_0$  двовимірного простору  $OXY$ , де по горизонтальній осі  $X$  відкладається час  $T$  виконання проекту, а по вертикальній осі  $Y$  - характеристика  $L$  необхідного обсягу трудових ресурсів, узгоджена з одиницями вимірювання  $T$ .

Кожна робота  $R_i$  може бути представлена як прямокутник  $R_i = R_i(a_i, b_i)$  у власній системі координат  $O_iX_iY_i$ , причому  $a_i \cdot b_i = V_i$ ,  $a_i, b_i$  - var. Характеристика  $a_i$  означає тривалість, а характеристика  $b_i$  - кількість виконавців роботи  $R_i$  в кожен момент часу. Момент початку виконання роботи  $R_i$  і її прив'язка до необхідної кількості трудових ресурсів визначаються параметрами  $v_i = (x_i, y_i)$  розміщення роботи в просторі ресурсів  $OXY$  (рис. 1).

Зауваження 1. Обсяг  $V_i$  є константою для роботи  $R_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Зауваження 2. На основі врахування технологічних характеристик для виконання кожної роботи  $R_i$  виділяються максимально і мінімально допустимі значення ресурсів. Іншими словами, метричні характеристики об'єкта  $R_i$  є елементи загальному випадку дискретних множин  $A$  і  $B$ :

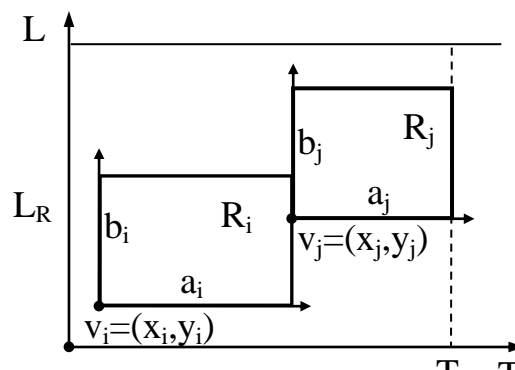


Рис. 1 – Розміщення робіт в просторі ресурсів

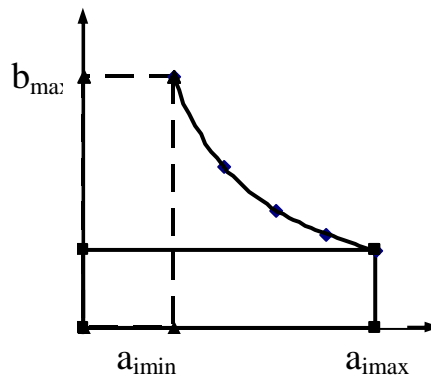


Рис. 2 – Подання роботи  $R_i$  при різних значеннях

$a_i \in A_i$ ,  
где

метричних характеристик

$b_i \in B_i$ ,

$$A_i = [a_{i \min}, a_{i \max}], B_i = [b_{i \min}, b_{i \max}], a_{i \min} > 0, b_{i \min} > 0. \quad (1)$$

$$b_i = V_i / a_i. \quad (2)$$

При дискретному характері завдання ресурсів можуть мати місце співвідношення:

$$V_i \leq a_i \min \times b_i \max,$$

$$V_i \leq a_i \max \times b_i \min.$$

Таким чином, при такій постановці для роботи  $R_i$  ендогенними є параметри

$\mu_i = (x_i, y_i, a_i)$ . Далі вважаємо записи  $R_i = R_i(\mu_i)$  еквівалентними. Очевидно, безліч робіт  $R_j$ , безпосередньо наступних за  $R_i$ , може складатися більш ніж з одного елемента:  $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ ,  $1 \leq j \leq N$ ,  $i \neq j$ . Позначимо безліч індексів таких робіт через  $I_i^j$ .

Таким чином, завдання оптимального розподілу ресурсів в представленій постановці є завдання розміщення  $N$  прямокутників без накладень один на одного в прямокутній області розміщення  $R_0$  так, щоб

$$T_R \times L_R \rightarrow \min_{\mu \in D \subset E^{3N}}, \quad (3)$$

де  $L_R$ ,  $T_R$  – ширина і довжина прямокутної області розміщення  $R_0$  відповідно,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ ,  $D \subset E^{3N}$  - область допустимих рішень, що виділяється системою обмежень на розміщення робіт наступного виду:

$$R_i \subset R_0, \quad (4)$$

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset, \quad (5)$$

$$R_j \succ R_i, \quad j \in I_i^j, \quad (6)$$

$$a_i \in A_i \quad b_i \in B_i, \quad (7)$$

$$b_i = V_i / a_i, \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (8)$$

Обмеження (4) визначає розміщення набору об'єктів  $R$  в  $R_0$  (умова присутності кожної роботи в складі проекту), (5) є умова взаємного попарного неперетинання об'єктів (що забезпечує неможливість використання одного ресурсу двома роботами одночасно), (6) - умова часткової впорядкованості робіт, (7) - обмеження на величину ресурсів робіт, (8) - умова збереження обсягу роботи.

Завдання по суті (і за загальноприйнятою методикою рішення) є двукритеріальною і може бути представлена у вигляді послідовності двох однокритеріальних завдань виду

$$T_R \rightarrow \min_{\mu \in D_1 \subset E^{2N+1}}, \quad (9)$$

$$L_R \rightarrow \min_{\mu \in D_2 \subset E^{2K+1}}, \quad (10)$$

де підобласть  $D_1$  області допустимих рішень  $D$  у задачі (9) задається без обмеження на величину  $L_R$  (або  $L_R$  враховується достатньо великою),

підобласть  $D_2$  виділяється обмеженнями виду (4 - 8) з фіксованими значеннями величини  $L_R$  і параметрів розміщення безлічі об'єктів розміщення, що моделюють критичні [72] операції, які отримані в результаті рішення задачі (9),  $K$  – кількість некритичних операцій.

При вирішенні завдань (9), (10) параметри  $a_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , фіксовані. При цьому критерій (10) може бути представлений у вигляді:

$$\Delta L_R \rightarrow \min_{\mu \in D_2 \subset E^{2K+1}}, \quad (11)$$

$$\text{де} \quad \Delta L_R = \max_{t \in \{1, 2, \dots, T_R\}} L_t - L_{t-1}, \quad (12)$$

що в термінах основного завдання дослідження є еквівалентним поданням. Отже, в загальному випадку необхідно побудувати оптимальний календарний графік  $G(T_R, \Delta L_R)$  проекту  $R$ , де  $T_R$  - загальний час виконання проекту,  $\Delta L_R = \max_{t \in \{1, 2, \dots, T_R\}} L_t - L_{t-1}$ .

Якщо параметри проекту, отримані в результаті рішення задач (9), (11), є такими, що на проект можливе виділення додаткових ресурсів за умови забезпечення якнайшвидшого виконання проекту, виникає третє завдання виведення проекту на максимально інтенсивний режим виду

$$T_R \rightarrow \min_{\mu \in D_3 \subset E^{3K_1+2K+1}}, \quad (13)$$

причому метричні характеристики об'єктів, що моделюють критичні операції  $R_k$ ,  $k = \overline{1, K_1}$ , є змінними,  $K + K_1 = N$ .

## 2. Аналітичний опис основних обмежень задачі (3-8)

Розглянемо аналітичний опис обмежень (4 – 6). Умова розміщення (4) набору об'єктів  $R_i$ , в області  $R_0$ , с урахуванням (7) задається системою  $F^n(u_i, a_i, m_0) \geq 0, i = \overline{1, N}$ , нелінійних нерівностей з функціями лівих частин виду

$$F^n(v_i, a_i, m_0) = \left\{ x_i; z - x_i - a; y_i, W - y_i - \frac{S_i}{a_i}; -a_i + a_{i \max}; a_i - a_{i \min} \right\} \quad (14)$$

Умова взаємного неперетинання (5) задається набором  $F_n(u_i, u_j, a_i, a_j) \geq 0$  нелінійних нерівностей з функціями лівих частин виду

$$F_n(u_i, u_j, a_i, a_j) = \{x_j - x_i - a_i; y_j - y_i - S_i / a_i; x_i - x_j - a_j; y_i - y_j - S_j / a_j\},$$

$$i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (15)$$

Умова часткового упорядкування (6) представляється у вигляді системи лінійних нерівностей

$$x_j - x_i - a_i \geq 0, j \in I_i^j, i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (16)$$

При цьому можливі (виходячи з практики календарного планування) два підходи. Якщо умова «робота  $R_j$  слід безпосередньо після роботи  $R_i$ », є обов'язковим, то в (16) відповідне обмеження є строгим рівністю, в іншому випадку умова (16) означає, що «робота  $R_j$  повинна бути виконана не раніше закінчення роботи  $R_i$ ». Далі буде показано, що наявність або відсутність умови (13) і його більш жорсткого аналога у вигляді рівності значно впливає на оцінку обчислювальної складності алгоритму розв'язання задачі.

Для вирішення сформульованої задачі оптимального розподілу ресурсів були застосовані запропоновані інструментальні засоби моделювання і розв'язання задачі розміщення прямокутних геометричних проектів із змінними метричними характеристиками.

### 3. Визначення оптимальної структури продукту інвестиційно-будівельного проекту

Завдання визначення оптимальної структури продукту інвестиційно-будівельного проекту необхідно включає як здатність виконувати пряму функцію попередження пожежі та її гасіння на початковій стадії розвитку, так і облік впливу продукту проекту на навколишнє середовище, яке носить невизначений або імовірнісний характер.

Екологічна ефективність продукту ІСП як складної організаційно-технічної системи визначається здатністю цієї системи протистояти негативному впливу можливих надзвичайних ситуацій на об'єкті на навколишнє середовище і людей.

Неможливість побудови універсальної системи безпеки визначає необхідність розробки системи безпеки для кожного типу об'єкта і вирішення проблеми оптимального розподілу обмежених ресурсів.

Для різних видів комерційної нерухомості, в тому числі складські термінали, екологічна ефективність в значній мірі визначається пожежною ефективністю, так як основним чинником, що призводить до ускладнення екологічної обстановки в регіоні, є пожежі та техногенні аварії, які супроводжуються пожежами. Дане властивість об'єкта визначається ефективністю функціонування системи забезпечення пожежної безпеки (СЗПБ).

**Виділимо основні складові СЗПБ (рис. 4).**

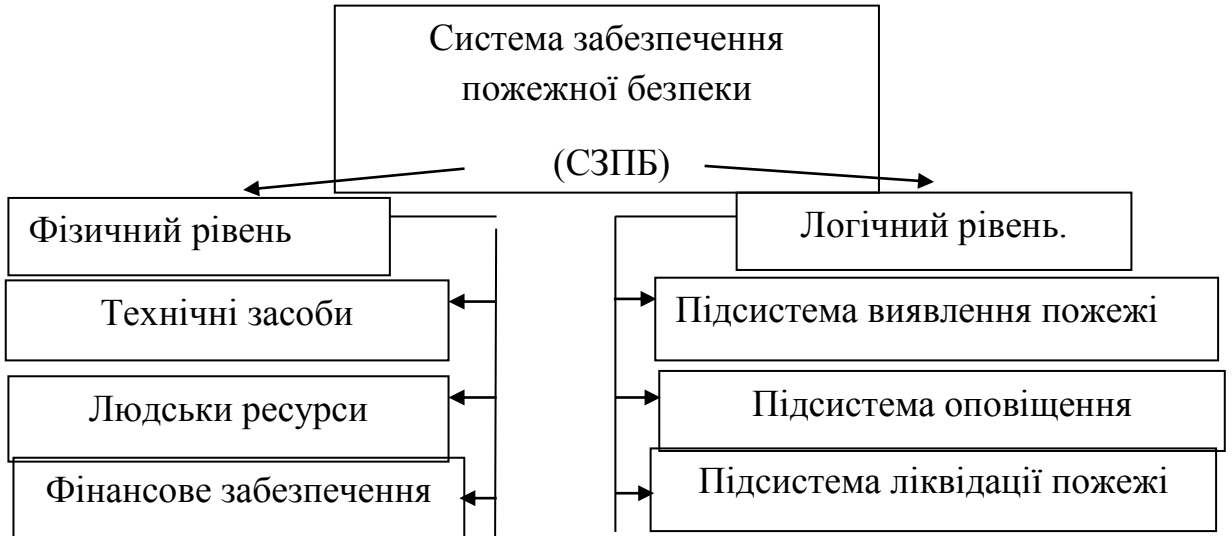


Рис. 4 – Структура СЗПБ промислового об'єкта

Така компонента системи забезпечення пожежної безпеки, як «технічні засоби», в більшості практичних застосувань включає технічні засоби автоматичного попередження (пожежна сигналізація): множина елементів  $M^{АПС} = \{m_k^{СПС}\}_{k=1,2,\dots,K}$ , і технічні засоби ліквідації пожежі (пожежна автоматика): множина елементів  $M^{СЛП} = \{m_g^{СЛП}\}_{g=1,2,\dots,G}$ , (рис.5).

Нехай саме ці кошти складають безліч  $M$  елементів  $\{m_i\}_{i=1,2,\dots,I}$  структури системи забезпечення пожежної безпеки, тобто

$$M = M^{СПС} \cup M^{СЛП}, I = K + G.$$

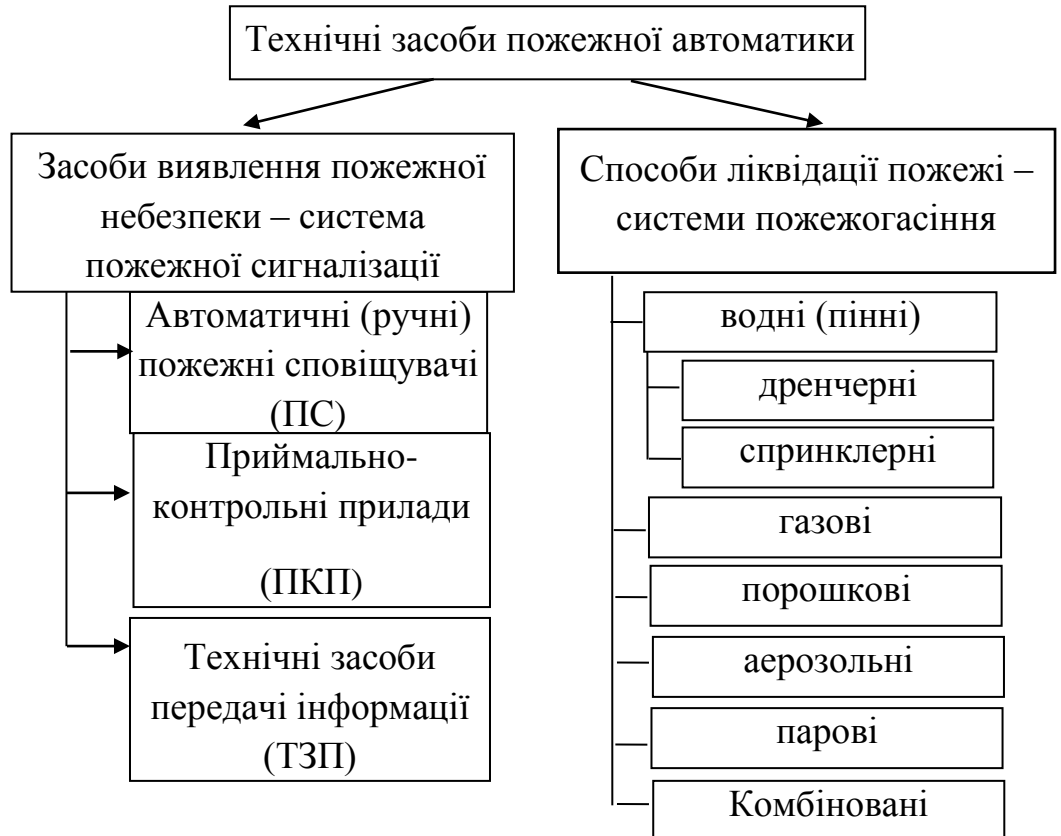




Рис. 5 – Технічні засоби пожежної автоматики

Система пожежної сигналізації (СПС – це сукупність технічних засобів, призначених для виявлення пожежі, обробки і надання в заданому вигляді повідомлення про пожежу на об'єкті, що підлягає, спеціальної інформації, а також для видачі команд на включення автоматичних установок пожежогасіння і управління іншими технічними засобами.

Таким чином, безліч елементів СПС має вигляд.:

$$M^{СПС} = M^{ПС} \cup M^{ПКП} \cup M^{ТЗП}.$$

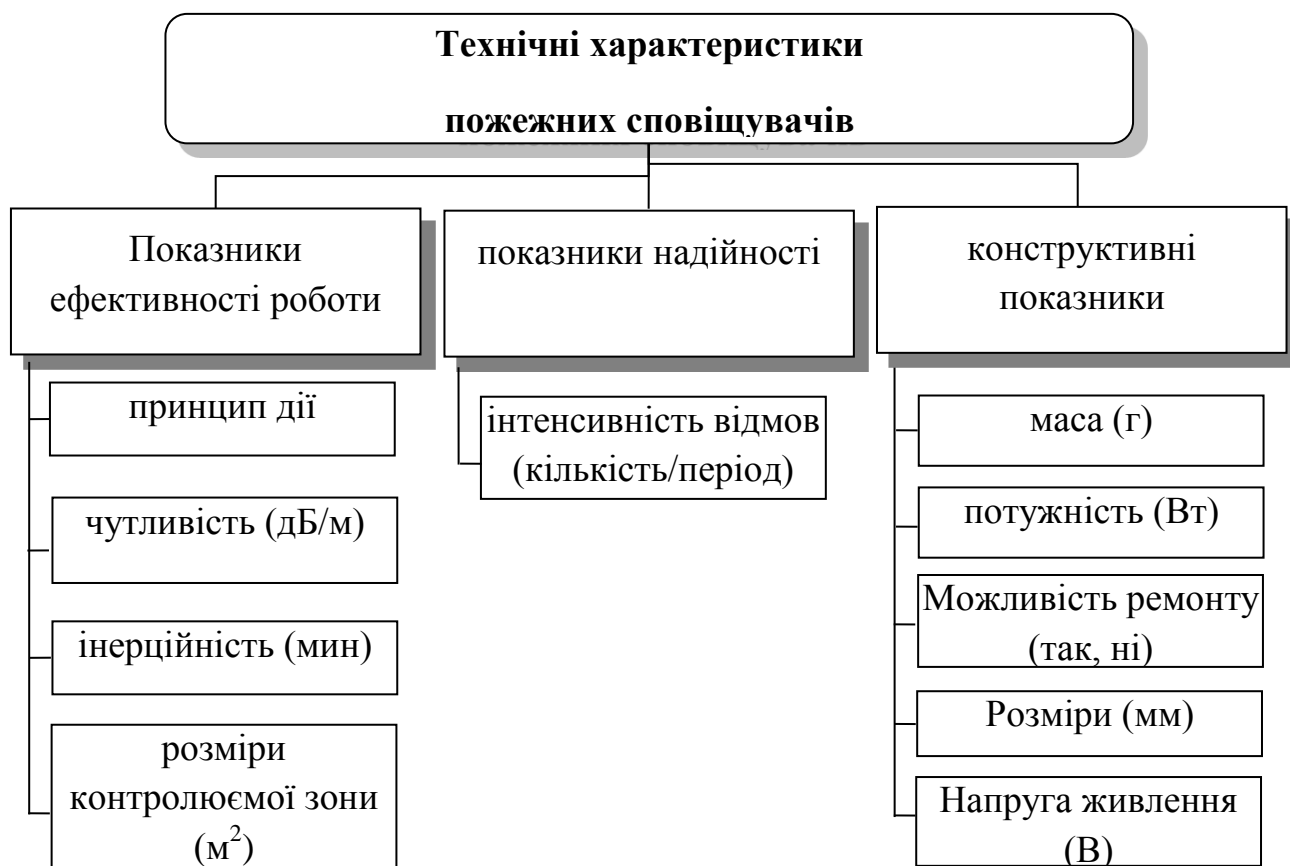
Аналіз літературних джерел показав, що ефективність СПС визначається в основному ефективністю автоматичних пожежних сповіщувачів (ПС) - ефективністю елементів  $M^{ПС}$ .

Основні характеристики пожежних сповіщувачів, згідно, представлені на рис. 6.

В даний час на практиці застосовуються такі види ПІ: теплові, димові (точкові), димові (лінійні), комбіновані, сповіщувачі полум'я.

Пріоритетними характеристиками ПІ вважаються поріг виявлення  $^{\circ}C$  (чутливість, дБ / м) і інерційність спрацьовування. Ці характеристики є функціями часу, тому в якості інтегральної характеристики приладу приймемо час від моменту виникнення пожежі до моменту спрацьовування СПС.

Таким чином, матриця ефективності  $E^{СПС}$  системи  $M^{СПС}$  має блочну структуру і ненульові елементи в рядках, які містять інформацію про елементи безлічі  $M^{ПС}$ .



## Рис. 6 Основні характеристики пожежних сповіщувачів

Рекомендації щодо вибору виду пожежних сповіщувачів для захисту конкретного об'єкта в залежності від типу приміщення, яке захищається, і виду пожежної навантаження, представлені в ДБН В.2.5-56:2014. Цей нормативний документ визначає також схеми розміщення пожежних сповіщувачів в приміщеннях, які підлягають захисту, граничні значення контрольованої площі для різних видів сповіщувачів, з урахуванням їх принципу дії і кращою геометрії на місці їх розміщення.

**Висновки:** на лекції було розглянуто проблему управління обмеженими ресурсами як багатовимірною багатокритеріальною задачею теорії дослідження операцій, наведено аналітичний опис основних обмежень задачі, визначена оптимальна структура продукту інвестиційно-будівельного проекту

## Рекомендована література

### Базова:

1. Бейко І.В., Бублик В.Н., Зінько Н.М., Методи та алгоритми розв'язання задач оптимізації. – Київ: Вища школа, 1983 – 415с.
2. Акуліч І.Л. Математичне програмування в прикладах та задачах. – М: Высшая школа, 1989 – 189 с.
3. Колодяжний В.М. Математическое программирование и элементы теории «Исследование операций».–Учебн.пособие. – Харьков: ХАИ, 2001.– 229с.
4. Баркалов С.А. Математические основы управления проектами / С.А. Баркалов, В.И. Воропаев, Г.И. Секлетова и др. – М.: Высшая школа, 2005. – 423с.
5. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – М.–СПб.–К.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
6. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Кремер Н. Ш., Путько Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.: под ред. проф. Кремера Н. Ш. – М.: ЮНИТИ, 2004

### Допоміжна

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В.Сергиенко. – К.: Наук, думка. 1988 – 472 с.
2. Стохастические модели и методы в экономическом планировании» / Ермольев Ю. М., Ястремский А. И. – М: Высшая школа, 1979. – 315с.

### Інформаційні ресурси

10. <http://windows.microsoft.com/uk-UA/windows/home>
11. <http://office.microsoft.com/ru-ru/word/>
12. <http://office.microsoft.com/ru-ru/excel/>
13. <http://www.youtube.com/watch?v=GW7-Dj54KB4>
14. [http://reff.net.ua/19986-Razrabotka\\_prilozheniiy](http://reff.net.ua/19986-Razrabotka_prilozheniiy) [http://reff.net.ua/19986-Razrabotka\\_prilozheniiy\\_a\\_yazyke\\_VBA\\_v\\_srede\\_MS\\_EXCEL\\_po\\_obrabotke\\_dannyh\\_dlya\\_zadannyh\\_ob\\_ektov.html](http://reff.net.ua/19986-Razrabotka_prilozheniiy_a_yazyke_VBA_v_srede_MS_EXCEL_po_obrabotke_dannyh_dlya_zadannyh_ob_ektov.html)